ДОБАВЛЕНИЕ 1

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

В этом добавлении мы излагаем определение и простейшие свойства волнового фронта обобщенной функции, введенного Хёрмандером [6]. Важность понятия волнового фронта состоит в том, что оно позволяет дать микролокальную (локализованную в точке кокасательного расслоения) формулировку теоремы о регулярности решений дифференциальных уравнений, а также во многом проясняет вопросы, связанные с распространением особенностей. Существенную роль волновые фронты играют и в спектральной теории. Волновые фронты органически связаны с псевдодифференциальными операторами. Оставляя в стороне многие важные вопросы теории волновых фронтов, автор счел все же полезным написать это по необходимости краткое добавление.

Д1.1. Волновой фронт обобщенной функции

Определение Д1.1. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$. Будем писать, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, если существует такое $v \in \mathscr{E}'(X)$, что $u = v$ в окрестности x_0 и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любого $N > 0$

$$|\tilde{v}(\xi)| \leqslant C_N \langle \xi \rangle^{-N} \quad \text{при} \quad \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \right| < \varepsilon, \tag{Д1.1}$$

т. е. $\tilde{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0.

Таким образом, $WF(u)$ — замкнутое коническое множество в $X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$, называемое *волновым фронтом* (wave front) обобщенной функции u.

Лемма Д1.1. *Если $\varphi(x) \in C_0^\infty(X)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, то $(x_0, \xi_0) \notin WF(\varphi u)$.*

Доказательство. Надо проверить, что если $\tilde{v}$ быстро убывает в открытом конусе Γ, то то же самое верно для $\widetilde{\varphi v}$. Но

$$\widetilde{\varphi v}(\xi) = \int \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta = \int\limits_{|\eta| \leqslant R} \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta + \int\limits_{|\eta| \geqslant R} \tilde{v}(\xi - \eta)\, \tilde{\varphi}(\eta)\, d\eta$$

и

$$|\widetilde{\varphi v}(\xi)| \leqslant C \sup_{|\eta| \leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L \int\limits_{|\eta| \geqslant R} (1+|\xi-\eta|)^p (1+|\eta|)^{-L}\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{|\eta| \leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L (1+|\xi|)^p \int\limits_{|\eta| \geqslant R} (1+|\eta|)^{p-L}\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{|\eta| \leqslant R} |\tilde{v}(\xi-\eta)| + C_L (1+|\xi|)^p R^{n+p-L}.$$

Положим теперь $R = |\xi|^{1/2}$. Тогда получится, что если ξ принадлежит конусу, чуть меньшему чем Γ, то $\xi - \eta \in \Gamma$ при больших $|\xi|$ и при $|\eta| \leqslant R$, а кроме того, $|\xi-\eta| \sim |\xi|$, $R^{n+p-L} \sim |\xi|^{(n+p-L)/2}$. Выбирая большое L, мы получим быстрое убывание $\widetilde{\varphi v}(\xi)$ по ξ при $|\xi| \to +\infty$, $\xi \in \Gamma$. ■

Следствие Д1.1. *В определении* Д1.1 *можно считать, что* $v = \varphi u$, *где* $\varphi \in C_0^\infty(X)$.

Доказательство. Мы можем выбрать v, о котором идет речь в этом определении, и затем взять такое φ, что $\varphi = 1$ в окрестности x_0 и $\varphi u = \varphi v$. Остается воспользоваться леммой Д1.1. ■

Лемма Д1.2. *Пусть* $\pi\colon X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0) \to X$ — *естественная проекция,* $u \in \mathscr{D}'(X)$. *Тогда*

$$\pi WF(u) = \operatorname{sing\,supp} u.$$

Доказательство. а) Если $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} u$, то, беря $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\varphi = 1$ в окрестности x_0, $\varphi = 0$ в окрестности $\operatorname{sing\,supp} u$, мы получим, что $\varphi u \in C_0^\infty(X)$, откуда $\widetilde{\varphi u} \in S(\mathbb{R}^n)$, а значит, $x_0 \notin \pi WF(u)$.

б) Пусть $x_0 \notin \pi WF(u)$. Тогда для любого $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ существуют такие функция $\varphi_{\xi_0}(x) \in C_0^\infty(X)$ и коническая окрестность Γ_{ξ_0}, точки ξ_0, что $\varphi_{\xi_0}(x) = 1$ в окрестности x_0 и $\widetilde{\varphi_{\xi_0} u}(\xi)$ быстро убывает в Γ_{ξ_0}. Пусть $\Gamma_{\xi_1}, \ldots, \Gamma_{\xi_N}$ — покрытие $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Тогда, полагая $\varphi = \prod\limits_{j=1}^{N} \varphi_{\xi_j}$, мы получим, что $\widetilde{\varphi u}(\xi)$ быстро убывает всюду, откуда $\varphi u \in C_0^\infty(X)$, значит, $u \in C^\infty$ в окрестности точки x_0, т. е. $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} u$. ■

Предложение Д1.1. *Пусть* $u \in \mathscr{D}'(X)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. *Тогда существует такой классический собственный* ПДО $A \in CL^0(X)$, *что* $\sigma_A \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}}$ *в конической окрестности* (x_0, ξ_0) *и* $Au \in C_0^\infty(X)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\varphi = 1$ в окрестности x_0, $\widetilde{\varphi u}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0. Пусть $\chi(\xi)$ сосредоточено в этой конической окрестности, $\chi(t\xi) = \chi(\xi)$ при $t \geqslant 1$, $|\xi| \geqslant 1$, $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\chi(\xi) = 1$ в некоторой меньшей конической окрестности ξ_0. Тогда $\chi(\xi)\,\widetilde{\varphi u}(\xi)$ быстро убывает, откуда

