137. Теорема синусов

Пусть a, b, c - стороны треугольника; α, β, γ - противолежащие им углы; R - радиус описанной окружности. *Теорема синусов.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

137.1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, а угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.

137.2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными a, a и b.

137.3. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом, равным 30°, если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a.

137.4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 13, 14, 15.

137.5. Боковая сторона равнобокой трапеции равна a, средняя линия равна b, а один углов при большем основании равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

137.6. Основания равнобокой трапеции равны 9 и 21, высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

137.7. Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

137.8. С помощью теоремы синусов докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

137.9. В треугольнике известны сторона a и два прилежащих к ней угла β и γ. Найдите биссектрису, проведенную из вершины третьего угла.

137.10. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы, равные α и β соответственно. Найдите эти стороны.

137.11. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. На стороне AB взята точка D, а на стороне AC - точка M, причем CD — биссектриса треугольника ABC, $DM \| BC$ и $AM = a$. Найдите CM.

137.12. Углы треугольника равны α, β и γ, а периметр равен P. Найдите стороны треугольника.

137.13. Одна из боковых сторон трапеции образует с большим основанием угол, равный α, а вторая равна a и образует с меньшим основанием угол, равный β. Найдите среднюю линию трапеции, если меньшее основание равно b.

137.14. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

137.15. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

137.16. Стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен 60°. Через центр вписанной окружности этого треугольника и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите ее радиус.

137.17. Докажите, что если стороны a, b и противолежащие им углы α и β треугольника связаны соотношениями $a/\cos\alpha = b/\cos\beta$, то треугольник равнобедренный.

137.18. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает эти окружности в точках C и D, причем точка A лежит между C и D, а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей. Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB.

137.19. В окружность вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

137.20. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

137.21. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.

137.22. На окружности, описанной около треугольника ABC, найдите точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

137.23. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

137.24. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

137.25. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника ABC.

137.26. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

137.27. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

137.28. Постройте треугольник по углу и радиусам вписанной и описанной окружностей.

137.29. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB = c$ и $AC = b$.

137.30. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около него окружности.

137.31. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC.

137.32. Дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle BAM = 30^\circ$. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке N, отличной от A. Найдите AN.

137.33. Даны отрезок AB и на нем точка C. Найдите геометрическое место точек пересечения двух равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через точки C и B.

137.34. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = 6a/5$.

137.35. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

137.36. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D. N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD;

2) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

137.37. В треугольник ABC помещены три равных окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны R и r.

137.38. В выпуклом четырехугольнике ABKC сторона $AB = \sqrt{3}$, диагональ BC равна 1, а углы ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите сторону BK.

137.39. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$ и $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.

* * *

137.40. В выпуклом четырехугольнике ABCD проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC.

137.41. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении $1:2$.

137.42. В выпуклом четырехугольнике ABCD известны углы: $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

137.43. На окружности, описанной около треугольника ABC взята точка M. Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L, а прямая CM — с прямой AB в точке K. Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL.