128. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек, удаленных от данной точки (*центра*), на одно и то же положительное расстояние (*радиус*). Отрезок, соединяющий точку окружности с центром, также называют радиусом. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*. *Диаметр* окружности — хорда, проходящая через центр.

128.1. Докажите следующие свойства окружности: (**а**) диаметр есть наибольшая хорда окружности; (**б**) диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам; (**в**) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра; (**г**) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны; (**д**) равные хорды удалены на равные расстояния от центра; (**ж***) из двух неравных хорд большая удалена от центра на меньшее расстояние.

128.2. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

128.3. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (при этом D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

128.4. Диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей до центра описанной окружности равно расстоянию между серединами диагоналей.

128.5. Через данную точку внутри круга проведите хорду наименьшей длины.

128.6. Найдите геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMD = 90°$).

128.7. Найдите центр данной окружности с помощью чертёжного угольника.

128.8. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

128.9. Через данную точку окружности проведите хорду, которая делится данной хордой пополам.

128.10. Впишите в окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через две данные точки.

128.11. Расстояние между равными параллельными хордами равно радиусу окружности. Найдите угол между прямыми, проходящими через концы этих хорд.

128.12. Продолжения высоты и медианы прямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершины C прямого угла, пересекают описанную окружность треугольника в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABNM$, если площадь треугольника ABC равна S и $\angle ABC = 30°$.

128.13. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.

128.14. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Докажите, что ломаная AOC делит его на две равновеликие части.

128.15. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключённая внутри окружностей, имела заданную длину.

128.16. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной a, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AMB и AMC.

128.17. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды с наибольшей суммой. (Центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды).

128.18. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

128.19. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что соединяющая их диагональ короче другой диагонали.

* * *

128.20. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

128.21. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

128.22. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны AB, если известно, что $CD = 8$.

128.23. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

128.24. Две неперпендикулярные прямые пересекаются в точке A. Точки B и C — проекции точки M на эти прямые. Найдите угол между прямой BC и прямой, проходящей через середины отрезков AM и BC.

128.25. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

128.26. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Докажите, что $CE = FA$.

128.27. На отрезке AB взята точка C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L, а также окружность с диаметром AB в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.