Материалы к спецкурсу "Диофантовы приближения"

Н.Г.Мощевитин, осенний семестр 2009/2010 уч.года

Критериев оценки "хорошо" и "удовлетоврительно" в настоящее время не имеется.

Для получения оценки "отлично" достаточным критерием является хотя бы одно из четырех сформулированных ниже условий.

I. Уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

II. Решить $\geqslant 80\%$ задач из списка, помеченных буквой a.

III. Решить $\geqslant 40\%$ задач из списка, помеченных буквой b.

IV. Решить хотя бы одну задачу из списка, помеченную буквой c.

ПРОГРАММА

1. Дерево Фарея. Теорема Гурвица о том, что для иррационального α имеется бесконечно много рациональных дробей p/q таких, что $|\alpha - p/q| < 1/(\sqrt{5}q^2)$.

Задачи.

1(a). В теореме Гурвица доказывается, что если α принадлежит интервалу Фарея $(p/q, p_1/q_1)$, то либо p/q, либо p_1/q_1, либо $p/q \oplus p_1/q_1 = (p+p_1)/(q+q_1)$ обладают нужнам свойством. Верно ли следующее усиление теоремы Гурвица: для любого иррационального α существует бесконечно много интервалов Фарея $(p/q, p_1/q_1)$, таких, что либо p/q, либо p_1/q_1 обладают нужнам свойством.

2(a). Доказать, что неравенство теоремы Гурвица выполнено для хотя бы одной из трех последовательных подходящих дробей к α.

3(b). Пусть α иррационально и $\tau \geqslant 0$. Доказать, что существует бесконечно много рациональных дробей p/q, таких что

$$-\frac{1}{q^2\sqrt{4\tau+1}} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{\tau}{q^2\sqrt{4\tau+1}}$$

2. Цепные дроби. Общие теоремы об аппроксимации. Теорема о существовании луча Холла.

Задачи.

1(a). Доказать теорему Лежандра о том, что если $|\alpha - p/q| < 1/(2q^2)$, то несократимая дробь p/q является подходящей дрообью к α.

2(a). Верно ли утверждение обратное к теореме Лежандра (зад. 1)?

3(a). Доказать равносильность двух определений эквивалентных чисел ($\alpha \sim \beta$ если некоторые "хвосты" разложений в цепные дроби у α и β совпадают; второе определение - α переводится в β некоторым целочисленным дробно-линейным унимодулярным преобразованием).

4(a). Вычислить первые три элемента дискретной части спектра Лагранжа.

5(b). Доказать, что в интервале $(1/\sqrt{12}, 1/3)$ нет элементов спектра Лагранжа.

6(a). Доказать оценку для начала луча Холла, лучшую, чем $\lambda_* > 6$.

7(b). Доказать оценку для начала луча Холла $\lambda_* \geqslant \sqrt{21}$.

8(a). Доказать, что $F_4 \cdot F_4$ является отрезком. (F_k есть множество чисел из отрезка $[0,1]$ у которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят k.)

9(a). Каково максимальное значение τ при котором множество F_2 будет τ-множеством?

10(b). Пусть $\tau(k)$ есть максимальное значение τ при котором множество F_k является τ-множеством. Вычислить предел $\lim_{k\to+\infty} \tau(k)/k$.

11(b). Доказать, что если $A_1, ..., A_k$ суть $\tau_1, ..., \tau_k$-множества с одинаковым начальным отрезком I и выполнено

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_j}{1+\tau_j} \geqslant 1,$$

то

$$A_1 + ... + A_k = I + ... + I.$$

12(с). Верно ли, что в любой окрестности любого значения параметров $(\tau_1, ..., \tau_k) \in \mathbb{R}^k$, удовлетворяющих равенству из предыдущей задачи, найдутся такие наборы $(\tau_1^*, ..., \tau_k^*)$ и соотвествующие τ_j^*-множества, для которых

$$A_1 + ... + A_k \neq I + ... + I.$$

13(с). Верно ли, что для всякого λ из спектра Лагранжа найдется такое α, что неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda q^2}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах p/q, в то время как неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1-\varepsilon}{\lambda q^2}$$

имеет конечное число решений при каждом положительном ε?

3. Теорема Минковского о выпуклом теле (три доказательства - Блихфельдра, Морделла и Зигеля).

Задачи.

1(а). Пусть M - тело в $\mathbb{R}^n$ объема $> k$. Доказать, что найдется вектор $x \in \mathbb{R}^d$, такой что $M + x$ содержит как минимум $k+1$ целую точку.

