Задачи линейной алгебры

Подведём небольшой итог. На прошлой лекции мы классифицировали различные объекты линейной алгебры. На самом деле, как только определена прямая сумма, удобнее всего формулировать ответы перечислением неразложимых объектов.

1) Самая простая задача — класссификация векторных пространств над полем F с точностью до изоморфизма. Неразложимый объект — одномерное пространство F. Изоморфизм с $F \oplus \cdots \oplus F$ задаётся выбором базиса, разные базисы выражаются друг через друга обратимой матрицей с элементами из F.

2) Следующая по сложности задача — классификация отображений между конечномерными векторными пространствами с точностью до изоморфизмов этих пространств. В этой задаче объектом является пара векторных пространств плюс отображение между ними, при этом естественно определена прямая сумма таких объектов.

Здесь неразложимых объектов три: нулевые отображения $0 \to F$, $F \to 0$ и изоморфизм $F \to F$. Количество последних слагаемых определяет ранг оператора, количество остальных — размерности пространств.

В неинвариантной постановке этой же задачи можно выбрать базисы векторных пространств и записать оператор матрицей. Тогда задача формулируется как классификация матриц с точностью до умножения слева и справа на различные обратимые матрицы ($A \sim BAC$ для обратимых B, C). Элементарные преобразования строк и столбцов дают эффективный алгоритм для приведения к диагональному виду, в частности, если оператор обратим, позволяют найти обратную матрицу: если BAC равно единичной матрице, то $A^{-1} = CB$.

3) Ещё немного сложнее классификация операторов в конечномерных векторных пространствах с точностью до изоморфизма пространства. Объектом является пространство с оператором, прямая сумма определяется аналогично.

Неразложимые объекты здесь задаются клетками Фробениуса (в случае алгебраически замкнутого поля есть вариант жордановых клеток). В неинвариантной постановке задачи матрицы классифицируются с точностью до сопряжения обратимой матрицей ($A \sim BAB^{-1}$).

С практической точки зрения есть два способа поиска нормальной формы оператора. Выберем базис в векторном пространстве, и рассмотрим базисные векторы как образующие $F[x]$-модуля. Тогда матрица соотношений будет иметь вид $A - xE$, и достаточно привести её к нормальной форме Смита, которая и определит нормальную форму оператора A.

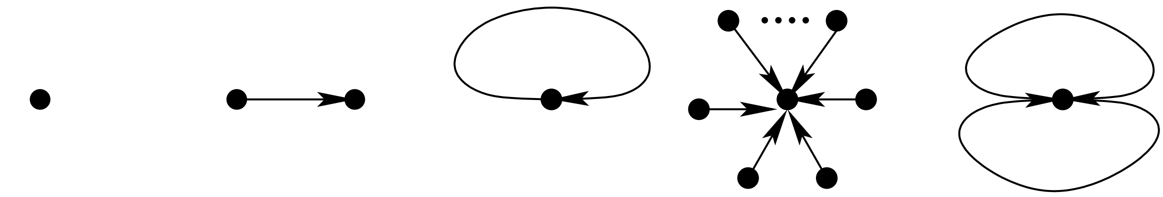
Другой вариант для алгебраически замкнутого поля — восстановить жордановы клетки, выясняя ранги $(A - \lambda E)^k$ для всех $\lambda \in F$ и $k \in \mathbb{N}$. Чтобы набор данных был конечен, достаточно ограничить k размером матрицы, а в качестве λ брать нули многочлена $\det(A - xE)$.

4) Кроме этого, хорошо известна задача о наборе k подпространств конечномерного векторного пространства с точностью до изоморфизма. Пара подпространств определяется их размерностями и размерностью пересечения, всего существует 4 неприводимых объекта. Для трёх подпространств неприводимых объектов уже 9 (при 8 размерностях всевозможных пересечений). Для четырёх и более подпространств неприводимых объектов бесконечно много, в частности, четвёрки прямых в двумерном векторном пространстве определяются непрерывным инвариантом — двойным отношением.

5) Задача о классификации пары операторов на векторном пространстве с точностью до изоморфизма считается “дикой” и разумного ответа в ней не ожидается.