$\chi(D)\,(\varphi(x)\,u(x)) \in C^\infty(X)$. Но тогда $\psi(x)\,\chi(D)\,(\varphi(x)\,u(x)) \in C_0^\infty(X)$, если $\psi \in C_0^\infty(X)$. Мы можем взять ψ таким, что $\psi(x)=1$ в окрестности точки x_0. Тогда ПДО $A=\psi(x)\,\chi(D)\,\varphi(x)$ удовлетворяет всем требуемым условиям. ■

Предложение Д1.2. *Пусть даны* $u \in \mathscr{D}'(X)$, $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$ *и оператор* $A \in CL^m(X)$ *с главным символом* $a_m(x, \xi)$. *Пусть либо* $u \in \mathscr{E}'$, *либо оператор* A *собственный, так что имеет смысл* Au. *Наконец, предположим, что* $a_m(x_0, \xi_0) \neq 0$ *и* $Au \in C^\infty(X)$. *Тогда* $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

Доказательство. а) Проводя в конической окрестности точки (x_0, ξ_0) стандартную конструкцию параметрикса (см. § 5), мы можем построить такой собственный ПДО $B \in CL^{-m}(X)$, что $\sigma_{BA} \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}}$ в конической окрестности точки (x_0, ξ_0). Ясно, что $BAu \in C^\infty(X)$, так что, заменяя A на BA, мы можем считать, что $\sigma_A \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}}$ в конической окрестности точки (x_0, ξ_0).

б) Пусть теперь $\chi(\xi)=1$ в окрестности точки ξ_0, $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)$ однородна 0-го порядка по ξ при $|\xi| \geqslant 1$. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi=1$ в окрестности x_0 и носители φ и χ выбраны так, что

$$\varphi(x)\,\chi(\xi)\,\sigma_A(x, \xi)=\varphi(x)\,\chi(\xi) \pmod{S^{-\infty}}.$$

Отсюда

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,A-\chi(D)\,\varphi(x) \in L^{-\infty}, \tag{Д1.2}$$

но поскольку $\chi(D)\,\varphi(x)\,Au \in C^\infty(X)$, то из (Д1.2) следует, что

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,u \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{Д1.3}$$

в) Докажем теперь, что

$$\chi(D)\,\varphi(x)\,u \in S(\mathbb{R}^n), \tag{Д1.4}$$

откуда будет следовать, что $\chi(\xi)\,\widetilde{\varphi u}\,(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, $\widetilde{\varphi u}\,(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности ξ_0, что и требуется. Включение (Д1.4) в силу доказанного включения (Д1.3) вытекает из следующей леммы.

Лемма Д1.3. *Пусть* $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) \in S^m_{\rho,\,0}$. *Тогда*

$$|D^\alpha \chi(D)\,v(x)| \leqslant C_{\alpha,\,N}|x|^{-N} \tag{Д1.5}$$

при $\rho(x, \operatorname{supp} v) \geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку $\xi^\alpha \chi(\xi) \in S^{m+|\alpha|}_{\rho,\,0}$, то все сводится к случаю $\alpha=0$. Далее, представляя v в виде $v=\sum\limits_{|\alpha| \leqslant p} D^\alpha v_\alpha$, где v_α —

непрерывные функции, мы можем свести дело к случаю, когда v непрерывна. Имеем

$$\chi(D)\,v(x)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\chi(\xi)\,v(y)\,dy\,đ\xi. \tag{Д1.6}$$

Интегрируем по частям, используя формулу

$$|x-y|^{-2N}(-\Delta_\xi)^N e^{i(x-y)\cdot\xi}=e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

Из (Д1.6) получается

$$\chi(D)\,v(x)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}((-\Delta_\xi)^N\chi(\xi))\,|x-y|^{-2N}v(y)\,dy\,đ\xi. \tag{Д1.7}$$

что имеет смысл, если считать, что $\rho(x,\operatorname{supp} v)\geqslant 1$. Выбирая N столь большим, что $(-\Delta_\xi)^N\chi(\xi)\in S^{-n-1}_{\rho,0}$, мы видим, что интеграл в (Д1.7) становится абсолютно сходящимся, причем он оценивается через $C\langle x\rangle^{-2N}$ при $\rho(x,\operatorname{supp} v)\geqslant 1$. ■

Замечание Д1.1. Условие $a_m(x_0,\xi_0)\neq 0$ иногда называют *эллиптичностью A в точке (x_0,ξ_0)*. Легко сформулировать и доказать гипоэллиптический аналог предложения Д1.2. Мы предоставляем это читателю в виде упражнения.

Следствие Д1.2. *Положим для $A\in CL^m(X)$*

$$\operatorname{char}(A)=\{(x,\xi)\in X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)\colon a_m(x,\xi)=0\}.$$

Тогда, если $Au=f\in C^\infty(X)$, то $WF(u)\subset\operatorname{char}(A)$.

В частности, если $\operatorname{char}(A)=\varnothing$, то $u\in C^\infty(X)$.

Следствие Д1.3. *Если $u\in\mathscr{E}'(X)$, то*

$$WF(u)=\bigcap_{\substack{A\in CL^0(X)\\ Au\in C^\infty(X)}}\operatorname{char}(A). \tag{Д1.8}$$

То же самое верно и для $u\in\mathscr{D}'(X)$, но надо брать лишь собственные операторы A.

