ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ «ГЕОМЕТРИЯ»
НМУ, ОСЕНЬ 2017 Г.

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{k}$, причём $n \geqslant 2$.

а) Докажите, что если $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$ (поле из двух элементов), то в V можно найти $n+1$ векторов, любые n из которых линейно независимы, но нельзя найти $n+2$ векторов, любые n из которых линейно независимы.

б) Докажите, что если $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ (вещественные числа), то для любого $N \geqslant n$ в V найдётся N векторов, любые n из которых линейно независимы.

2. Рассмотрим две плоскости в $\mathbb{R}^4$:

$$\pi_1 = (0,0,1,0) + \langle (1,0,0,0), (1,0,1,0) \rangle,$$
$$\pi_2 = (1,1,0,0) + \langle (0,0,1,-1), (0,0,0,1) \rangle.$$

а) Выясните какой из случаев взаимного расположения имеет место для π_1 и π_2: совпадают, пересекаются по прямой, пересекаются в точке, скрещиваются по точке (не пересекаются и не параллельны никакой прямой), скрещиваются по прямой (параллельны одной прямой, но не параллельны плоскости), параллельны.

б) Найдите расстояние между π_1 и π_2.

3. Рассмотрим аффинную изометрию трёхмерного пространства:

$$(x, y, z) \mapsto (y + 1, z - 1, -x + 1).$$

а) Выясните, к какому из трёх типов (винтовое движение, скользящая симметрия, поворот с переворотом) принадлежит данная изометрия.

б) Найдите канонический вид данной изометрии и систему координат, в которой изометрия имеет канонический вид.

в) Представьте данную изометрию в виде композиции не более трёх отражений в гиперплоскостях, явно указав уравнения этих гиперплоскостей в исходной системе координат.

4. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ — попарно различные точки в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует такой вектор $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, что для любого $b \in \mathbb{R}$ гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle + b = 0\}$ содержит не более одной из точек $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.

5. **а)** Докажите, что для любого замкнутого выпуклого множества C и точки $\boldsymbol{y} \notin C$ существует такая гиперплоскость H, что C и $\boldsymbol{y}$ содержатся в разных открытых полупространствах, задаваемых H.

б) Докажите, что для любых непересекающихся замкнутых ограниченных выпуклых множеств C_1 и C_2 существует такая гиперплоскость H, что C_1 и C_2 содержатся в разных открытых полупространствах, задаваемых H.

в) Верно ли утверждение пункта б) без предположения об ограниченности?

6. Докажите, что любой n-мерный выпуклый многогранник можно получить как сечение симплекса $\varDelta^N$ размерности $N \geqslant n$ некоторой n-мерной плоскостью.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. а) В качестве $n+1$ векторов можно взять $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_n$, где $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — любой базис. Набор из $n+2$ векторов с требуемым свойством должен содержать такой поднабор из $n+1$ векторов (для некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$). Оставшийся $(n+2)$-й вектор должен иметь в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ хотя бы одну нулевую координату, что даёт противоречие.

б) Рассмотрим N различных чисел $t_1, \ldots, t_N$. Тогда векторы $\boldsymbol{v}_i = (1, t_i, t_i^2, \ldots, t_i^{n-1})$, $i = 1, \ldots, N$, обладают нужным свойством (это следует из тождества для определителя Вандермонда).

2. Обозначим $\pi_1 = P_1 + U_1$, где $P_1 = (0,0,1,0)$ и $U_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \rangle$, и $\pi_2 = P_2 + U_2$, где $P_2 = (1,1,0,0)$ и $U_2 = \langle \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4 \rangle$. Ясно, что $U_1 \cap U_2 = \langle \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $U_1 + U_2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \rangle$ и $\overline{P_1 P_2} = (1,1,-1,0) \notin U_1 + U_2$. Поэтому плоскости скрещиваются по прямой, а расстояние вычисляется как длина проекции вектора $\overline{P_1 P_2}$ на $(U_1 + U_2)^\perp = \langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$:

$$d(\pi_1, \pi_2) = (\overline{P_1 P_2}, \boldsymbol{e}_2) = 1.$$

3. Данная изометрия имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+1 \\ z-1 \\ -x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. представляет собой композицию ортогонального оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и сдвига на вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вначале найдём канонический вид ортогонального оператора $\mathcal{A}$. Из подсчёта определителя ясно, что этот оператор — несобственный. Так как он действует в трёхмерном пространстве, существует собственный вектор $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$. Решая соответствующую систему линейных уравнений, находим $\boldsymbol{v} = (1, -1, 1)$. Соответствующий вектор единичной длины

$$\boldsymbol{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

будет третим вектором базиса, в котором оператор имеет канонический вид. Дополняя $\boldsymbol{e}_3'$ до ортонормированного базиса, найдём два других вектора нового базиса, например,

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \quad \boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2).$$

В новом базисе $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ оператор $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т. е.

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти φ, определим, на какой угол поворачивается вектор $\boldsymbol{e}_1'$:

$$\cos\varphi = (A\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_1') = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right) = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\varphi = (A\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2') = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Итак, оператор $\mathcal{A}$ — композиция поворота на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ в плоскости $(\boldsymbol{e}_3')^\perp$ и отражения в этой плоскости. Так как $\varphi \neq 0$, исходная изометрия — также поворот с переворотом.

Матрица перехода от $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ есть

$$C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^t.$$

В системе координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

исходная изометрия имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto C^{-1}AC \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить канонический вид, осталось сделать сдвиг начала координат: $x' = x''$, $y' = y''$, $z' = z'' + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Окончательно имеем систему координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

в которой исходная аффинная изометрия имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

(поворот с переворотом).

