ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Обратный образ. Интегрирование дифференциальных форм. Внешнее произведение. Внешнее дифференцирование.

Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, не обязательно равной размерности. Тогда для каждого контравариантного k-тензора $\omega \in \Gamma((T^*)^{\otimes k}N)$ на многообразии N определен контравариантный k-тензор $f^*\omega$ на M (*обратный образ* тензора ω при отображении f): элемент $(f^*\omega)(a) \in (T_a^*)^{\otimes k}M$ определяется как k-полилинейная форма на T_aM, действующая на векторы $v_1, \dots, v_k \in T_aM$ по формуле $(f^*\omega)(a)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(a))(f'(a)v_1, \dots, f'(a)v_k)$. Если тензор ω симметрический (является сечением $\mathrm{Symm}(T^*N, k)$) или кососимметрический (сечение $\Lambda^k T^*N$, т.е. дифференциальная k-форма), то тензор $f^*\omega$ обладает тем же свойством.

Пример 1. Пусть $\omega = d\varphi$ — дифференциальная 1-форма на окружности, рассмотренная в примере 1 лекции 6, а $f : S^1 \to S^1$ задается формулой $f(z) = z^k$. На S^1 существует векторное поле $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, равное $\frac{\partial}{\partial x_1}$ в карте U_1 и $\frac{\partial}{\partial x_2}$ в карте U_2; очевидно, $d\varphi(\frac{\partial}{\partial\varphi}) \equiv 1$. Тогда $x_1(f(a)) = kx_1(a) + 2\pi l$ при некотором $l \in \mathbb{Z}$, и аналогично для x_2. Отсюда следует, что $f'(a)(\frac{\partial}{\partial\varphi}(a)) = k\frac{\partial}{\partial\varphi}(f(a))$, и $(f^*d\varphi) = kd\varphi$.

Замечание. В частности, функция $g \in C^\infty(N)$ это контравариантный 0-тензор — сечение тривиального одномерного расслоения над N; ее обратный образ задается формулой $(f^*g)(x) = g(f(x))$. Однако у ковариантных тензоров (например, векторных полей) нельзя разумным образом определить обратный образ.

Предложение 1. *Если $f : M \to N$ и $g : N \to P$ — гладкие отображения многообразий. Тогда $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, где f^*, g^* — операторы обратного образа в пространствах контравариантных k-тензоров на соответствующих многообразиях.*

Доказательство очевидно.

Множество $(T_x^*M)^{\otimes} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^{\infty}(T_x^*)^{\otimes k}M$ образует ассоциативную градуированную алгебру относительно операции тензорного умножения (тензорная алгебра пространства T_x^*M). Если рассматривать $\omega_1 \in (T_x^*)^{\otimes k}M$ и $\omega_2 \in (T_x^*)^{\otimes l}M$ как полилинейные формы на T_xM, то тензорное умножение задается правилом $(\omega_1 \otimes \omega_2)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \omega_1(v_1, \dots, v_k)\omega_2(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$.

Существует отображение $\mathrm{Alt} : (T_x^*)^{\otimes k}M \to \Lambda^k T_x^*M$, называемое альтернированием: $\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \varepsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$. Здесь $v_1, \dots, v_k \in T_xM$, Σ_k — группа перестановок k чисел $1, 2, \dots, k$, и $\varepsilon(\sigma) = \pm1$ — знак перестановки. Это отображение позволяет ввести на внешней алгебре $\Lambda T_x^*M = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k T_x^*M$ ассоциативное градуированное умножение: $\omega_1 \wedge \omega_2 = \mathrm{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2)$. Это умножение суперкоммутативно: $\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{kl}\omega_2\wedge\omega_1$, где $\omega_1 \in \Lambda^k, \omega_1 \in \Lambda^l$. Такими же алгебраическими структурами наделяются множество ковариантных тензоров и множество дифференциальных форм на многообразии M. В частности, функции $f \in C^\infty(M)$ можно считать 0-формами; по определению $f \wedge \omega = f\omega$.