Важность следствия Д1.3 состоит в том, что формула (Д1.8) показывает, что волновой фронт $WF(u)$ может быть инвариантным образом определен в случае, когда X — многообразие, и в этом случае $WF(u)$ представляет собой замкнутое коническое подмножество в T^*X. Мы теперь еще немного обобщим предложение Д1.2, ослабив требование $Au\in C^\infty(X)$.

Предложение Д1.3. *Пусть опять $A\in CL^m(X)$, $u\in\mathscr{D}'(X)$ и либо оператор A собственный, либо $u\in\mathscr{E}'(X)$. Тогда, если $a_m(x_0,\xi_0)\neq 0$ и $(x_0,\xi_0)\notin WF(Au)$, то $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$. Иными словами,*

$$WF(u)\subset\operatorname{char}(A)\cup WF(Au). \tag{Д1.9}$$

Доказательство. В силу предложения Д1.1 существует такой собственный оператор $P\in CL^0(X)$, что $\sigma_P\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$ в конической окрестности $(x_0,\,\xi_0)$ и $(PA)\,u\in C^\infty(X)$. Но тогда из предложения Д1.2 ясно, что $(x_0,\,\xi_0)\notin WF(u)$. ■

Предложение Д1.4 (псевдолокальность ПДО). *Пусть* $u\in \in\mathscr{D}'(X)$, $A\in L^m_{\rho,\,\delta}(X)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ *и либо* $u\in\mathscr{E}'(X)$, *либо оператор* A *собственный. Тогда, если* $(x_0,\,\xi_0)\notin WF(X)$, *то* $(x_0,\,\xi_0)\notin WF(Au)$. *Иными словами,*

$$WF(Au)\subset WF(u). \qquad (Д1.10)$$

Доказательство. Условие $(x_0,\,\xi_0)\notin WF(u)$ равносильно существованию такого собственного ПДО $P\in CL^0(X)$, что $Pu\in C^\infty(X)$ и $\sigma_P\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ S^{-\infty})$ в конической окрестности $(x_0,\,\xi_0)$. Пусть теперь Q — такой собственный ПДО, $Q\in CL^0(X)$, что $q_0(x_0,\,\xi_0)\neq 0$ (где q_0 — главный символ Q) и $\sigma_Q\in S^{-\infty}$ вне некоторой достаточно малой конической окрестности точки $(x_0,\,\xi_0)$, так что

$$PQ\equiv Q(\mathrm{mod}\ L^{-\infty}) \quad \text{и} \quad QP\equiv Q(\mathrm{mod}\ L^{-\infty}).$$

Проверим, что $QAu\in C^\infty(X)$. Имеем $QA-QAP\in L^{-\infty}$, так что достаточно проверить, что $QAPu\in C^\infty(X)$. Но это ясно, поскольку $Pu\in C^\infty(X)$. Теперь тот факт, что $(x_0,\xi_0)\notin WF(Au)$, вытекает из предложения Д1.2. ■

Следствие Д1.4. *Если* $A\in CL^m(X)$, *то*

$$WF(Au)\subset WF(u)\subset WF(Au)\cup \mathrm{char}\,(A). \qquad (Д1.11)$$

Следствие Д1.5. *Если оператор* $A\in CL^m(X)$ *эллиптичен*, *то*

$$WF(Au)=WF(u). \qquad (Д1.12)$$

Упражнение Д1.1. Вычислить волновые фронты следующих обобщенных функций:

а) $\delta(x)$;

б) $\delta(x')\otimes 1(x'')$, где $x'\in\mathbb{R}^k$, $x''\in\mathbb{R}^{n-k}$;

в) δ_S, где S — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ ($\langle\delta_S,\,\varphi\rangle$ определяется как интеграл ограничения функции φ на поверхность S по площади этой поверхности);

г) $(x+i0)^{-1}$ на $\mathbb{R}^1$;

д) характеристическая функция угла в $\mathbb{R}^2$.

Д1.2. Приложения: произведение двух обобщенных функций, след обобщенной функции на подмногообразии

1) Пусть $u_j\in\mathscr{D}'(X)$, $j=1,\,2$. Что такое $u_1\cdot u_2$? Это должно быть обычное произведение u_1u_2, если, например, $u_1,\,u_2$ — непрерывные

функции или одна из функций u_1, u_2 гладкая, и это должно быть естественное продолжение (например, по непрерывности в каком-нибудь смысле). Оказывается, можно определить $u_1 \cdot u_2$ при условии, что

$$WF(u_1) + WF(u_2) \subset X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0), \tag{Д1.13}$$

т. е. не существует такого $(x, \xi) \in WF(u_1)$, что $(x, -\xi) \in WF(u_2)$.

Поскольку произведение — билинейная операция, то, используя разбиение единицы, можно считать, что $u_1, u_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ и носители u_1, u_2 достаточно малы, так что $\tilde{u}_1(\xi)$ убывает вне конуса Γ_1, а $\tilde{u}_2(\xi)$ — вне конуса Γ_2, причем $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n \backslash 0$ (т. е. Γ_1 и Γ_2 не содержат диаметрально противоположных точек). Известно, что в обычной ситуации $\widetilde{u_1 u_2}(\xi) = \tilde{u}_1 * \tilde{u}_2$, где

$$\tilde{u}_1 * \tilde{u}_2(\xi) = \int \tilde{u}_1(\xi - \eta)\, \tilde{u}_2(\eta)\, d\eta. \tag{Д1.14}$$

В нашем случае этот интеграл тоже абсолютно сходится, так как при $|\eta| \to +\infty$ либо $|\tilde{u}_1(\xi - \eta)|$, либо $|\tilde{u}_2(\eta)|$ быстро стремится к 0. По определению мы полагаем

$$u_1 u_2 = F^{-1} \int \tilde{u}_1(\xi - \eta)\, \tilde{u}_2(\eta)\, d\eta. \tag{Д1.15}$$

Почему это продолжение по непрерывности? Например, можно показать, что если $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \chi(x)\, dx = 1$, $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(\varepsilon^{-1} x)$ и $u^{(\varepsilon)} = u * \chi_\varepsilon$ $(\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$, так что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} u_j^{(\varepsilon)} = u_j$ в топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} u_1^{(\varepsilon)} u_2^{(\varepsilon)} = u_1 u_2$ в топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $u_1 u_2$ понимается в смысле (Д1.15).

Пример Д1.1. Пусть $u_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle u_k, \varphi \rangle = \int \chi_k(x_1)\, \varphi(x_1, kx_1)\, dx_1, \qquad \chi_k(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),$$

т. е. $\operatorname{supp} u_k \subset \{(x_1, x_2) : x_2 = kx_1\}$. Найдем произведение $u_k \cdot u_0$. Имеем

$$\tilde{u}_k(\xi) = \int \chi_k(x_1)\, e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 k x_2)}\, dx_1 = \tilde{\chi}_k(\xi_1 + k\xi_2).$$

Отсюда $WF(u_k)$ — множество всех нормалей к прямой $x_2 = kx_1$, лежащих над $\pi_k^{-1}(\operatorname{supp} \chi_k)$, где $\pi_k : (x_1, kx_1) \mapsto x_1$.

Теперь рассмотрим свертку $\tilde{u}_k * \tilde{u}_0$:

$$(\tilde{u}_k * \tilde{u}_0)(\xi) = \int \tilde{\chi}_0(\xi_1 - \eta_1)\, \chi_k(\eta_1 + k\eta_2)\, d\!\!{}^-\eta_1\, d\!\!{}^-\eta_2 =$$
$$= \int \tilde{\chi}_0(\eta_1)\, d\!\!{}^-\eta_1 \cdot \int \tilde{\chi}_k(k\eta_2)\, d\!\!{}^-\eta_2 = \frac{1}{k}\,\chi_0(0)\,\chi_k(0);$$

отсюда

$$u_0 u_k = \frac{1}{k}\,\chi_0(0)\cdot\chi_k(0)\cdot\delta(x).$$

Предел при $k \to 0$ отсутствует, что естественно, так как при $k = 0$ условие (Д1.13) не выполняется.

2) Пусть $u \in \mathscr{D}'(X)$, Y — подмногообразие в X, NY — семейство всех нормалей к Y в T^*X (нормальное расслоение к Y). Если $WF(u) \cap NY = \varnothing$, то определен след $u|_Y$, естественный в том же смысле, в каком и произведение.

В самом деле, локализуя, можно считать, что $Y = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}$. Для $u \in C_0^\infty(X)$ имеем

$$\widetilde{u|_Y} = \int \tilde{u}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\!\!{}^-\xi_1 \ldots d\!\!{}^-\xi_k. \tag{Д1.16}$$

Но по условию в нашем случае векторы вида $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0)$ не входят в $WF(u)$, так что $\tilde{u}$ быстро убывает в их направлении и интеграл (Д1.16) определен.

В частности, если $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка m вида

$$a\Big(t,\, x,\, \frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\, u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

причем плоскость $t = 0$ нехарактеристична, т. е. $a_m(0, x, 1, 0) \neq 0$, то определены все следы $\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, имеют смысл данные Коши. При этом $u|_{t=t_0}$ — гладкая функция от t_0 со значениями в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Д1.3. Теорема о распространении особенностей

Мы сформулируем теперь простейший вариант теоремы о распространении особенностей.

Т е о р е м а Д1.1. *Пусть оператор $P \in CL^m(X)$ имеет вещественный главный символ $p_m(x, \xi)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$ и либо оператор P собственный, либо $u \in \mathscr{E}'(X)$, так что имеет смысл Pu. Тогда, если I — связный кусок бихарактеристики функции $p_m(x, \xi)$, не пересекающийся с $WF(Pu)$, то либо $I \subset WF(u)$, либо $I \cap WF(u) = \varnothing$.*

Иными словами, на дополнении к $WF(Pu)$ множество $WF(u)$ инвариантно относительно сдвигов по траекториям гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\dfrac{\partial p_m}{\partial x}, \\ \dot{x} = \dfrac{\partial p_m}{\partial \xi}. \end{cases} \tag{Д1.17}$$

П р и м е р Д1.2. Докажем, что волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ не может иметь решений с изолированными или компактно расположенными особенностями. В данном случае $m=2$, $p_2(x, \xi) = -\xi_0^2 + |\xi|^2$. Система (Д1.17) имеет решение $\xi = \mathrm{const}$, $x_0 = -2\xi_0 t$, $x = 2\xi t$. Пусть $0 \in \operatorname{sing\,supp} u$. Тогда существует точка $(0, 0, \xi_0, \xi) \in WF(u)$, причем ясно, что $\xi_0^2 = |\xi|^2$ в силу предложения Д1.2. По теореме Д1.1 $(-2\xi_0 t, 2\xi t, \xi_0, \xi) \in WF(u)$ при любом t и, в частности, $(-2\xi_0 t, 2\xi t) \in \operatorname{sing\,supp} u$ при любом t, что и дает требуемый результат.

Мы приведем теперь доказательство теоремы Д1.1, принадлежащее В. Н. Туловскому. Оно опирается на следующее предложение, описывающее волновой фронт в терминах действия обобщенной функции на быстро осциллирующую экспоненту.

П р е д л о ж е н и е Д1.5. *Пусть $u \in \mathscr{D}'(X)$. Тогда условие $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ равносильно следующему условию*:

А. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\Phi(x, \theta)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная при $|x - x_0| < \varepsilon$ и $\theta \in (\mathbb{R}^N \backslash 0)$, однородная по θ порядка 1 и такая, что $\Phi_x(x_0, \theta_0) = \xi_0$ при некотором $\theta_0 \neq 0$, то для любого символа $\varphi \in CS^0(\{|x - x_0| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^N_\theta)$, обращающегося в 0 при $|x - x_0| \geqslant \varepsilon/2$, существует такая коническая окрестность Γ точки θ_0 в $\mathbb{R}^N \backslash 0$, что*

$$|\langle u(x), \varphi(x, \theta)\, e^{-i\Phi(x, \theta)}\rangle| \leqslant C_N |\theta|^{-N}, \quad \theta \in \Gamma, \ |\theta| \geqslant 1. \tag{Д1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть выполнено условие А. Возьмем $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки x_0, $\varphi = 0$ при $|x - x_0| \geqslant \varepsilon/2$ и $\Phi(x, \theta) = \langle x, \theta \rangle$, так что $N = n$, $\theta_0 = \xi_0$. Мы получим тогда, что $\langle u(x), \varphi(x)\, e^{-ix\cdot\theta}\rangle = \widetilde{\varphi u}\,(\theta)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0. Но отсюда следует, что $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

2) Пусть $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. Проверим выполнение условия А. Пусть Φ и φ такие, как описано в этом условии. Без ущерба для общности можно считать, что $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Запишем левую часть (Д1.18) через $\tilde{u}(\xi)$:

$$\langle u(x), \varphi(x, \theta)\, e^{-i\Phi(x, \theta)}\rangle = \int \tilde{u}(\xi)\, e^{i[x\cdot\xi - \Phi(x, \theta)]}\, \varphi(x, \theta)\, dx\, d\xi, \tag{Д1.19}$$

где интеграл понимается как осциллирующий. Выбрав такую малую коническую окрестность Γ_1 точки ξ_0 в $\mathbb{R}^n$, что $\tilde{u}(\xi)$ быстро убывает в Γ_1, разобьем этот интеграл в сумму I_1+I_2, где в I_1 интеграл по ξ берется по Γ_1, а в I_2 — по $\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1$. Оценим I_1 и I_2 отдельно.

а) В I_1 интегрируем по частям по x с помощью экспоненты $e^{-i\Phi(x,\,\theta)}$. А именно, полагая

$$^tL=|\Phi_x|^{-2}\sum_{j=1}^{n} i\Phi_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

мы получим тождество $^tLe^{-i\Phi}=e^{-i\Phi}$. Коэффициенты ^tL и L однородны по θ порядка -1. Поскольку $\Phi_x(x_0,\,\theta_0)=\xi_0\neq 0$, то $|\Phi_x(x,\,\theta)|\neq 0$, если $|x-x_0|<\varepsilon$ и $\theta\in\Gamma$, где Γ — достаточно малая коническая окрестность точки θ_0. Имеем

$$I_1=\int\limits_{\xi\in\Gamma_1} L^N(e^{ix\cdot\xi}\,\varphi(x,\,\theta))\,\tilde{u}(\xi)\,e^{-i\Phi(x,\,\theta)}\,dx\,d\xi.$$

Поскольку

$$|L^N[e^{ix\cdot\xi}\varphi(x,\,\theta)]|\leqslant C_N\langle\xi\rangle^N\langle\theta\rangle^{-N},\quad \theta\in\Gamma,\ |\theta|\geqslant 1,$$

то ввиду убывания $\tilde{u}(\xi)$ в Γ_1 мы получаем

$$|I_1|\leqslant C_N\langle\theta\rangle^{-N},\quad \theta\in\Gamma,\ |\theta|\geqslant 1. \tag{Д1.20}$$

б) Для оценки I_2 надо интегрировать по частям по x уже с помощью всей экспоненты $e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}$. Выбирая коническую окрестность Γ точки θ_0 достаточно малой, можно считать, что $\xi-\Phi_x(x,\,\theta)\neq 0$, $\theta\in\Gamma$, $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1$, $|x-x_0|<\varepsilon$, откуда при тех же x, ξ, θ

$$\operatorname{grad}_x(x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta))\neq 0,$$

что позволяет проделать стандартное интегрирование по частям. В самом деле, ясно, что при некотором $C>0$

$$|\xi-\Phi_x(x,\,\theta)|\geqslant C(|\xi|+|\theta|),\quad \theta\in\Gamma,\ \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1,\ |x-x_0|<\varepsilon.$$

Полагая

$$^tL=-i|\xi-\Phi_x(x,\,\theta)|^{-2}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\Phi_{x_j}(x,\,\theta))\,\frac{\partial}{\partial x_j},$$

мы получим, что $^tLe^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}=e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}$, и потому

$$I_2=\int\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\Gamma_1} e^{i[x\cdot\xi-\Phi(x,\,\theta)]}[L^N\varphi(x,\,\theta)]\,\tilde{u}(\xi)\,dx\,d\xi. \tag{Д1.21}$$

Поскольку для $\tilde{u}(\xi)$ выполнена оценка $|\tilde{u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{N_1}$ при достаточно больших C и N_1, то при достаточно большом N интеграл (Д1.21) становится абсолютно сходящимся и при $\theta \in \Gamma$, $|x-x_0|<\varepsilon$ может быть оценен через $C_p\langle\theta\rangle^{-p}$ при любом p, что вместе с оценкой (Д1.20) дает требуемое утверждение. ■

З а м е ч а н и е Д1.2. Если точка (x_0, ξ_0) и функции φ, Φ зависят от параметра, причем все условия выполнены равномерно, то постоянные C_N в (Д1.18) могут быть выбраны не зависящими от этого параметра.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы Д1.1. 1) Рассмотрим вначале для простоты случай оператора $P=\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_n}$. Пусть $Pu=f$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$. Бихарактеристика символа ξ_n оператора P, проходящая через (x_0, ξ_0), имеет вид $(x_0', (x_0)_n+t, \xi_0)$, где $(x_0)_n$ — n-я координата точки x_0, а x_0' — набор ее первых $(n-1)$ координат, t — параметр вдоль бихарактеристики. Пусть I — интервал этой бихарактеристики, содержащий (x_0, ξ_0) и не пересекающийся с $WF(f)$. Докажем, что либо $I \subset WF(u)$, либо $I \cap WF(u)=\varnothing$.

Пусть даны такие $\varphi(x, \theta)$ и $\Phi(x, \theta)$, как в предложении Д1.5. Положим

$$\varphi_t(x, \theta)=\varphi(x', x_n-t, \theta), \qquad \Phi_t(x, \theta)=\Phi(x', x_n-t, \theta).$$

Тогда $\operatorname{supp}\varphi_t$ близок к $(x_0', (x_0)_n+t)$ и вблизи этой же точки определена функция Φ_t. При этом очевидно, что подбором φ, Φ можно сделать φ_t и Φ_t любыми функциями, для которых условия предложения Д1.5 выполнены для точки $(x_0', (x_0)_n+t, \xi_0)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle = \Big\langle u, \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t e^{-i\Phi_t})\Big\rangle = \Big\langle u, \Big(-\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)(\varphi_t e^{-i\Phi_t})\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_n} u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\Big\rangle = \langle if, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle = R(t, \theta), \quad \text{(Д1.22)}$$

причем из условия $I \cap WF(f)=\varnothing$ и предложения Д1.5 следует, что при интересующих нас значениях t равномерно по t выполнена оценка

$$|R(t, \theta)| \leqslant C_N\langle\theta\rangle^{-N}, \quad \theta \in \Gamma,\ |\theta| \geqslant 1, \quad \text{(Д1.23)}$$

где Γ — достаточно малая коническая окрестность точки θ_0. Но отсюда

$$\langle u, \varphi_{t_1} e^{-i\Phi_{t_1}}\rangle - \langle u, \varphi_{t_2} e^{-i\Phi_{t_2}}\rangle = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle\, dt \right| \leqslant |t_1-t_2|\, C_N\langle\theta\rangle^{-N}. \quad \text{(Д1.24)}$$

Поэтому, если при каком-то t функция $\langle u, \varphi_t e^{-i\Phi_t}\rangle$ быстро убывает по θ в Γ, то это же верно при всех t, что и дает требуемый результат.

2) Пусть теперь P — произвольный классический ПДО 1-го порядка (т. е. $P \in CL^1(X)$) с вещественным главным символом $p_1(x, \xi)$. Мы хотим снова провести выкладку (Д1.22). Для этого мы должны так подобрать зависящие от параметра τ функции φ, Φ, что

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tau}[\varphi e^{-i\Phi}] - {}^tP[\varphi e^{-i\Phi}] \tag{Д1.25}$$

быстро убывает по θ в конусе Γ равномерно по τ, причем при $\tau = 0$ выполнены условия предложения Д1.5 для точки (x_0, ξ_0).

Условие убывания (Д1.25) приводит к уравнению для Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - p_1(x, \Phi_x) = 0, \tag{Д1.26}$$

которое мы можем решить (при малых τ), произвольно задавая $\Phi|_{\tau=0}$. При этом важно отметить, что вдоль бихарактеристики $(x(\tau), \xi(\tau))$ функции $p_1(x, \xi)$ мы будем иметь

$$\Phi_x(x(\tau), \theta_0, \tau) = \xi(\tau) \tag{Д1.27}$$

(см. § 17), если это было выполнено при $\tau = 0$, что мы предполагаем. Для однородных компонент символа φ получаются уравнения переноса, которые решаются опять-таки при произвольном задании $\varphi|_{\tau=0}$ аналогично уравнениям переноса для q_{-j} из § 20. Способ их решения (см. § 17) показывает, что носитель однородных компонент φ переносится вдоль бихарактеристик функции $p_1(x, \xi)$. Благодаря этому дальнейшее рассуждение при малых τ проходит аналогично соответствующему рассуждению для оператора $i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$.

Заметим теперь, что необходимость ограничиться малыми τ не имеет значения, поскольку теорему Д1.1 достаточно доказывать для сколь угодно малых кусков бихарактеристик, ибо тогда по очевидной причине она верна и для больших связных кусков.

3) Рассмотрим, наконец, случай оператора P произвольного порядка m. Пусть Q — классический эллиптический собственный ПДО порядка $1 - m$ с вещественным главным символом $q(x, \xi)$. Положим $P_1 = PQ$. Тогда $P_1 \in CL^1(X)$ и главный символ $p_1(x, \xi)$ оператора P_1 имеет вид

$$p_1(x, \xi) = p_m(x, \xi)\, q(x, \xi).$$

Заметим, что в теореме Д1.1 в силу следствия Д1.4 достаточно рассматривать лишь нулевые бихарактеристики. Но ввиду соотношений

$$(p_1)_\xi = (p_m)_\xi q + p_m \cdot q_\xi = (p_m)_\xi q \quad \text{при } p_m = 0,$$
$$(p_1)_x = (p_m)_x q + p_m \cdot q_x = (p_m)_x q \quad \text{при } p_m = 0,$$

