Полугодовой курс

Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка

Краткое описание курса

Эллиптические уравнения с частными производными – один из самых красивых и востребованных разделов математики. Классическим примером таких уравнений является уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, описывающее, например, стационарное распределение температуры. Уравнение Лапласа обсуждается практически в любом курсе уравнений с частными производными. Наш курс посвящен общему эллиптическому уравнению:

$$\operatorname{tr}(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu = f.$$

Такие уравнения естественным образом появляются, например, в теории диффузионных процессов. Кроме того, эллиптические уравнения с непостоянными коэффициентами появляются даже в задачах, в которых изначально рассматривалось уравнение Лапласа, но на сложной области. В этом случае делают замену переменных, отображая сложную область в простую. Ясно, что уравнение при таком преобразовании перестает быть уравнением Лапласа. Кроме того, исследование нелинейных уравнений очень часто начинается с «замораживания» коэффициентов и сведения задачи к линейному уравнению. Например, про решение задачи Дирихле $\Delta u - u^3 = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ можно многое сказать априори, рассматривая уравнение как линейное $\Delta u - cu = f$. Отметим, что для эллиптических уравнений с непостоянными коэффициентами многие факты, очевидно верные для уравнения Лапласа, уже перестают выполняться, например, принцип максимума или теорема Лиувилля. При исследовании эллиптических уравнений привлекаются идеи и методы анализа, алгебры, геометрии, теории вероятностей и других разделов математики. Ярким примером является принцип максимума А.Д. Александрова, тесно связанный с геометрией выпуклых поверхностей. Таким образом, курс будет интересен специалистам совершенно разных математических направлений. Кроме того, для понимания курса требуются знания по стандартной программе первых двух курсов любого физико-математического факультета.

Программа курса

1. Классический принцип максимума.
2. Оценки С.Н. Бернштейна и их следствия: неравенство Харнака и теорема Лиувилля.
3. Пространства Соболева. Теоремы вложения. Понятие слабого решения.
4. Принцип максимума и существование слабых решений задачи Дирихле.
5. Принцип максимума Н. Трудингера.
6. Интегрируемость положительных решений. Функции Ляпунова.
7. Метод итераций Ю. Мозера. Неравенство Харнака для слабых решений.
8. Априорные оценки и повышение гладкости слабого решения.
9. Сильные решения. Принцип максимума А.Д. Александрова.

10. k – гессианы и обобщения принципа максимума А.Д. Александрова.
11. Оценки Крылова-Сафонова. Неравенство Харнака для сильных решений.
12. Перенормированные решения П. Бауман. Оценки функции Грина.
13. L^p – оценки и разрешимость задачи Дирихле.
14. Лемма Зарембы-Хопфа-Олейник. Граничные оценки производной.
15. Лемма Надирашвили. Задача Неймана.

Литература

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, М., 1989.

2. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1988, т. 32, с. 99—215.

3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Наука, М., 1973.

4. Эванс, Л. К. Уравнения с частными производными : пер. с англ. Л. К. Эванс . – Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003 . – 576 с. – (Университетская серия ; Т. 7).

5. Krylov N.V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces (Graduate Studies in Mathematics) 2008.