142. Поворот

142.1. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.

142.2. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

142.3. Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α. Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O, одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

142.4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α.

142.5. Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите величину угла между прямыми AM и BN.

142.6. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AMK правильный.

142.7. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

142.8. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.

142.9. Постройте квадрат три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

142.10. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке и с вершинами острых углов на двух данных окружностях.

142.11. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Докажите, что существует треугольник стороны которого равны отрезкам PA, PD и PC.

142.12. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

142.13. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

142.14. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным 60°. Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB, сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN.

142.15. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка M. Докажите с помощью поворота, что $AM = BM + CM$.

142.16. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите с помощью поворота, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

142.17. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

142.18. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P, соответственно. Точка D — центр

правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC.

142.19. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1. Докажите, что треугольник APQ правильный.

142.20. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекается в одной точке.

142.21. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

142.22. Даны две точки и окружность. через данные точки проведите две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α.

142.23. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1, и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что эти отрезки равны между собой.

142.24. Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K — вне, причем треугольники AMD и CKD — равносторонние. Докажите, что точки B, M и K лежат на одной прямой.

142.25. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Найдите угол APB.

142.26. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные их вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

142.27. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

142.28. (*Задача Ферма*) Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.