нулевые бихарактеристики функций p_1 и p_m отличаются лишь заменой параметра. Принимая во внимание следствие Д1.5, мы видим, что утверждение теоремы Д1.1 для P вытекает из такого же утверждения для P_1, которое доказано в п. 2). ■

З а д а ч а Д1.1. Пусть A — обобщенная функция, заданная осциллирующим интегралом

$$\langle A,\, \varphi\rangle = \int e^{i\Phi(x,\,\theta)}\, a(x,\,\theta)\, \varphi(x)\, dx\, d\theta,$$

где Φ — невырожденная фазовая функция, $a(x,\,\theta)\in S^m(X\times\mathbb{R}^N)$ (см. § 1). Доказать, что

$$WF(A)\subset\{(x,\,\xi)\in X\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)\colon \exists\theta\in\mathbb{R}^N\backslash 0,\ \Phi'_\theta(x,\,\theta)=0,\ \Phi'_x(x,\,\theta)=\xi\}.$$

З а д а ч а Д1.2. Пусть для двух обобщенных функций $u_1,\, u_2\in\mathscr{D}'(X)$ выполнено условие (Д1.13), обеспечивающее возможность их умножения. Доказать, что

$$WF(u_1u_2)\subset[WF(u_1)+WF(u_2)]\cup WF(u_1)\cup WF(u_2).$$

З а д а ч а Д1.3. Доказать, что для оператора D_n^k при любом натуральном k верна такая же теорема о распространении особенностей, что и для оператора D_n. Какой вид здесь имеет теорема Д1.1?

ДОБАВЛЕНИЕ 2

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Наблюдаемым величинам квантовой механики можно сопоставить операторы вида

$$(A_{(h)}u)(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b\left(\frac{x+y}{2},\, h\xi\right) u(y)\, dy\, d\xi, \qquad (\text{Д}2.1)$$

где параметр $h>0$ есть так называемая постоянная Планка; оператор $A_{(h)}$ корректно определен, например, в $S(\mathbb{R}^n)$, если функция $b(z)$ принадлежит классу $\Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$.

Классическая механика является предельным случаем квантовой, когда постоянная Планка может считаться пренебрежимо малой. Поэтому представляют интерес асимптотические свойства операторов вида (Д2.1) при $h\to 0$; соответствующие асимптотики получили название *квазиклассических.*

Д2.1. Формулировка основного результата

Замена переменной $\xi\to h^{-1}\xi$ переводит (Д2.1) в

$$(A_{(h)}u)(x) = \frac{1}{h^n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi/h} b\left(\frac{x+y}{2},\, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi; \qquad (\text{Д}2.2)$$

здесь символ уже не содержит параметра h, который теперь входит в фазовый множитель.

Будем функцию $b(z)$ называть *h-вейлевским символом* оператора $A_{(h)}$ или, короче, *h-символом* (в этом добавлении не будут использоваться τ-символы гл. IV, поэтому опасность путаницы исключена). Очевидно, 1-символ есть обыкновенный вейлевский символ.

Между h- и 1-символами имеется следующая связь. Сделаем в (Д2.2) замену переменных $x\to\sqrt{h}x$, $y\to\sqrt{h}y$, $\xi\to\sqrt{h}\xi$, после которой (Д2.2) перейдет в

$$(A_{(h)}u)(x\sqrt{h}) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b\left(\sqrt{h}\,\frac{x+y}{2},\, \sqrt{h}\xi\right) u(\sqrt{h}y)\, dy\, d\xi. \qquad (\text{Д}2.3)$$

Введем в пространстве функций на $\mathbb{R}^n$ оператор растяжения

$$T_h\colon f(x)\to h^{n/4} f(\sqrt{h}x). \qquad (\text{Д}2.4)$$

Как легко понять, оператор T_h унитарен в $L^2(\mathbb{R}^n)$. С использованием оператора T_h равенство (Д2.3) может быть приведено к виду $T_h A_{(h)} u = A_{(1)}^{(h)} T_h u$ или

$$A_{(h)} = T_h^{-1} A_{(1)}^{(h)} T_h, \tag{Д2.5}$$

где $A_{(1)}^{(h)}$ — оператор с 1-символом $b^{(h)}(z) = b(\sqrt{h}z)$. Таким образом, оператор с h-символом $b(z)$ унитарно эквивалентен оператору с 1-символом $b^{(h)}(z)$.

Нас будет интересовать квазиклассическая асимптотика собственных значений.

Определение Д2.1. Пусть $A_{(h)}$ — самосопряженный полуограниченный снизу оператор. Через $N_h(\lambda)$ обозначается количество собственных значений оператора, не превосходящих λ (с учетом кратности). Если в интервале $(-\infty, \lambda]$ имеются точки непрерывного спектра оператора $A_{(h)}$, то по определению $N_h(\lambda) = +\infty$.

Замечание Д2.1. Вариационная лемма Глазмана (соотношение (28.1)) остается справедливой и для $N_h(\lambda)$; доказательство (см. § 28) можно с незначительными изменениями перенести на случай $N_h(\lambda)$.

