129. Касательная к окружности

Касательная к окружности — прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку (называемую *точкой касания*).

129.1. (Теорема о касательной) Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

129.2. Докажите обратное утверждение: прямая, проходящая через некоторую точку окружности перпендикулярно радиусу, является касательной.

129.3. Расстояния от концов некоторого диаметра до касательной к окружности равны 7 и 3. Найдите радиус окружности.

129.4. Через точку M проведены две касательные MA и MB к некоторой окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

129.5. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

129.6. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые вписанная окружность делит его сторону, и радиус вписанной окружности.

129.7. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке. (Центр окружности не задан.)

129.8. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.

129.9. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанного круга.

129.10. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.

129.11. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности. Найдите углы треугольника.

129.12. В трапецию вписана окружность. Докажите, что отрезки, соединяющие центр этой окружности с концами одной из боковых сторон, взаимно перпендикулярны.

129.13. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

129.14. В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

129.15. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

129.16. В равнобедренный треугольник с основанием, равным 12, вписана окружность. К ней проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

129.17. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду данной длины.

129.18. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и N соответственно. Найдите угол KMN, если $\angle A = 60°$.

129.19. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Докажите, что $r = (a + b - c)/2$.

129.20. Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

129.21. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M. Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p. Докажите, что $x = p - a$.

129.22. Найдите расстояние между точками касания со стороной AC окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC, если (а) $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = AD$; (б) $AB = 5$, $BC = CD$, $AD = 7$.

129.23. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны между собой.

129.24. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений сторон AB и AC в точках N и P (соответственно). Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K, а стороны AB - в точке L. Докажите, что (а) AN равно полупериметру треугольника ABC; (б) $BM = CK$; (в) $NL = BC$.

129.25. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая две бо́льшие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

129.26. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

129.27. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

129.28. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

129.29. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их *линией центров*. Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

129.30. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

129.31. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

129.32. (а) Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке. (б) Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

129.33. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и найдите радиус этой окружности.

* * *

129.34. Через вершину треугольника проведите прямую, делящую периметр треугольника пополам.

129.35. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются отрезка AM в одной точке.

129.36. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты (соответственно) точки A_1, B_1 и C_1, причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

129.37. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

129.38. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A, B и C пересекаются в одной точке.

129.39. Докажите, что в четырехугольник, суммы противолежащих сторон которого равны между собой, можно вписать окружность.