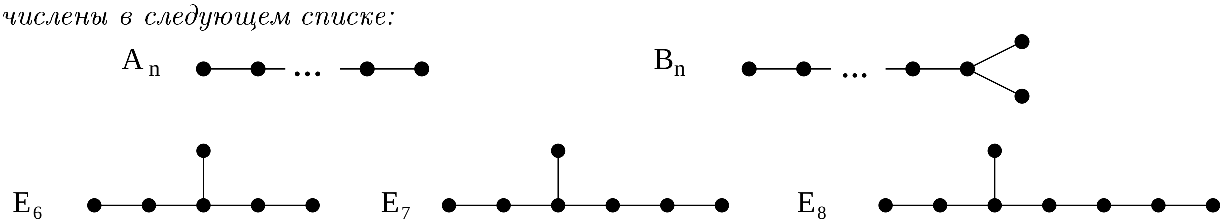
В самой общей постановке задача выглядит так. Пусть Γ — ориентированный граф. Разместим в его вершинах конечномерные векторные пространства, а каждому ребру сопоставим отображение соответствующих пространств (этот набор называется *представлением колчана* Γ). Задача состоит в описании таких объектов с точностью до изоморфизмов векторных пространств.

Примеры 1-5 выше соответствуют следующим графам:



Приведём без доказательства знаменитый результат о том, в каких случаях задача о классификации имеет простое решение.

Теорема 1 (Габриэль, Кац) *Все колчаны с конечным числом неразложимых представлений перечислены в следующем списке:*



ориентация при этом произвольна.

Задача о колчане может быть сформулирована в терминах модулей над следующей алгеброй. Рассмотрим множество путей $\mathcal{P}$ в графе Γ (включая пути длины ноль). Некоторые из путей можно соединять в один: если P_1 заканчивается в начале пути P_2, то их можно слить в новый путь $P_1 * P_2$. Определим *кольцо путей* $F(\mathcal{P})$ как множество формальных линейных комбинаций путей (вида $a_1[P_1] + \dots a_n[P_n]$, где $a_i \in F$, $P_i \in \mathcal{P}$) с естественной структурой абелевой группы. Умножение линейно по F и задаётся правилом $[P_1][P_2] = [P_1 * P_2]$, если путь P_1 заканчивается в начале пути P_2, и ноль иначе.

Предложение 1 *Модули над $F(\mathcal{P})$ соответствуют представлениям колчана.*

Доказательство: Пусть есть представление колчана с пространствами V_i в вершинах Γ. Сопоставим пути $P \in \mathcal{P}$ из i в j отображение V_i в V_j, равное композиции отображений, соответствующих рёбрам Γ, по которым последовательно проходит P. Можно считать, что P действует на пространстве $\oplus V_i$, переводя остальные слагаемые в ноль. Это продолжается по линейности до действия $F(\mathcal{P})$ на $\oplus V_i$.

Наоборот, пусть есть модуль над кольцом $F(\mathcal{P})$. Для вершины i обозначим e_i тривиальный путь из неё в себя. Тогда $\sum e_i$ — единица $F(\mathcal{P})$, а пропорциональные этой сумме элементы образуют подкольцо $F \subset F(\mathcal{P})$. Значит, модуль над $F(\mathcal{P})$ является векторным пространством V над F. Заметим, что $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, а $e_i^2 = e_i$. Значит, $V \cong \oplus V_i$, где $V_i = e_i V$ (проверьте это!). Действие путей длины 1 определит отображения между пространствами V_i, соответствующие рёбрам Γ.

Упражнение 1 *Докажите, что для колчана, соответствующего Примеру 3, $F(\mathcal{P}) \cong F[x]$.*

Бывают задачи, не вписывающиеся в эту схему, например, задача о классификации следующих объектов, соответствующих квадратным уравнениям многих переменных,

Определение 1. Пусть F — поле. *Билинейная форма (bilinear form)* на векторном пространстве V над F — такое отображение $V \times V \to F$, что

1) $(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda(u_1, v) + \mu(u_2, v)$, λ, $\mu \in F$, u_1, u_2, $v \in V$.
2) $(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda(u, v_1) + \mu(u, v_2)$, λ, $\mu \in F$, u, v_1, $v_2 \in V$.

Определение 2. Билинейная форма на V называется *симметрической (symmetric)*, если $(u, v) = (v, u)$ для всех u, $v \in V$.

