ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

II курс, II семестр, 1995/96 уч.г.; лектор С.М.Гусейн–Заде.

Лекция N 8 (4 апреля 1996 г.)

Характеристические классы (векторных) расслоений.

Многообразию M^n соответствуют группы $H^\ell_{dR}(M^n)$ его когомологий де Рама. Элементы группы $H^\ell_{dR}(M^n)$ представлены замкнутыми дифференциальными ℓ–формами на многообразии M^n (определенными с точностью до форм точных). Гладкому отображению $f : M^n \to N^p$ соответствует отображение $f^* : H^\ell_{dR}(N^p) \to H^\ell_{dR}(M^n)$ групп когомологий в обратном направлении. Оказывается, что расслоениям (например, векторным) над многообразием M^n можно сопоставить некоторые выделенные элементы групп когомологий $H^\ell_{dR}(M^n)$ (т.е. — замкнутые дифференциальные формы), называемые характеристическими классами. Нашей ближайшей целью будет построение некоторых характеристических классов векторных расслоений с помощью связностей в них и соответствующих тензоров кривизны.

Предположим, что рассматриваются расслоения (скажем, гладкие) над гладкими многообразиями со слоем F и структурной группой G (например, векторные расслоения, т.е. — расслоения со слоем K^k ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) и структурной группой $GL(k, K)$). Пусть $Bund(M^n) = Bund_{F,G}(M^n)$ — множество классов изоморфизма таких расслоений над многообразием M^n.

Определение. Характеристическим классом c расслоений (со слоем F и структурной группой G) называется отображение множества $Bund(M^n)$ в группу когомологий $H^\ell_{dR}(M^n)$ с некоторым фиксированным ℓ ($E \mapsto c(E)$), определенное для всех многообразий M^n и обладающее следующим свойством функториальности (естественности):
(*) для гладкого отображения $f : M^n \to N^p$ и расслоения E над N^p имеет место равенство $c(f^*E) = f^*c(E)$ (f^*E — расслоение над многообразием M^n, индуцированное из расслоения E при помощи отображения f).

Замечание 1. Часто вместо одной группы когомологий $H^\ell_{dR}(M^n)$ рассматривают прямую сумму $H^*_{dR}(M^n) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} H^\ell_{dR}(M^n)$ и характеристическим классом называют отображение $Bund(M^n)$ в $H^*_{dR}(M^n)$. Такое определение позволяет придать смысл сумме и произведению характеристических классов (даже со значениями в группах когомологий различных размерностей).

Замечание 2. Мы ограничиваемся характеристическими классами рассслоений над многообразиями только потому, что мы знаем группы когомологий де Рама, которые определены только для многообразий. В действительности, характеристические классы определяются для векторных расслоений над произвольными пространствами (впрочем, естественно, над достаточно хорошими, например, над клеточными комплексами).

Начнем со случая одномерных векторных расслоений. Уже в этом случае получается описание нетривиального и важного инварианта (правда, только для комплексных расслоений). Пусть $E = (E, p)$ — векторное расслоение над многообразием M^n ($p : E \to M^n$). Функции перехода $\psi_{\alpha\beta}$ (в координатном описании $\{U_\alpha, \psi_{\alpha\beta}\}$ расслоения E) принимают значения в группе $GL(1, K)$, совпадающей с группой (по умножению) K^* ненулевых элементов поля K (${}^{(\alpha)}s = \psi_{\alpha\beta} \cdot {}^{(\beta)}s$). Здесь номера координат сечения s и матричных элементов оператора $\psi_{\alpha\beta}$ принимают только одно значение (1) и поэтому опущены (хотя это и лишает нас некоторых удобств, связанных с использованием тензорных обозначений). Выберем в расслоении E какую–либо связность (в лекции 4 было показано, что в любом векторном расслоении существует некоторая связность). Оператор ${}^{(\alpha)}\Omega_k = {}^{(\alpha)}\Omega(\frac{\partial}{\partial x^k})$ (матричные элементы, которого являются коэффициентами связности), является функцией на координатной области U_α со значениями в пространстве $L(1) = K$ линейных операторов на одномерном пространстве K^1. Поэтому мы будем опускать индексы i и j в обозначении ${}^{(\alpha)}\Omega^i_{jk}$ его матричных элементов, а также одноименные индексы в обозначении $R^i_{jk\ell}$ матричных элементов соответствующего тензора кривизны. Имеем

$$R_{k\ell} = \frac{\partial^{(\alpha)}\Omega_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial^{(\alpha)}\Omega_\ell}{\partial x^k} \tag{1}$$

(члены с произведениями коэффициентов связности взаимно сокращаются).