Предложение 2. $f^*(\omega_1 \otimes \omega_2) = (f^*\omega_1) \otimes (f^*\omega_2)$ *для тензоров,* $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)$ *для форм.*

Доказательство. $f^*(\omega_1 \otimes \omega_2)(x)(v_1, \dots, v_{k+l}) = (\omega_1 \otimes \omega_2)(f(x))(f'(x)v_1, \dots, f'(x)v_{k+l}) =$
$= \omega_1(f(x))(f'(x)v_1, \dots, f'(x)v_k)\omega_2(f(x))(f'(x)v_{k+1}, \dots, f'(x)v_{k+l}) = f^*\omega \otimes f^*\omega_2$.
$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\mathrm{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2)) = \mathrm{Alt}(f^*(\omega_1 \otimes \omega_2)) = \mathrm{Alt}(f^*\omega_1 \otimes f^*\omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)$. □

Ранг расслоения $\Lambda^k T^*M \to M$ равен $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ при $k \le n \stackrel{\text{def}}{=} \dim M$ и нулю при $k > n$. В частности, расслоение $\Lambda^n T^*M$ имеет ранг 1.

Теорема 1. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *Многообразие M ориентируемо.*
2) *Существует n-форма ω (где $n = \dim M$), нигде не обращающаяся в нуль.*
3) *Расслоение $\Lambda^n T^*M \to M$ тривиально.*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$: пусть $\{(U_i, V_i, x_i)\}$ — ориентированный атлас на M, и $\{\varrho_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Положим $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_i x_i^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)$, где $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ — стандартная n-форма на $V_i \subset \mathbb{R}^n$; за пределы U_i продолжим форму ω_i нулем. Если $a \in U_i \cap U_j$, то $\omega_j(a) = \omega_i(a)\det\varphi_{ij}'(x_i(a))$, где $\varphi_{ij} = x_j \circ x_i^{-1}$ — отображение перехода, т.е. формы отличаются умножением на положительный множитель. Отсюда вытекает, что форма $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \omega_i$ нигде не обращается в нуль: в каждой точке это сумма конечного числа слагаемых, пропорциональных друг другу с положительным коэффициентом.

$2 \Longrightarrow 3$: выберем n-форму ω такую, что $\omega(a) \neq 0$ при всех $a \in M$. Поскольку $\dim \Lambda^n T_a^* M = 1$, для любого элемента $\nu \in \Lambda^n T_a^* M$ существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\nu = \alpha\omega(a)$. Возьмем в качестве координат ν координаты точки a плюс число α. Тогда отображения перехода расслоения $\Lambda^n T^* M$ будут иметь вид $(x, v) \mapsto (\varphi_{ij}(x), v)$, где φ_{ij} — отображения перехода многообразия M.

$3 \Longrightarrow 1$: пусть $f : M \times \mathbb{R} \to \Lambda^n T^* M$ — эквивалентность расслоений, а $\{(U_i, V_i, x_i)\}$ — атлас на M с линейно связными картами U_i. Функция $f(1)(\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}})$ не обращается в нуль (поскольку векторы $\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}(a) \in T_a M$ линейно независимы, а $f(1)$ — ненулевая кососимметрическая n-линейная форма на $T_a M$) и, следовательно, сохраняет свой знак на U_i. Если для какого-то i этот знак — отрицательный, то поменяем координаты $x_i^{(1)} \mapsto -x_i^{(1)}$; так что он станет положительным. Если $a \in U_i \cap U_j$, то $f(1)(\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i^{(n)}}) = \det \varphi'_{ij}(x_i(a)) f(1)(\frac{\partial}{\partial x_j^{(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_j^{(n)}})$. Отсюда вытекает, что $\det \varphi'_{ij}(x_i(a)) > 0$, то есть атлас ориентированный. □

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и $\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Интеграл $\int_U \omega$ равен, по определению, $\int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n$.

Предложение 3. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты, $D : U \to V$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, и ω — n-форма на V. Тогда $\int_V \omega = \int_U D^*\omega$.*

Доказательство. Пусть $\omega(x) = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, тогда $(D^*\omega)(y) = f(D(y)) \det D'(y)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$. Равенство $\int_V \omega = \int_U D^*\omega$ следует теперь из формулы замены перенной в кратном интеграле (D сохраняет ориентацию, так что $\det D'(y) > 0$, и знак модуля в этой формуле не нужен). □

Пусть теперь $\{(U_i, V_i, x_i)\}$ — ориентированный атлас на n-мерном многообразии M, и $\{\varrho_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Пусть ω — n-форма на M. Определим $\int_M \omega = \sum_i \int_{V_i} (x_i^{-1})^*(\varrho_i\omega)$.