Предложение 2 *Если* $\mathrm{char}(F) \neq 2$*, то всякая билинейная симметрическая форма определяется своей* квадратичной формой $(v, v) : V \to F$.

Доказательство: Имеем $(u, v) = \frac{(u+v,u+v)-(u,u)-(v,v)}{2}$.

Определение 3. Пусть V и W — векторные пространства с билинейными формами. Линейное отображение $f : V \to W$ называется *изометрией*, если оно — изоморфизм, и $(f(v), f(u)) = (v, u)$ для всех u, $v \in V$.

Наша задача на сегодня — классифицировать симметрические билинейные формы на конечномерных векторных пространствах с точностью до изометрии.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V. Определим *матрицу Грама* G формы посредством $G_{ij} = (v_i, v_j)$. Тогда, записывая вектор v столбцом $\mathbf{v}$, а u строкой $\mathbf{u}^t$, получим $(u, v) = \mathbf{u}^t G\mathbf{v}$.

Если B — матрица замены базиса (запись новых базисных векторов через старые), то матрица Грама в новом базисе имеет вид $B^t GA$, где B^t — транспонированная матрица. Таким образом, задачу о классификации можно истолковать координатно, как приведение матрицы этими преобразованиями к однозначно определённому виду.

Лемма 1 *Пусть* $\mathrm{char}(F) \neq 2$*, тогда существует базис, в котором матрица Грама диагональна. Другими словами, всякое пространство с билинейной симметрической формой представляется в виде ортогональной прямой суммы одномерных подпространств.*

Доказательство: Проведём индукцию по размерности пространства. Для размерности 1 утверждение выполнено автоматически.

Если для всякого вектора v выполнено $(v, v) = 0$, то форма нулевая, и утверждение выполнено. Иначе возьмём v для которого $(v, v) \neq 0$ и пусть $v^\perp$ — подпространство векторов u, таких что $(u, v) = 0$. Заметим, что V распадается в ортогональную прямую сумму $v^\perp$ и одномерного подространства Fv, порождённого v. Действительно, эти подпространства не пересекаются, и для всякого w можно записать $w = \frac{(w,v)}{(v,v)}v + w'$, и при этом $w' \in v^\perp$. Поскольку размерность $v^\perp$ меньше размерности V, в нём найдётся искомый базис. Добавляя к нему v, получим утверждение леммы.

Количество нулей на диагонали однозначно определяется как размерность следующего подпространства.

Определение 4. *Ядро* симметрической билинейной формы $V_0 \subset V$ — подпространство, состоящее из векторов v, таких что $(v, u) = 0$ для всех $u \in V$.

Заметим также, что диагональные значения такой матрицы можно умножать на квадраты в F, растягивая соответствующий базисный вектор в необходимое число раз. Этого уже достаточно, чтобы описать случай алгебраически замкнутого поля (в частности, $\mathbb{C}$).

Теорема 2 *Пусть* F *алгебраически замкнуто,* $\mathrm{char}(F) \neq 2$*. Тогда матрица Грама приводится к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали, причём их количество определено однозначно.*

Случай вещественных чисел также хорошо вписывается в эту схему.

Теорема 3 *Пусть* $F = \mathbb{R}$*. Тогда матрица Грама приводится к диагональному виду с единицами, минус единицами и нулями на диагонали, причём их количество определено однозначно.*

Доказательство: После утверждённого выше остаётся доказать единственность. Часто это утвеждение про единственность называют *теоремой об инерции.*

Мы уже знаем, что число нулей на диагонали равно размерности ядра формы. Заметим, что количество единиц (соответственно, минус единиц) на диагонали равно максимальной размерности подпространства, для ненулевых элементов которого выполнено $(v, v) > 0$ (соответственно < 0). Действительно, диагональный вид матрицы Грама даёт разложение V в ортогональную прямую сумму V_+, V_- и V_0, для которых значения (v, v) имеют соответствующий знак. При этом подпространство, размерность которого больше V_+, непременно пересечётся с $V_- \oplus V_0$, для элементов которых выполнено $(v, v) \leqslant 0$, значит, размерность V_+ действительно максимальна. Аналогично поступаем и с размерностью V_-.