Оператор (в нашем случае — число) $\Omega = {}^\alpha\Omega$ является линейной функцией на касательном пространстве $T_{x_0}M^n$ в каждой точке координатной области U_α, т.е. — дифференциальной 1–формой на U_α: $\omega_\alpha = {}^\alpha\Omega_k dx^k$ (форма ω_α называется формой связности).

Замечание. Форма связности ω_α зависит (**!**) от тривиализации расслоения E над областью U_α. При замене тривиализации она преобразуется по правилу, определяемому правилом преобразования коэффициентов связности (см. следующий абзац).

В рассматриваемом случае (одномерного расслоения) правило замены коэффициентов связности при переходе от карты U_α к карте U_β выглядит следующим образом:

$$^{(\beta)}\Omega_k = {}^{(\alpha)}\Omega_k + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x^k}. \tag{2}$$

В терминах форм связности формула (2) имеет вид:

$$\omega_\beta = \omega_\alpha + d(\ln\, \psi_{\alpha\beta}) \tag{3}$$

(функция $\ln\, \psi_{\alpha\beta}$ определена, конечно, только локально и то с точностью до константы, однако ее дифференциал является корректно определенной 1–формой).

Тензор кривизны $R_{k\ell}$ является кососимметрической функцией от пары касательных векторов, т.е. — дифференциальной 2–формой: $\rho = R_{k\ell} dx^\ell \wedge dx^k$. Форма ρ называется формой кривизны связности.

Замечание. В отличие от формы связности ω_α форма кривизны ρ корректно определена, т.е. не зависит от (локальной) тривиализации расслоения.

В терминах соответствующих дифференциальных форм формула (1) означает равенство $\rho = d\,\omega_\alpha$ (из формулы (3) следует, что $d\,\omega_\beta = d\,\omega_\alpha$). (**Замечание.** В определении формы кривизны мы писали $dx^\ell \wedge dx^k$, а не $dx^k \wedge dx^\ell$ (что, видимо, выглядит более естественным) именно для того, чтобы форма кривизны была равна дифференциалу от формы связности, а не отличалась от него знаком.) Отсюда следует, что ρ — замкнутая форма: $d\rho = 0$ (точной форма ρ, вообще говоря, не является: равенство $\rho = d\,\omega_\alpha$ имеет место только в пределах области U_α). Таким образом, форме ρ соответствует элемент $[\rho]$ группы $H^2_{dR}(M^n)$ (двумерных) когомологий многообразия M^n.

Теорема 1. Элемент $[\rho] \in H^2_{dR}(M^n)$ не зависит от выбора связности в расслоении E.

Доказательство. Пусть в расслоении E имеются две связности, определяемые формами связности ω'_α и ω''_α соответственно. Из равенства (3) вытекает, что $\omega''_\alpha - \omega'_\alpha = \omega''_\beta - \omega'_\beta$. Следовательно, разность

$\omega_\alpha'' - \omega_\alpha'$ является корректно определенной 1–формой на многообразии M^n. Если ρ' и ρ'' — формы кривизны соответствующие рассматриваемым связностям, то $\rho'' - \rho' = d(\omega_\alpha'' - \omega_\alpha')$. Таким образом, разность $\rho'' - \rho'$ форм кривизны точна и $[\rho''] = [\rho']$ в группе когомологий $H^2_{dR}(M^n)$, что и требовалось доказать.

Тем самым для всякого одномерного векторного расслоения над многообразием M^n корректно определен элемент $[\rho]$ группы $H^2_{dR}(M^n)$ двумерных когомологий де Рама M^n. Можно показать, что это соответствие обладает свойством функториальности (*) (**Докажите!**) и тем самым определяет характеристический класс $c = c(E)$ одномерных векторных расслоений. Нетрудно видеть, что для (одномерных) вещественных расслоений этот характеристический класс тривиален, т.е. тождественно равен нулю. (**Докажите!**) Для комплексных расслоений класс $c(E)$, вообще говоря, не равен нулю.

