5. СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — сфера единичного радиуса с центром O. Расстоянием между точками $A, B \in S^2$ называется длина $\varrho(A,B)$ наименьшей дуги большого круга, соединяющей A и B.

Задача 1. Докажите, что это действительно расстояние: $\varrho(A,B) \le \varrho(A,C) + \varrho(B,C)$, причем равенство имеет место только если C лежит на кратчайшей дуге большого круга, соединяющей A и B.

Задача 2. а) Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — изометрия (отображение, сохраняющего обычное "евклидово" расстояние), сохраняющая O. Докажите, что $F|_{S^2}$ — изометрия S^2 (отображение, сохраняющее расстояние ϱ). б) Пусть $f : S^2 \to S^2$ — изометрия . Докажите, что f можно продолжить до изометрии $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Большие круги на сфере называют сферическими прямыми.

Флагом на S^2 называется тройка (a, p, L), где $a \in S^2$, p — сферическая прямая, на которой фиксировано одно из двух направлений, и L — полусфера, ограниченная p.

Задача 3. а) Докажите, что для любых двух флагов на S^2 существует и единственна изометрия, переводящая один в другой. б) Докажите, что всякая изометрия S^2, сохраняющая ориентацию (уточните, что это значит!), является поворотом вокруг некоторой оси.

Полярой точки $A \in S^2$ называется сферическая прямая ω_A, лежащая в плоскости, перпендикулярной OA.

Углом между прямыми ω_1, ω_2 называется двугранный угол, образованный соответствующими плоскостями.

Задача 4. Пусть $A, B \in S^2$. Докажите, что а) прямая, проведенная через точки A и B, полярна точке пересечения прямых ω_A и ω_B, б) угол между ω_A и ω_B равен расстоянию между A и B.

Задача 5. Докажите, что два сферических треугольника равны (совмещаются изометрией), если попарно равны а) их стороны, б) их углы.

Задача 6. Докажите, что любой сферический треугольник имеет а) описанную окружность, б) вписанную окружность.

Задача 7. а) Докажите, что площадь сферического сектора, заключенного между прямыми, образующими угол α, равна 2α. б) Докажите, что площадь сферического треугольника с углами α, β, γ равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Задача 8 (теорема синусов). Пусть ABC — сферический треугольник со сторонами a, b, c, противолежащими углам α, β, γ. Докажите равенство $\sin a / \sin \alpha = \sin b / \sin \beta = \sin c / \sin \gamma$.

Указание. Спроектируйте точку A на плоскость OBC и на прямые (евклидовы) OB и OC.

Задача 9 (две теоремы косинусов). Докажите для треугольника ABC из задачи 8 а) равенство $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$, б) равенство $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$

Указание. Рассмотрите векторы $u = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cos c$ и $v = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cos b$.

Задача 10. Пусть S — площадь треугольника из задачи 8. Докажите равенство $\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}$, где $p = (a+b+c)/2$.

Задача 11. Как изменятся формулы задач 8–10, если радиус сферы равен R? Во что перейдут эти формулы при $R \to \infty$?