124. Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником*.

124.1. Докажите, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

124.2. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60°. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

124.3. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырёх углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

124.4. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

Ромбом называется параллелограмм, в котором все стороны равны.

124.5. Докажите, что диагонали ромба (а) взаимно перпендикулярны; (б) являются биссектрисами углов ромба. Верны ли обратные утверждения?

124.6. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

124.7. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трёх других точках A, B и C. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется *квадратом*; у него все стороны равны, а все углы прямые.

124.8. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

124.9. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами другого квадрата. А если вместо центра взять произвольную точку внутри квадрата?

124.10. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырёх углов прямоугольника являются вершинами квадрата.

124.11. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, точка L расположена на диагонали AC, причем $AL : LC$???. Найдите $\angle KLD$.

124.12. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры сами образуют квадрат.

124.13. Точка M расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $\angle MAB = \angle MBA = 15°$. Докажите, что треугольник DMC правильный.

124.14. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем всё, кроме этих точек, стёрли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.