В качестве примера рассмотрим расслоения над двуменой сферой S^2. Вторая группа когомологий $H^2_{dR}(S^2)$ двумерной сферы S^2 (с комплексными коэффициентами) изоморфна комплексной прямой $\mathbf{C}$. Изоморфизм определяется тем, что замкнутой 2–форме $\varkappa$ на сфере S^2 соответствует число

$$\int_{S^2} \varkappa \in \mathbf{C}.$$

Множество классов изоморфизма одномерных комплексных векторных расслоений над сферой S^2 находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathbf{Z}$ целых чисел. При таком (естественном) соответствии образующей (± 1) группы $\mathbf{Z}$ соответствует (векторное) расслоение Хопфа (структурной группой которого является окружность $S^1 \cong U(1) \subset GL(1, \mathbf{C})$). Расслоение Хопфа (векторное) может быть описано следующим образом. Отождествим двумерную сферу S^2 с комплексной проективной прямой $\mathbf{C}P^1$, являющейся проективизацией комплексной плоскости $\mathbf{C}^2$. Точке $z = (z^0 : z^1) \in \mathbf{C}P^1$ соответствует прямая $L_z = \{x = (x^0, x^1) \in \mathbf{C}^2 : z^0x^1 - z^1x^0 = 0\} \subset \mathbf{C}^2$. Пусть $E = \{(z, x) \in \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2 : x \in L_z\} = \{(z, x) \in \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2 : z^0x^1 - z^1x^0 = 0\} \subset \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2$, $p : E \to \mathbf{C}P^1 \cong S^2$ — естественная проекция. Нетрудно видеть, что (E, p) является векторным расслоением. Соответствующее главное расслоение совпадает с (обычным) расслоением Хопфа $S^3 \to S^2$ (со слоем S^1). Расслоение (E, p) называется векторным расслоением Хопфа.

Пусть $\{U_0, U_1\}$ — покрытие проективной прямой $\mathbf{C}P^1$ областями $U_j = \{z \in \mathbf{C}P^1 : z^j \neq 0\}$ $(j = 0, 1)$. Координатами на области U_j являются u^j и v^j, где $(u^j + iv^j) = z_{(j)}$ $(i = \sqrt{-1})$, $z_{(0)} = z^1/z^0$, $z_{(1)} = z^0/z^1$. Тривиализации Φ_j расслоения $p : E \to \mathbf{C}P^1$ над областями U_j могут быть заданы формулами $\Phi_0(z_0 : z_1, t) = (z_0 : z_1, t(1, z_1/z_0))$, $\Phi_1(z_0 : z_1, t) = (z_0 : z_1, t(z_0/z_1, 1))$. Тем самым $\psi_{01}(z_0 : z_1) = z_0/z_1 = z_{(1)} = z_{(0)}^{-1}$.

Связность в расслоении Хопфа (E, p) можно построить следующим образом. Пусть $V_j \subset U_j$ — (замкнутые) координатные области, определяемые неравенствами $z_{(j)} \leq 2$ $(j = 0, 1)$. Над областью V_0 определим связность, например, тривиальным (по отношению к соответствующей тривиализации) образом, т.е. положим $\omega_0 = 0$. В $V_0 \cap V_1$ имеем

$$\omega_1 = d(\ln(z_0/z_1)) = d(\ln\, z_{(1)}).$$

Продолжим форму ω_1 на область V_1 произвольным гладким (но, конечно, не комплексно аналитическим) способом. Для вычисления характеристического класса нам надо вычислить интеграл формы ρ ($d\omega_j$ в области V_j) по сфере S^2. В области V_0 форма ρ тождественно равна нулю и, следовательно,

$$\int_{S^2} \rho = \int_{V_1} d\omega_1 = \int_{D_1} d\omega_1,$$

где $D_1 = \{z_{(1)} \in V_1 : |z_{(1)}| \leq 1\}$ — единичный диск. В соответствии с формулой Стокса (в данном случае — Грина)

$$\int_{D_1} d\omega_1 = \int_{S_1} \omega_1$$

$(S_1 = \partial D_1)$. Последний интеграл легко вычисляется и равен $2\pi i$.

Замечание. Приведенные вычисления сделаны в терминах записи дифференциальных форм на комплексно аналитическом многообразии как форм от комплексных координат на нем и комплексно сопряженных к ним (разбиравшейся в первом семестре).

Определение. Характеристический класс $c_1(E) = \frac{c(E)}{-2\pi i} \in H^2_{dR}(M^n)$ называется первым классом Черна одномерного комплексного векторного расслоения E над многообразием M^n.

Замечание. В некоторых старых (советских) книгах и статьях описанный характеристический класс назывался классом Чженя. Черн — английское (или американское) прочтение китайской фамилии Чжень.

