133. Теорема Пифагора

133.1. (Теорема Пифагора) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. (Указание: высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, подобных исходному.)

133.2. (Теорема о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике.) Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу, а высота, проведенная из вершины прямого угла, — среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

133.3. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки, равные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

133.4. Даны отрезки a и b. Постройте отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{ab}$.

133.5. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

133.6. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если основание равно a, а боковая сторона равна b.

133.7. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

133.8. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

133.9. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD, причем $AD \cdot BD = CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?

133.10. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

133.11. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной a и b. Найдите диагонали ромба.

133.12. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n. Найдите площадь квадрата.

133.13. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.

133.14. Диагональ равнобедренной трапеции равна a, а средняя линия равна b. Найдите высоту этой трапеции.

133.15. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

133.16. Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу треугольника.

133.17. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

133.18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

133.19. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DE. Диагональ AC ромба пересекает высоту DE в точке F так, что $DF/FE = 5$. Найдите сторону ромба, если известно, что $AE = 5$.

133.20. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояние от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, равны m и n соответственно. Найдите катеты AC и BC.

133.21. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

133.22. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

133.23. Окружность, вписанная в трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки a и b. Найдите радиус окружности.

133.24. Даны окружности радиусов r и R, причём $R > r$. Расстояние между их центрами равно a и больше $R+r$. Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания.

133.25. Окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом в точке K. К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D, с большей — B и C соответственно. (**а**) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными. (**б**) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей). (**в**) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

133.26. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

133.27. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D, причем $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

133.28. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC.

133.29. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC; сумма острых углов A и C равна $90°$. Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны AB и CD.

133.30. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите высоту трапеции.

133.31. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если $AC = a$.

133.32. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$ во внешнюю сторону построен квадрат $ABKM$. Найдите расстояние от точки C до центра квадрата.

133.33. Найдите геометрическое место точек M, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

133.34. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

133.35. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

133.36. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите что этот треугольник прямоугольный.

133.37. В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$, $CM = 24$. Найдите DM.

133.38. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к двум данным окружностям, равны между собой.

133.39. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники CAD и CBD, равны соответственно 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

133.40. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр CD на гипотенузу AD. Расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники CAD и CBD, равно 1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

133.41. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *вневписанной* окружностью треугольника. Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся меньшей стороны прямоугольного треугольника с острым углом, равным $30°$, если радиус вписанной окружности равен r.

133.42. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами (а) 5, 12, 13; (б) 10, 10, 12.

133.43. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

133.44. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P. Найдите $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ и $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

133.45. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 см касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

133.46. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$ и два квадрата $BEFC$ и $AMNC$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC, а точки M и B — по разные стороны от прямой AC. Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = a$, $AC = b$.

133.47. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD, и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N, а высоту CD — в точке K. Докажите, что (а) треугольники CMN и CBA подобны; (б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K, радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.