Чтобы разложить изометрию в композицию отражений, вначале заметим следующее. Поворот на угол φ является композицией симметрии относительно прямой $(\sin\frac{\varphi}{2})x - (\cos\frac{\varphi}{2})y = 0$ под углом $\frac{\varphi}{2}$ к оси абсцисс и симметрии относительно прямой $(\sin\varphi)x - (\cos\varphi)y = 0$ под углом φ к оси абсцисс:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Поэтому в системе координат (x'', y'', z'') наша аффинная изометрия с $\varphi = \frac{\pi}{3}$ раскладывается в композицию

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

отражения в гиперплоскости $z'' = 0$, отражения в гиперплоскости $\frac{1}{2}x'' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'' = 0$ и отражения в гиперплоскости $\frac{\sqrt{3}}{2}x'' - \frac{1}{2}y'' = 0$.

Чтобы найти уравнения этих гиперплоскостей в исходной системе координат, найдём обратную замену:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y + \frac{1}{2} \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x - y - 2z) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y + z - \frac{3}{2}) \end{pmatrix}$$

Ответ.

а) Поворот с переворотом: композиция поворота на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ вокруг точки $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ в плоскости $x - y + z - \frac{3}{2} = 0$ и отражения в этой плоскости.

б) В системе координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

данная аффинная изометрия имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

в) Данная аффинная изометрия есть композиция отражений в плоскостях $x - y + z - \frac{3}{2} = 0$, $y + z = 0$, $x + 2y + z = 0$.

4. Если $H(\boldsymbol{a}, b)$ содержит две точки $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_j$, то имеем $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \rangle = 0$. Так как векторов вида $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j$ конечное число, задача сводится к следующей: для данного набора ненулевых векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ найти такой $\boldsymbol{a}$, что $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_i \rangle \neq 0$ для любого i. В геометрических терминах, необходимо доказать, что для любого конечного набора гиперплоскостей найдётся точка, не принадлежащая ни одной из них. Это легко доказывается по индукции, на основе следующего утрверждения: если U — непустое открытое множество в аффинном пространстве и H — гиперплоскость, то множество $U \setminus H$ также непусто и открыто.

5. а) Воспользуемся тем, что C есть пересечение своих опорных полупространств. Так $\boldsymbol{y} \notin C$, найдётся такая опорная гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b) = \{\boldsymbol{x} \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle + b = 0\}$, что $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle + b \leqslant 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in C$, а $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} \rangle + b > 0$. Выберем малое $\varepsilon > 0$, для которого по-прежнему $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} \rangle + b - \varepsilon > 0$. Тогда $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle + b - \varepsilon < 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in C$. Тогда $H(\boldsymbol{a}, b - \varepsilon)$ — требумая гиперплоскость.

б) Рассмотрим разность Минковского $C := C_1 - C_2$, которая также будет выпуклым компактом (замкнутым и ограниченным). Так как $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, имеем $\mathbf{0} \notin C$. Применив предыдущее рассуждение к C и $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, получим, что найдётся такая гиперплоскость $H(\boldsymbol{a}, b)$, что $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \rangle + b \leqslant 0$ для любых $\boldsymbol{x}_1 \in C_1$ и $\boldsymbol{x}_2 \in C_2$, а $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} \rangle + b = b > 0$. Отсюда получаем

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + b \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + b < \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 \rangle + b$$

для любых $\boldsymbol{x}_1 \in C_1$ и $\boldsymbol{x}_2 \in C_2$. Положим

$$M := \max_{\boldsymbol{x}_1 \in C_1} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + b, \quad m := \min_{\boldsymbol{x}_2 \in C_2} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 \rangle + b.$$

Тогда

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + b \leqslant M < m \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 \rangle + b,$$

откуда

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 \rangle + b - \tfrac{M+m}{2} < 0 < \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2 \rangle + b - \tfrac{M+m}{2}$$

для любых $\boldsymbol{x}_1 \in C_1$ и $\boldsymbol{x}_2 \in C_2$. Тогда $H(\boldsymbol{a}, b - \frac{M+m}{2})$ — требумая гиперплоскость.

в) Неверно. В качестве контрпримера можно взять.

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leqslant 0\} \quad \text{и} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ xy \geqslant 1\}.$$

6. Пусть многогранник P задан как пересечение полупространств:

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

Рассмотрим аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} \mapsto (\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x} \rangle + b_1, \ldots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x} \rangle + b_m).$$

Так как $\dim P = n$, отображение i_P инъективно (среди нормалей $\boldsymbol{a}_i$ к гиперграням, сходящимся в одной вершине, содержится базис). Имеем

$$i_P(P) = i_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant},$$

т. е. образ многогранника при отображении i_P есть пересечение n-мерной плоскости $i_P(\mathbb{R}^n)$ с гиперквадрантом $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0\}$. Так как $i_P(P)$ ограничено, можно считать, что $i_P(P)$ содержится в большом симплексе

$$\Delta^m(N) = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0,\ y_1 + \ldots + y_m \leqslant N\}.$$

Таким образом, $i_P(P)$ есть сечение симплекса $\Delta^m(N)$ плоскостью $i_P(\mathbb{R}^n)$. Так как $i_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ инъективно, оно является ограничением на n-мерную плоскость некоторого аффинного преобразования (изоморфизма) $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Тогда P есть сечение симплекса $f^{-1}(\Delta^m(N))$ некоторой n-мерной плоскостью.

1 а) 4 балла
1 б) 7 баллов
2 а) 3 балла
2 б) 3 балла
3 а) 5 баллов
3 б) 8 баллов
3 в) 8 баллов
4 15 баллов
5 а) 11 баллов
5 б) 11 баллов
5 в) 5 баллов
6 20 баллов
Итого: 100 баллов