В соответствии с определением первый класс Черна $c_1(E)$ расслоения Хопфа E равен (-1) (при естественном отождествлении $H^2_{dR}(S^2)$ с группой $\mathbf{C}$).

Задача 1. Вычислить первый класс Черна тензорной степени расслоения Хопфа.

Задача 2. Пусть E_1 и E_2 — два одномерных комплексных векторных расслоения над многообразием M^n. Вычислить класс Черна их тензорного произведения $E_1 \otimes E_2$.

Задача 3. Доказать, что первый класс Черна любого одномерного комплексного векторного расслоения над линейно связной замкнутой (т.е. — компактной, без края) поверхностью M^2 — целочисленный, т.е. принадлежит группе $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ при естественном отождествлении $H^2_{dR}(M^2)$ с группой $\mathbf{C}$).

Лекция N 9 (11 апреля 1996 г.)

Первый класс Черна произвольного векторного расслоения.

С помощью тензора кривизны связности для произвольного d–мерного комплексного векторного расслоения E над многообразием M^n могут быть определены некоторые характеристические классы $c_k(E) \in H^{2k}_{dR}(M^n)$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$, называемые классами Черна. Их построение (точнее, доказательство корректности определения) требует определенных технических вычислений. Ограничимся пока случаем первого класса Черна $c_1(E) \in H^2_{dR}(M^n)$.

Для d–мерного комплексного векторного расслоения E над многообразием M^n тензоры связности ${}^{\alpha}\Omega^i_{jk}$ (определенные только на координатных окрестностях U_α для фиксированных тривиализаций расслоения над ними) и тензор кривизны R^i_{jkl} (определенный глобально) естественным образом могут рассматриваться как дифференциальные формы ω_α и ρ со значениями в (линейном) пространстве $L(d, C)$ (комплексных) матриц размера $d \times d$: $\omega_\alpha = {}^{\alpha}\Omega^{\bullet}_{\bullet k} dx^k$, $\rho = R^{\bullet}_{\bullet k\ell} dx^\ell \wedge dx^k$. Формула, выражающая тензор кривизны в терминах коэффициентов связности, (Лекция 6) может быть записана в виде

$$\rho(X, Y) = d\omega_\alpha(X, Y) + [\omega_\alpha(X), \omega_\alpha(Y)]$$

для любых касательных векторов X и Y (в одной и той же точке, конечно).

Замечание. Указанное равенство имеет место при предположении, что значение дифференциальной формы $dx \wedge dy$ на паре векторов $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ полагается равным 1. В ряде учебников (в том числе — в большинстве учебников по дифференциальной геометрии) считается, что это значение равно 1/2. В этом случае перед последним слагаемым следует поставить коэффициент (1/2).

Пусть $\widetilde{\omega}_\alpha = \operatorname{tr}\omega_\alpha$, $\widetilde{\rho} = \operatorname{tr}\rho$, где $\operatorname{tr} A$ — след оператора A. $\widetilde{\omega}_\alpha$ и $\widetilde{\rho}$ являются обычными (т.е. — численнозначными) дифференциальными формами. При этом $\widetilde{\rho} = d\widetilde{\omega}_\alpha$, откуда следует, что форма $\widetilde{\rho}$ является замкнутой. Точно так же, как в предыдущей лекции для одномерных расслоений, доказывается, что класс $[\widetilde{\rho}]$ формы $\widetilde{\rho}$ в группе $H^2_{dR}(M^n)$ когомологий де Рама корректно определен.

Определение. Характеристический класс $c_1(E) = \frac{[\rho]}{-2\pi i} \in H^2_{dR}(M^n)$ называется первым классом Черна комплексного векторного расслоения E над многообразием M^n.

Задача 1. Доказать, что $c_1(E)$ действительно является характеристическим классом (т.е. обладает свойством функториальности).

Задача 2. Пусть E_1 и E_2 — два комплексных векторных расслоения над многообразием M^n. Вычислить класс Черна их прямой суммы $E_1 \oplus E_2$.

Задача 3. d–мерному расслоению E над многообразием M^n соответствует его внешняя d-ая степень $\bigwedge^d E$, которая является одномерным расслоением. Вычислить первый класс Черна расслоения $\bigwedge^d E$.

Пусть c — некоторый n–мерный характеристический класс, E — векторное расслоение над n — мерным многообразием M^n. Корректно определен интеграл элемента $c(E) \in H^n_{dR}(M^n)$ (или, правильнее, — соответствующей дифференциальной n–формы) по многообразию M^n. Получающееся таким образом число называется характеристическим числом (расслоения E).