Теорема 2. *Определение интеграла от формы по ориентированному многообразию корректно, то есть не зависит от выбора атласа и разбиения единицы.*

Доказательство. Пусть $\{(\tilde{U}_j, \tilde{V}_j, \tilde{x}_j)\}$ — другой атлас, и $\tilde{\varrho}_j$ — соответствующее разбиение единицы. Тогда $\sum_j \int_{\tilde{V}_j} (\tilde{x}_j^{-1})^*(\tilde{\varrho}_j\omega) = \sum_{i,j} \int_{\tilde{V}_j} (\tilde{x}_j^{-1})^*(\tilde{\varrho}_j \varrho_i\omega) = \sum_{i,j} \int_{\tilde{V}_{ji}} (\tilde{x}_j^{-1})^*(\varrho_i \tilde{\varrho}_j\omega)$, где $V_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} x_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$. Пусть $\varphi_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} x_j \circ x_i^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}$ — отображение перехода. Согласно предложениям 3 и 1, $\int_{\tilde{V}_{ji}} (\tilde{x}_j^{-1})^*(\varrho_i \tilde{\varrho}_j\omega) = \int_{V_{ij}} \varphi_{ij}^*(\tilde{x}_j^{-1})^*(\varrho_i \tilde{\varrho}_j\omega) = \int_{V_{ij}} \tilde{\varrho}_j (\tilde{x}_i^{-1})^*(\varrho_i\omega)$, откуда $\sum_{i,j} \int_{\tilde{V}_{ji}} (\tilde{x}_j^{-1})^*(\varrho_i \tilde{\varrho}_j\omega) = \sum_{i,j} \int_{\tilde{V}_{ij}} \tilde{\varrho}_j (\tilde{x}_i^{-1})^*(\varrho_i\omega) = \sum_i \int_{\tilde{V}_i} (\tilde{x}_i^{-1})^*(\varrho_i\omega)$. □

Следствие. *Пусть $f : M \to N$ — диффеоморфизм ориентированных n-мерных многообразий, сохраняющий ориентацию, и пусть ω — n-форма на N. Тогда $\int_M f^*\omega = \int_N \omega$.*

Пусть теперь $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; обозначим $\Omega^k(U) = \Gamma(\Lambda^k T^* U)$ множество k-форм на U. Определим *оператор внешнего дифференцирования* $d : \Omega^0(U) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(U) \to \Omega^1(U)$ равенством $df(x) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\, dx_p$, а для $k > 1$ оператор $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ определим формулой $d(f(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \stackrel{\text{def}}{=} df(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, а на общие k-формы продолжим по линейности.

Предложение 4. *Свойства оператора внешнего дифференцирования:*

1) *$d^2 = 0$.*
2) *Если $\omega_1 \in \Omega^k(U)$, $\omega_2 \in \Omega^l(U)$, то $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (d\omega_2)$.*
3) *Для любых открытых подмножеств $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ и всякого гладкого отображения $\varphi : V \to U$ имеет место равенство $d\varphi^* = \varphi^* d$, где $\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ — отображение взятия обратного образа.*

Доказательство. В силу линейности достаточно рассмотреть случай, когда $\omega = f(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Свойство 1: $d^2\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Поскольку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, а $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, члены в сумме попарно сокращаются.

Свойство 2: пусть $\omega_2 = g(x)\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$. Тогда $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(f(x)g(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} = (g(x)df(x) + f(x)dg(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$. На формы ω_1, ω_2 общего вида равенство распространяется по линейности.

Свойство 3: пусть $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))$. По определению, $(\varphi^* dx_i)(y)(\frac{\partial}{\partial y_j}) = dx_i(\varphi(y))(\varphi'(y)\frac{\partial}{\partial y_j}) = dx_i(\varphi(y))(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y)$, откуда $\varphi^* dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j$, и $d\varphi^* dx_i = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y_p \partial y_j} dy_j \wedge dy_p = 0$ (аналогично доказательству свойства 1).

Согласно предложению 2, $\varphi^*\omega(y) = f(\varphi(y))\,\varphi^*dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*dx_{i_k}$. Из свойства 2 и доказанного выше равенства $d\varphi^*dx_i = 0$ вытекает теперь, что $d\varphi^*\omega = d(f(\varphi(y))) \wedge \varphi^*dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^*dx_{i_k} = \varphi^*d\omega$. $\square$