А. Л. Городенцев

ГЕОМЕТРИЯ

(годовой курс, НМУ, 1 курс, 2016/17 уч. год)

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

- **Пространства $\mathbb{R}^n$ с маленькими $n = 1, 2, 3$.** Точки и векторы, техника выражения одних векторов и точек через другие. Центр тяжести, группирование масс, барицентрические координаты. Площадь, объём, правила Краммера. Прямые и плоскости. Скалярное произведение: неравенства Коши-Буняковского-Шварца и треугольника, определение и вычисление длин и углов. Движения плоскости и пространства, вычисление композиций поворотов, сдвигов и отражений.

  Если позволят обстоятельства: стереографическая проекция, инверсия, мёбиусова геометрия плоскости.

- **Аффинная геометрия**[1]. Векторные пространства, базисы, размерность, координаты. Аффинные пространства, аффинизация и векторизация, реперы, аффинные координаты. Размерности сумм и пересечений подпространств, параллельность. Линейные и аффинные преобразования, аффинная группа является полупрямым произведением линейной группы и группы сдвигов. Биекция, переводящая прямые в прямые, есть композиция аффинного автоморфизма с автоморфизмом основного поля над $\mathbb{Q}$.

- **Объём**[2]. Ориентированный объём параллелепипеда. Грассмановы многочлены и формы k-мерного объёма на пространстве V с $k < \dim V$. Базисный вектор в одномерном пересечении трансверсальных гиперплоскостей, «векторные произведения».

- **Евклидова геометрия**. Евклидовы пространства, существование ортонормальных базисов. Определитель Грама равен квадрату объёма. Вычисление углов и расстояний между подпространствами. Ортогональные дополнения и ортогональное проектирование, общий перпендикуляр к набору векторов. Внутренняя метрическая геометрия симплексов, кубов, кокубов и т. п. Движения и ортогональные линейные преобразования, отражения, всякое ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$ является композицией $\leqslant n$ отражений, и раскладывается в ортогональную сумму поворотов в двумерных плоскостях и м.б. отражения.

- **Выпуклая геометрия $\mathbb{R}^n$**. Топологический ликбез (если в курсе анализа будет не до этого): открытые и замкнутые множества. Выпуклые фигуры, опорные полупространства, грани и крайние точки. Выпуклые многогранники и выпуклые полиэдральные конусы, перечисление граней, компактные пересчения полупространств суть выпуклые оболочки конечных наборов точек и наоборот.

  Если позволят обстоятельства: максимум аффинного функционала на многограннике и двойственность Гейла (в *геометрическом* изложении).

- **Если останется время: системы корней**. Группы, порождённые отражениями, минимальные слова (в *геометрическом* изложении). Системы корней, положительные корни, камеры Вейля. Представление о классификации евклидовых групп Кокстера, систем корней и правильных многогранников (в необязательных задачах).

---

[1] Не *вместо*, но в порядке *геометрического введения* в систематическую линейную алгебру.

[2] Не *вместо*, но в порядке *геометрического введения* в систематическую теорию определителей.

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА ВТОРОГО СЕМЕСТРА

- **Проективная геометрия**. Проективные пространства, однородные координаты, аффинные карты. Топология пространств $\mathbb{RP}_1 = S^1$, $\mathbb{CP}_1 = S^2$, $\mathbb{RP}_2$, $\mathbb{RP}_3 = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Геометрия $\mathbb{P}_1$: дробно-линейные преобразования, двойное отношение, инволюции, гармонические пары точек. Пучки прямых на $\mathbb{P}_2$, перспективность и теоремы Дезарга, построения одной линейкой. Внутренняя геометрия коники: проекция на прямую, дробно линейные автоморфизмы, инволюции, теорема Паскаля. Плоскость с гладкой коникой = $S^2\mathbb{P}_1$, старшие соответствия на конике, поризм Понселе. Словарик «линейная алгебра – проективная геометрия»: дополнительные подпространства и проектирование, проективная двойственность, группа PGL, сравнение аффинной и проективной групп. Пространство гиперповерхностей данной степени, кривые Веронезе и геометрия корней многочленов. Пространство коник.

- **Геометрия квадрик**. Примеры детерминантных квадрик в малых размерностях: коника Веронезе, квадрика Сегре, квадрика Плюккера. Пересечение квадрики с прямой, касательное пространство, гладкость и особые точки, квадрика является линейным соединением пространства особых точек с неособой квадрикой в дополнительном подпространстве. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики. Линейные подпространства, лежащие на гладкой квадрике. Пространство квадрик, касательное пространство к гиперповерхности особых квадрик. Пучки квадрик. Проективная, аффинная и евклидова (если позволят обстоятельства) классификация квадрик над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

  Если позволят обстоятельства: евклидова геометрия кривых и поверхностей второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

- **Геометрия кватернионов и спиноров**. Спинорное разложение 4-мерного евклидова пространства: $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ так, что $\mathbb{C}$-билинейное продолжение евклидовой структуры на $\mathbb{R}^4$ совпадает с поляризацией квадратичной формы det. Эрмитово сопряжение на пространстве комплексных 2×2-матриц, кватернионы, образующие и соотношения, норма, деление. Чисто мнимые кватернионы нормы 1, универсальные накрытия $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ (в *геометрическом* изложении). Расслоение Хопфа $\mathrm{SU}_2 = S^3 \to S^2$.

- **Неевклидовы геометрии**. Геометрия неизотропных (вещественных) точек проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, ассоциированного с вещественным (соотв. комплексным) пространством V с невырожденной квадратичной (соотв. эрмитовой) формой сигнатуры (m, n): геодезические суть проективизации вещественных линейных подпространств; длины, углы, площади, объёмы и т. п. между ними вычисляются через скалярное произведение в V; абсолют состоит из (вещественных) изотропных векторов. Примеры: 2-мерная эллиптическая геометрия на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ с формой сигнатуры $++$ на $\mathbb{C}^2$, 2-мерная плоскость Лобачевского = диск Бельтрами – Клейна на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ с формой сигнатуры $++-$ на $\mathbb{R}^3$ = диск Пуанкаре на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ с формой сигнатуры $+-$ на $\mathbb{C}^2$. Вычисления длин, углов, площадей и объёмов в сферической и гиперболической геометрии.

- **Если останется время: группы неевклидовых движений**. Движения в сферической и гиперболической геометрии, группа движений порождается отражениями. Дискретные группы движений сферической и гиперболической плоскости, фундаментальный многоугольник, теорема Пуанкаре. Пример: модулярный треугольник и модулярная группа. Классификация и униформизация триангулированных римановых поверхностей.