Задача. (Решение следует дать в терминах, которые будут описаны в следующей лекции.) Пусть M^n и N^n — гладкие ориентированнные связные многообразия одинаковой размерности, f — отображение M^n в N^n, E — векторное расслоение над многообразием N^n, c — некоторое характеристическое число (соответствующих расслоений). Описать связь между характеристическими числами $c(E)$ и $c(f^*E)$ расслоения E и индуцированного из него.

Опишем построение некоторых характеристических классов (или, точнее — характеристических чисел) векторных расслоений, исходя из несколько других соображений.

Трансверсальность.

Пусть M^n, N^p — гладкие многообразия, L^q — подмногообразие в N^p, f — гладкое отображение $M^n \to N^p$, x — точка из M^n, для которой $f(x) \in L^q$.

Определение 1. Говорят, что отображение f трансверсально к подмногообразию L^q в точке x (обозначение $f \pitchfork_x L^q$), если $T_{f(x)}N^p = T_{f(x)}L^q + f_* T_x M^n$.

Определение 2. Говорят, что отображение f трансверсально к подмногообразию L^q (обозначение $f \pitchfork L^q$), если для любой точки $x \in M^n$ с $f(x) \in L^q$ отображение f трансверсально к подмногообразию L^q в точке x.

Замечание. В случае, если $n > (p-q)$, отображение $f : M^n \to N^p$ трансверсально к подмногообразию $L^q \subset N^p$ тогда и только тогда, когда образ $f(M^n)$ отображения f не пересекается с L^q.

Пример. Пусть $q = 0$, L^q — точка $y \in N^p$. Трансверсальность отображения $f : M^n \to N^p$ к точке y означает, что y является регулярным значением отображения f (см. Определение 3 ниже).

Теорема 1. Если отображение $f : M^n \to N^p$ трансверсально к подмногообразию L^q, то прообраз $f^{-1}(L^q)$ многообразия L^q является подмногообразием в M^n размерности $n - (p - q)$.

Замечание. Предполагается, что многообразие отрицательной размерности — это пустое множество, а само пустое множество является многообразием произвольной размерности.

Теорема 1 является следствием (многомерной) теоремы о неявной функции. **Докажите ее.**

Пусть многообразие M^n компактно.

Теорема 2. Отображения $M^n \to N^p$, трансверсальные к L^q, образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве всех отображений $M^n \to N^p$.

Замечание. Пространство отображений $M^n \to N^p$ рассматривается с топологией, в которой близость отображений означает их близость со всеми производными вплоть до любого фиксированного (конечного) порядка.

Теорема 2 выводится из, так называемой теоремы (или леммы) Сарда (которую мы докажем в следующий раз).

Определение 3. Точка $x \in M^n$ является регулярной точкой отображения $f : M^n \to N^p$, если $\mathrm{rk}\, df(x) = p$. Точка $x \in M^n$ является нерегулярной точкой отображения, если она не является регулярной, т.е. если $\mathrm{rk}\, dF(x) < p$. Точка $y \in N^p$ является нерегулярным значением отображения F, если она является образом нерегулярной точки. Точка $y \in N^p$ является регулярным значением отображения F, если она не является его нерегулярным значением.

Замечания. 1) Если $n < p$, то все точки многообразия M^n являются нерегулярными.
2) Для $N^p = \mathbf{R}$ (т.е. для функций) регулярные точки и значения совпадают с критическими.
3) Пусть $f : M^n \to N^p$, $x_0 \in M^n$, $y_0 = f(x_0) \in L^q \subset N^p$, $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^p)$ — такие локальные координаты в окрестностях U и V точек x_0 и y_0 соответственно, что $L^q \cap V = \{y \in V : y^j = 0 \text{ при } j > q\}$. Пусть $\pi : V \to \mathbf{R}^{p-q}$ — проекция $\pi(y) = (y^{q+1}, \ldots, y^p)$. В этих координатах отображение f задается набором из p функций: $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^p(x))$, а его дифференциал df — матрицей (f^j_i), где $f^j_i = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$. Нетрудно видеть, что трансверсальность отображения f к подмногообразию L^q в точке x_0 эквивалентна регулярности отображения $\pi \circ f$ в точке x_0, т.е. выполнению условия

$$\mathrm{rk} \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_{i=1,\ldots,n}^{j=q+1,\ldots,p} = p - q.$$

Напомним понятие свойства, имеющего место "почти всюду". Существует несколько вариантов понимания этого термина. Для наших целей мы будем использовать следующее.

