Алгебра 3-?

Напомним что комплекс Шевалле $C^*(\mathfrak{g}, V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в представлении (V, ρ) состоит из кососимметричных полилинейных отображений из $\mathfrak{g}$ в V с диффенциалом $\delta = D_1 + D_2$,

$$D_1 c(g_1, g_2 \cdots, g_{n+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} c([g_i, g_j], g_1, g_2 \cdots, \hat{g}_i, \cdots, \hat{g}_j, \cdots, g_{n+1})$$

$$D_2 c(g_1, g_2 \cdots, g_{n+1}) = \sum_{i} (-1)^{i+1} \rho(g_i) c(g_1, g_2 \cdots, \hat{g}_i, \cdots g_{n+1}).$$

1. Докажите что комплекс Шевалле является комплексом: $\delta^2 = 0$.

Комплекс C^* пазывается мультипликативным или дифференциально-градуированной алгеброй (ДГА), если на нем задано умножение, согласованное со степенью $C^i \otimes C^j \to {}^{i+j}$ (градуированность) и дифференциалом $d(ab) = d(a)b + (-1)^i a d(b), f \in C^i$ (Правило Лейбница).

2. Можно ли в правиле Лейбница опустить знак?

3. Докажите что когомологии ДГА являются градуированной алгеброй.

Определим умножение $\cap$ на комплексе Шевалле формулой

$$\alpha \cap \beta(g_1, g_2 \cdots, g_{m+n}) =$$

$$\frac{1}{(m+n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha(g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \cdots g_{\sigma(m)} \beta(g_{\sigma(m+1)}, g_{\sigma(m+2)}, \cdots, g_{\sigma(m+n)}).$$

4. Докажите, что $\cap$ определяет мультипликативную структуру на комплексе Шевалле.

5. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ - идеал. Докажите что E_2 член спектральной последовательности Серра-Хохшильда равен $E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{h}, H^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, V))$.