2(а). Можно ли в предыдущей задаче для замкнутого M строгое неравенство заменить нестрогим?

3(а). доказать, что если в теореме Минковского о выпуклом теле потребовать, что объем тела $> 2^n k$, то в теле найдется k пар целых различных ненулевых точек.

4(а). Можно ли определить объем замкнутого октаэдра в трехмерном пространстве, у которого центр и все вершины являются целыми точками, и других целых точек в октаэдре нет.

5(с). Каков максимальный объем октаэдра в трехмерном пространстве с центром в начале координат, внутри которого нет других целых точек.

6(b). Пусть

$$\Lambda^* = \{y : \ \ y \cdot x \in \mathbb{Z} \, \forall x \in \Lambda\}$$

есть решетка двойственная к решетке $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Пусть тело K содержит точку 0 и не содержит никаких других точек решетки Λ. Доказать равенство

$$\mathrm{vol} K + (\mathrm{vol} K)^{-1} \sum_{\gamma \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \left| \int_K e^{-\pi i y \cdot x} dx \right|^2 = 2^n \det \Lambda.$$

4. Совместные приближения. Теорема Блихфельдта-Спона.

Задачи.

1(а). Доказать аналог теоремы Спона для совместных приближений в евклидовой норме (константу можно оставить в виде интеграла и не вычислять).

2(b). Вычислить асимптотику для константы в предыдущей задаче.

3(b). Доказать, что при каждом значении размерности n существует величина σ_n^*, строго большая, чем соответствующая величина из теоремы Спона и такая, что для бесконечно многих q выполнено

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} ||q\alpha_j|| < 1/((\sigma_n^* q)^{1/n}).$$

4(c). Доказать, что величину из задачи 3 можно взят так, чтобы $\sigma_n^* \to +\infty, n \to \infty$.

5. Совместные приближения. Наилучшие приближения и вырождение размерности. Гипотеза В.М.Шмидта о последовательных минимумах.

Задачи.

1(a). Пусть $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, ..., \alpha_n) \geqslant 4$. Доказать, что существует последовательность пар индексов $\nu < k$ таких, что ν может быть сколь угодно большим, и для векторов наилучших приближений $\mathbf{z}_l$ выполнено следующее:

• тройки

$$\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}; \quad \mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{k+1}$$

состоят из линейно независимых векторов каждая;

• имеется некоторое двумерное вполне рациональное подпространство π такое, что

$$\mathbf{z}_l \in \pi, \ \ \nu \leqslant l \leqslant k; \quad \mathbf{z}_{\nu-1} \notin \pi, \ \ \mathbf{z}_{k+1} \notin \pi;$$

• четыре вектора

$$\mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}, \mathbf{z}_{k+1}$$

линейно независимы.

2(a). Доказать существование таких чисел α_j, что $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, ..., \alpha_n) = n + 1 \geqslant 3$ и среди последовательных векторов наилучших приближений встречаются сколь угодно длинные цепочки, лежащие в двумерных подпространствах.

3(b). Пусть векторы $\mathbf{z}_\nu, \mathbf{z}_{\nu+1}$ порождают двумерную решетку Λ_ν и d_ν - ее фундаментальный объем. Доказать, что $d_\nu \to +\infty, \nu \to +\infty$.

4(b). "Проредим" последовательность решеток Λ_ν из предыдущей задачи следующим образом: если $\lambda_{\nu+1} = \Lambda_n u$, то решетку $\lambda_{\nu+1}$ вычеркиваем. Последовательность определителей прореженной последовательности решеток снова будем обозначать d_ν. Доказать что d_ν всегда растут экспоненциально.

5(c). При $n = 2$ определить величину

$$\inf_{\alpha_1,\alpha_2} (\liminf_{t\to\infty} d_t^{1/t}),$$

где инфимум берется по всем α_1, α_2, линейно независимым вместе с 1 над $\mathbb{Z}$ а d_ν - из предыдущей задачи.

6(a). В задаче В.М.Шмидта о последовательных минимумах доказать, что если $\xi_1, ..., \xi_n$ линейно независимы вместе с 1 над $\mathbb{Z}$, то для неограниченной последовательности вещественных чисел N выполнено $\mu_1(N) = \mu_2(N)$.

6(b). В условиях предыдущей задачи доказать, что при каждом i для неограниченной последовательности вещественных чисел N выполнено $\mu_i(N) = \mu_{i+1}(N)$.