Определение. Пусть N^p — многообразие. Мы будем говорить, что некоторое свойство его точек имеет место почти всюду, если оно имеет место для всех точек из счетного пересечения открытых всюду плотных множеств в N^p.

Лемма 1. Если свойство имеет место почти всюду, то в любом открытом множестве (и, в частности, в любой окрестности любой точки) имеются точки, обладающие этим свойством.

Лемма 2. Если каждое из счетного числа свойств имеет место почти всюду, то и все они одновременно имеют место почти всюду.

Доказательства очевидны.

Теорема 3 (лемма Сарда). Пусть $f : M^n \to N^p$ — гладкое отображение. Тогда почти все точки многообразия N^p являются регулярными значениями для f, т.е. свойство точки $x \in N^p$ быть регулярным значением f имеет место почти всюду.

Замечания. 1) Здесь термин "гладкое" применительно к отображению означает "достаточно гладкое", причем требуемый порядок гладкости зависит от размерностей n и p прообраза и образа. Именно, необходимо и достаточно, чтобы отображение F было класса C^k с $k \geq \max(1, n - p + 1)$. Доказательство теоремы Сарда в такой формулировке технически сложно. Мы докажем ее для бесконечно дифференцируемых отображений.
2) При $n < p$ теорема Сарда утверждает, что образ гладкого отображения многообразия меньшей размерности в многообразие большей размерности не может покрывать никакое открытое множество (гладких кривых Пеано не бывает).
3) Если многообразие M^n компактно, то, как нетрудно видеть, множество регулярных значений отображения $f : M^n \to N^p$ открыто в N^p.

Доказательство теоремы 2 (вывод из леммы Сарда). Открытость множества отображений $M^n \to N^p$, трансверсальных к подмногообразию $L^q \subset N^p$, (при условии компактности многообразия M^n) очевидна. Докажем, что для любого (бесконечно) гладкого отображения $f : M^n \to N^p$ существует сколь угодно близкое к нему отображение, трансверсальное к L^q. Для каждой точки $x_0 \in f^{-1}(L^q)$ существуют такие локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^p)$, в окрестностях точек x_0 и $y_0 = f(x_0)$ соответственно, что $L^q \cap V = \{y : y^j = 0 \text{ при } j > q\}$. Пусть $U(x_0)$ и $V(x_0)$ — открытые шаровые (в указанных координатах) окрестности точки x_0, для которых замыкание $\overline{V(x_0)}$ области $V(x_0)$ содержится в $U(x_0)$ (и такие, что образ $U(x_0)$ лежит внутри некоторой координатной окрестности на N^p). Поскольку $\{V(x_0)\}$ — открытое покрытие (компактного) многообразия M^n, из него можно выбрать конечное покрытие $\{V_k\}$ $k = 1, \ldots, N$. Пусть U_k — соответствующие окрестности $U(x_0)$, φ_k — бесконечно дифференцируемая функция на многообразии M^n, тождественно равная единице на некоторой окрестности множества $\overline{V_k}$ и тождественно равная нулю на некоторой окрестности дополнения к области U_k. Предположим, что отображение f трансверсально к подмногообразию L^q во всех точках из $\bigcup\limits_{k=1}^{k_0-1} \overline{V}_k$ и построим близкое отображение, трансверсальное также и в точках $\overline{V}_{k_0}$. Пусть в соответствующих координатах $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^p(x))$, $\pi(y) = (y^{q+1}, \ldots, y^p)$. Рассмотрим отображение $\pi \circ f$ области U_{k_0} в $\mathbf{R}^{p-q}$. Пусть $z = (z^{q+1}, \ldots, z^p)$ — его достаточно малое (близкое к началу координат) регулярное значение, $z' = (0, \ldots, 0, z^{q+1}, \ldots, z^p) \in \mathbf{R}^p$. Тогда отображение $f' : U_{k_0} \to \mathbf{R}^p$, определяемое формулой $f'(x) = f(x) - z'$, трансверсально к $L^q \cap V = \{y : y^j = 0 \text{ при } j > q\}$. Нетрудно видеть, что требуемое отображение $\tilde{f} : M^n \to N^q$ может быть определено следующим образом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) - \varphi_{k_0}(x) \cdot z' & \text{для } x \in U_{k_0}, \\ f(x) & \text{для } x \notin U_{k_0}. \end{cases}$$