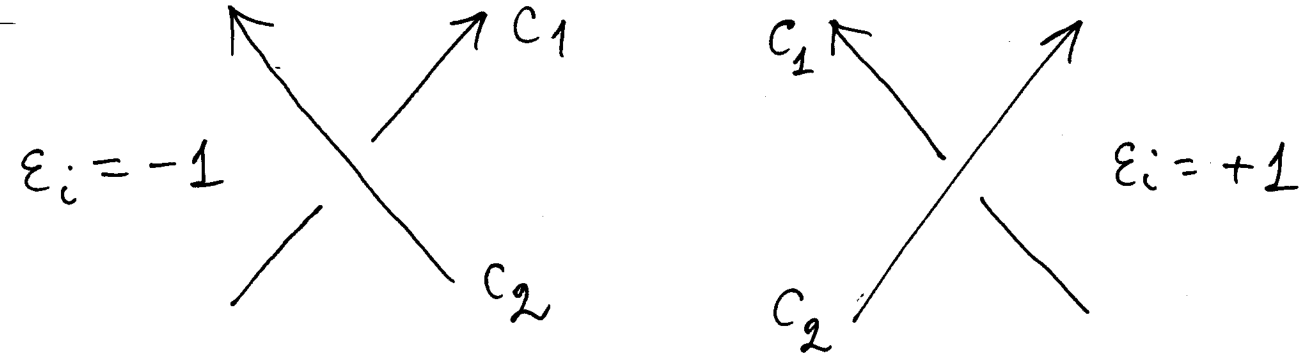

Рис. 1. Коэффициент зацепления

Листок 8. Степень отображения. Индекс пересечения (25 октября)

1. Пусть M^2 — сфера с g ручками, где $g \geqslant 1$. Докажите, что степень любого гладкого отображения $f : S^2 \to M^2$ равна нулю.

2. Докажите, что $\deg(fg) = (\deg f)(\deg g)$.

3. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n. Докажите, что отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $z \mapsto P(z)$, продолжается до гладкого отображения $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. Вычислите степень этого отображения.

4. Сопоставим отображению $f : S^n \to S^n$ отображение $\Sigma f : \Sigma S^n \to \Sigma S^n$, отображая $S^n \times \{t\}$ в $S^n \times \{t\}$ посредством f для всех t. Докажите, что $\deg f = \deg \Sigma f$.

5. Вычислите индекс пересечения по модулю 2 $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{R}P^m$ в $\mathbb{R}P^{n+m}$.

6. Вычислите целочисленный индекс пересечения $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{C}P^m$ в $\mathbb{C}P^{n+m}$.

7. Пусть $\lambda(M^p, N^q)$ — целочисленный индекс пересечения двух ориентированных подмногообразий в ориентированном $(p+q)$-мерном многообразии. Докажите, что
$\lambda(M^p, N^q) = (-1)^{pq}\lambda(N^q, M^p)$.

8. Докажите, что следующие определения *коэффициента зацепления* lk двух ориентированных замкнутых непересекающихся кривых c_1 и c_2 в $\mathbb{R}^3$ (или в S^3) эквивалентны с точностью до знака.

а) Рассмотрим проекцию данных кривых на плоскость в общем положении и будем учитывать только те перекрёстки, на которых кривая c_1 проходит под кривой c_2. Каждому перекрёстку соответствует число $\varepsilon_i = \pm 1$ (рис. 1). Коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(c_1, c_2)$ — это сумма всех чисел ε_i.

б) Натянем на кривую c_1 ориентированную поверхность C_1 (это означает, что краем ориентированной поверхности C_1 служит ориентированная кривая c_1). Коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(c_1, c_2)$ — это индекс пересечения поверхности C_1 и кривой c_2 в $\mathbb{R}^3$.

в) Рассмотрим диск D^4, краем которого служит данная сфера S^3. Натянем в D^4 на кривые c_1 и c_2 (ориентированные) поверхности C_1 и C_2. Коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(c_1, c_2)$ — это индекс пересечения поверхностей C_1 и C_2 в D^4.

г) Рассмотрим отображение $T^2 = c_1 \times c_2 \to S^2$, которое сопоставляет паре (x, y), где $x \in c_1$ и $y \in c_2$, точку $\dfrac{\overrightarrow{xy}}{|\overrightarrow{xy}|} \in S^2$. Коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(c_1, c_2)$ — это степень этого отображения.