6. (α, β)-игры. Общие теоремы о выигрышных множествах.

Задачи.

1(a). Описать все 2/3-выигрышные множества на прямой.

2(a). Доказать, что при любом $\alpha \in (0, 1/2)$ множество

$$\{\xi \in [0, 1] : \ \inf_{x\in\mathbb{N}} ||\xi x|| > 0\}$$

является α-выигрышным.

3(b). Пусть последовательность положительных чисел t_n такова, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_0 \ \ \forall n \geqslant N_0 \ : \ \ \frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1 + \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

Доказать, что при каждом положительном δ множество

$$\mathcal{A}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \ \exists c(x) > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ ||t_n x|| > c(x)/n^\delta\}$$

будет α-выигрышным с любым заданным наперед $\alpha \in (0, 1/2)$.

4(c). Пусть последовательность положительных чисел t_n такова, что

$$\exists N_0 \ \ \forall n \geqslant N_0 : \ \ \frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1 + \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Верно ли, что при некоторых положительных $\delta < 1$ и α множество

$$\mathcal{A}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \ \exists c(x) > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ ||t_n x|| > c(x)/n^\delta\}$$

будет α-выигрышным?

5(c). Доказать, что в условиях задачи 4 выполнено $\mathcal{A}_{1/2} \neq \varnothing$.

7. Неоднородные приближения. Обобщение теоремы Хинчина-Ярника.

Задачи.

1(b). Для матрицы Θ наряду с "однородной" функцией Ярника рассмотрим "неоднородную" функцию

$$\psi_{\Theta,\alpha}(t) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \, M(\mathbf{x}) \leqslant t} \ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} ||L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j||, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

и функцию

$$\Psi_\Theta^{[inhom]} = \sup_{\alpha \in [0,1]^n} \psi_{\Theta,\alpha}(t).$$

Обынчная функция Ярника удовлетворяет равенству

$$\psi_\Theta(t) = \psi_{\Theta,\mathbf{0}}(t).$$

Также наряду с системой чисел Θ будем рассмариваль транспонированную систему ${}^t\Theta$.

Доказать следующее утверждение. Пусть функция $\psi(t)$ такова, что при некотором положительном η функция $t \mapsto \frac{1}{t^\eta \psi(t)}$ монотонно стремится к бесконечности при $t \to +\infty$. Обозначим через $\rho(t)$ функцию обратную к функции $t \mapsto \frac{1}{\psi(t)}$.

Предположим, что при всех достаточно больших значениях t выполняется

$$\psi_{{}^t\Theta(t)} > \psi(t).$$

Тогда для всех достаточно больших значений t выполнено

$$\Psi_\Theta^{[inhom]} \leqslant C_\eta \rho(t).$$

2(b). Доказать следующее утверждение. Пусть при всех достаточно больших t выполнено

$$\psi_{{}^t\Theta}(t) \leqslant \psi(t)$$

Тогда найдется набор вещественных чисел $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ такой, что при всех достаточно больших t выполняется

$$\psi_{\Theta,\alpha}(t) \geqslant \frac{1}{24 n^{3/2} \rho(8mt)}.$$

8. Метрическая теория. теорема Хинчина-Касселса.

Задачи.

1(a). Доказать, что лакунарная последовательность является сигма-последовательностью.

2(a). Привести пример последовательности, не являющейся сигма-последовательностью.

3(b). Верно ли, что из условия

$$\exists N_0\ \ \forall n \geqslant N_0\ :\ \ \frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1 + \frac{1}{\log\log n}$$

будет следовать, что последовательность t_n является сигма-последовательностью.

4(b). Доказать следующее утверждение. Пусть набор положительнозначных функций $\psi_1(q), ..., \psi_n(q)$ натурального аргумента q таков, что функция

$$\psi(q) = \prod_{j=1}^{n} \psi_j(q)$$

не возрастает, а ряд $\sum_{q=1}^{+\infty} \psi(q)$ расходится, то для почти всех наборов $(\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ имеется бесконечно много натуральных чисел q, таких что

$$||q\theta_j|| < \psi_j(q), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

5(a). Сформулировать и доказать метрическое утверждение в случае сходимости ряда $\sum_{q=1}^{+\infty} \psi(q)$ в постановке, рассмотренной в задаче 4.

6(c). Сформулировать и доказать теорему расходимости в задаче Д.Клейнбока (хотя бы для двумерного аффинного подпространства в $\mathbb{R}^3$).