134. Тригонометрические функции острого угла

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе, *косинусом* — отношение прилежащего катета к гипотенузе, *тангенсом* — отношение противолежащего катета к прилежащему, *котангенсом* — прилежащего катета к противолежащему.

Другими словами, если AC и BC — катеты прямоугольного треугольника ABC, а AB — его гипотенуза, и $BC = a$, $AC = b$, $AB =$, то

$$\sin\angle A = \frac{a}{c}, \cos\angle A = \frac{b}{c}, \operatorname{tg}\angle A = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg}\angle A = \frac{b}{a};$$

$$\sin\angle B = \frac{b}{c}, \cos\angle B = \frac{a}{c}, \operatorname{tg}\angle A = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg}\angle A = \frac{a}{b}.$$

134.1. Докажите, что синус острого угла зависит только от градусной меры угла, то есть что равные углы имеют равные синусы. (Аналогично для косинусов и т.д.)

134.2. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов в $30°$, $60°$ и $45°$.

134.3. Докажите, что для любого острого угла α

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

134.4. Тангенс острого угла α равен 2. Найдите $\sin\alpha$.

134.5. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $AB = 4$, $\angle A = 60°$. Найдите BC и AC.

134.6. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Найдите гипотенузу и второй катет.

134.7. Сторона ромба равна 6, острый угол $30°$. Найдите высоту ромба и его диагонали.

134.8. Найдите высоту и радиусы вписанной и описанной окружности равностороннего треугольника со стороной a.

134.9. Найдите высоту остроугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен $60°$.

134.10. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$.

134.11. Дан прямоугольник со сторонами $4\sqrt{3}$ и 4. Найдите его диагонали и острый угол между ними.

134.12. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, а основание равно 8. Найдите боковые стороны.

134.13. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 4, угол при большем основании равен $45°$. Найдите диагонали трапеции.

134.14. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен $120°$. Найдите диагонали трапеции.

134.15. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.

134.16. Найдите площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно a, большая боковая сторона равна b.

134.17. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $3/5$, высота, опущенная на основание, равна h. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

134.18. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол, равный α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

134.19. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна a, один из острых углов равен α. Найдите расстояния от основания высоты, опущенной на гипотенузу, до катетов треугольника.

134.20. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

134.21. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие - на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a, а угол при основании равен 30°.

134.22. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a.

134.23. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r, а острый угол ромба равен α. Найдите сторону ромба.

134.24. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

134.25. Высота треугольника ABC, опущенная на сторону BC, равна h, а $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Найдите остальные высоты этого треугольника.

134.26. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

134.27. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

134.28. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с острым углом 60°, равен $\sqrt{3}$. Найдите стороны треугольника.

134.29. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

134.30. Диагональ равнобедренной трапеции равна a и образует углы α и β с большим основанием. Найдите основания трапеции.

134.31. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите стороны и диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллеллограмма.

134.32. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$.

134.33. Найдите $\sin 18^\circ$.