136. Теорема косинусов

136.1. (Теорема косинусов) Пусть a, b, c — стороны треугольника; α — угол, противолежащий стороне a. Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

136.2. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Будет ли этот треугольник остроугольным?

136.3. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.

136.4. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2:1.

136.5. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен $60°$. Докажите, что треугольник прямоугольный.

136.6. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в $30°$ и относятся, как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.

136.7. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.

136.8. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

136.9. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен $60°$. Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.

136.10. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен $60°$. Найдите третью сторону треугольника.

136.11. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A взята точка D, причем $AD = 2AB$. Известно, что $AB = AC = 1$, $\angle BAC = 120°$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

136.12. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причем $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN, если известно, что сторона ромба равна a, а $\angle BAD = 60°$.

136.13. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырёх сторон.

136.14. Диагональ параллелограмма, равная b, перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

136.15. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если эта медиана равна 3.

136.16. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

136.17. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите медиану, проведенную к стороне, равной c.

136.18. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

136.19. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведенная к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

136.20. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $3/4$.

136.21. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC.

136.22. Можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

136.23. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.

136.24. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M, для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM.

136.25. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла.

136.26. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями 3 и 7 и боковыми сторонами 2 и 5.

136.27. Медианы треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, равны 6 и 9 и пересекаются в точке M. Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.

136.28. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60°. Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.

136.29. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM, если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.

136.30. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

136.31. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали четырехугольника.

136.32. Диагонали выпуклого четырехугольника равны c и d и пересекаются под углом 45°. Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника.

136.33. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин острых углов на расстояния a и b. Найдите гипотенузу.

136.34. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A, причём $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM : MC = 2 : 3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

136.35. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке M, $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM.

136.36. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120°.

136.37. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, касается гипотенузы в точке M. Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

136.38. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной, равной $3a$, причем $AM : MC = 1 : 2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника MKL. Найдите его стороны.

136.39. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC = a$, $AB = b$, $DE/AC = k$.

136.40. В окружности проведены хорды AB и BC, причем $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

136.41. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

136.42. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках M, D и N. Найдите MD, если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.

136.43. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $22{,}5^\circ$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

136.44. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB. Докажите, что медиана, проведенная из вершины B, меньше медианы, проведенной из вершины A.

136.45. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите биссектрису, проведенную к стороне a.

136.46. (Теорема Штейнера–Лемуса) Две биссектрисы треугольнка равны между собой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

136.47. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. При этом $\angle BAD = 30^\circ$, и $\angle ADC = 60^\circ$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

136.48. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

136.49. Докажите, что сумма квадратов расстояний от какой-либо точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная (не зависящая от положения точки на окружности).

136.50. На окружности взяты две диаметрально противоположные точки A и C, а точка B расположена вне окружности. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке P, отрезок CB — в точке Q. Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$, $AB : AC = 1 : \sqrt{3}$. Найдите отношение отрезков CP и AQ.

136.51. Сторона ромба $ABCD$ равна a, а острый угол равен α. На отрезках AD и BC как на сторонах построены правильные треугольники (вне ромба). Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

136.52. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF, для которой $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2, а угол NFH — тупой. Найдите угол HKF.

136.53. Окружность, вписанная в треугольник ABC делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

136.54. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5. Проекции этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC.

136.55. (Теорема Стюарта) Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

136.56. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок, равный $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

136.57. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $2/\sqrt{3}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC.

136.58. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$). Прямая, параллельная диагонали AC, пересекает стороны AD и CD в точках M и N соответственно и касается окружности в точке P. Найдите углы трапеции, если $MP/PN = k$ ($k < 1$).

136.59. Сторона BC треугольника ABC равна 4, сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.