126. Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две противоположные стороны (*основания*) параллельны, а две другие (*боковые стороны*) нет.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

126.1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

126.2. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны между собой. Докажите следующие утверждения:

(а) углы при основании равнобедренной трапеции равны;

(б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобедренная;

(в) диагонали равнобедренной трапеции равны;

(г) если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

126.3. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ на большее основание AD. Найдите DP и AP, если основания трапеции равны a и b $(a > b)$.

126.4. В равнобедренной трапеции острый угол равен $60°$. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

126.5. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол $60°$ с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

126.6. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

126.7. Отрезки AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2{,}6$ и $BC = 2{,}5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A: основание BC или боковую сторону CD ?

126.8. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на её средней линии.

126.9. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

126.10. Основания трапеции равны a и b, причём $a > b$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

126.11. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

126.12. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна $90°$. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

126.13. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.

126.14. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

126.15. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

126.16. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный $30°$. Найдите среднюю линию трапеции.

126.17. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $30°$ и $60°$. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

* * *

126.18. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

126.19. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

126.20. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание равно сумме боковых сторон.

126.21. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?