Для того чтобы сформулировать основной результат, нам понадобится следующее

Предложение Д2.1. *Пусть $A_{(h)}$ — оператор с вещественным h-вейлевским символом $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m, m_0}$, $m_0 \geqslant 0$. Тогда при каждом фиксированном $h > 0$ оператор $A_{(h)}$ существенно самосопряжен.*

Доказательство. При $m_0 > 0$ предложение следует из теоремы 26.2. Анализ доказательства теоремы 26.2 показывает, что строгое неравенство $m_0 > 0$ необходимо там только для справедливости включений $A \pm iI \in HG_\rho^{m, m_0}$. В условиях предложения при $m_0 = 0$ и $h = 1$ включения $A \pm iI \in HG_\rho^{m, 0}$ следуют из оценок

$$|b(z) \pm i| > b(z),$$

$$|\partial^\gamma (b(z) \pm i)| \leqslant C_\gamma |b(z)| \, |z|^{-\rho|\gamma|} = \\ = C_\gamma |b(z) \pm i| \, |z|^{-\rho|\gamma|} |b(z)| / |b(z) \pm i| \leqslant C_\gamma |b(z) \pm i| \, |z|^{-\rho|\gamma|}.$$

При $h \neq 1$ нужно воспользоваться (Д2.5) и тем, что $b^{(h)} \in H\Gamma_\rho^{m, m_0}$ (конечно, с другими, чем для $b(z)$, константами в оценках производных). ■

Пусть оператор $A_{(h)}$ имеет вещественный h-символ $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m, 0}$. Так же, как в § 30, изменив, если нужно, знак, можно считать, что $b(z) \geqslant C > 0$ при $|z| \geqslant R_0$.

Положим

$$V(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{b(z)<\lambda} dz. \qquad \text{(Д2.6)}$$

Основной целью этого добавления является доказательство следующей теоремы.

Теорема Д2.1. *Пусть оператор $A_{(h)}$ имеет вещественный h-вейлевский символ $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,0}$, $b(z) \geqslant C > 0$ при $|z| \geqslant R_0$. Пусть λ_0 таково, что $V(\lambda_0) < \infty$. Тогда для почти всех $\lambda < \lambda_0$ и любого $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическая формула*

$$N_h(\lambda) = h^{-n}(V(\lambda) + O(h^{1/2-\varepsilon})). \qquad \text{(Д2.7)}$$

Замечание Д2.2. Между асимптотиками по h при $h \to 0$ и по λ при $\lambda \to +\infty$ имеется тесная связь, которая может быть описана явно, когда символ $b(z)$ однороден: $b(tz) = t^s b(z)$, $t > 0$, $s > 0$. Согласно (Д2.5) оператор с h-символом $b(z)$ подобен оператору с символом $b^{(h)}(z) = h^{s/2} b(z)$, поэтому $N_h(\lambda) = N(h^{-s/2}\lambda)$.

Замечание Д2.3. Теорема Д2.1 является аналогом теоремы 30.1. В формулировке последней, помимо прочего, имелось существенное требование $b(z) \geqslant C|z|^{m_0}$, $C > 0$, $m_0 > 0$. Теорема Д2.1 утверждает меньшую зависимость асимптотики по h от поведения символа на бесконечности.

Д2.2. Идея доказательства теоремы Д2.1

Доказательство теоремы основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 30.1.

Будет построен приближенный спектральный проектор $\mathscr{F}_h$ следующим образом. Пусть χ_λ — характеристическая функция интервала $(-\infty, \lambda]$; мы построим семейство функций $\chi_{h,\lambda}$, сходящихся к χ_λ при $h \to 0$. $\mathscr{F}_h$ — это оператор с h-символом $\chi_{h,\lambda}(b(z))$, где $b(z)$ — h-символ оператора $A_{(h)}$.

Будет доказано, что построенное семейство $\mathscr{F}_h$ обладает следующими свойствами:

1°. $\mathscr{F}_h^* = \mathscr{F}_h$;

2°. $\mathscr{F}_h$ — ядерный оператор, и при $h \to 0$

$$\|\mathscr{F}_h^2 - \mathscr{F}_h\|_1 = O(h^{-n+\varkappa});$$

3°. $\mathscr{F}_h (A_{(h)} - \lambda I)\, \mathscr{F}_h \leqslant Ch^\varkappa$;

4°. $(I - \mathscr{F}_h)(A_{(h)} - \lambda I)(I - \mathscr{F}_h) \geqslant -Ch^\varkappa$;

5°. $\operatorname{Sp} \mathscr{F}_h = h^{-n} V(\lambda)\,(1 + O(h^\varkappa))$;

здесь $0<\varkappa<1/2$, а функция $V(\lambda)$, фигурирующая в формулировке п. 5°, есть некоторая положительная неубывающая функция, определенная на интервале $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$ и дифференцируемая справа в точке λ. Заметим также, что $\operatorname{Im} \mathscr{F}_h \subset D_{A_{(h)}}$, где $D_{A_{(h)}}$ — область определения оператора $A_{(h)}$.

При наличии семейства операторов, обладающих свойствами 1°—5°, основой для получения асимптотической формулы (Д2.7) служит теорема 28.1, перефразированная в новых терминах. Для удобства ссылок сформулируем соответствующий результат.

Предложение Д2.2. *Пусть $A_{(h)}$ — семейство существенно самосопряженных полуограниченных снизу операторов; $\mathscr{F}_h$ — такое семейство операторов, что $\operatorname{Im} \mathscr{F}_h \subset D_{A_{(h)}}$ и выполнены свойства 1°—5°. Тогда при $h \to 0$*

$$N_h(\lambda) = h^{-n}(V(\lambda) + O(h^{\varkappa})).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 28.1.

Упражнение Д2.1. Доказать предложение Д2.2.

Д2.3. Символы и операторы с параметром

Для изучения приближенного спектрального проектора удобно ввести класс символов, зависящих от параметра (ср. п. 29.1).

Определение Д2.2. Через $\Sigma_{\rho,\delta}^{m,\mu}$ обозначается класс функций $a(z, h)$, определенных при $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $0<h\leqslant h_0$, бесконечно дифференцируемых по z и удовлетворяющих оценкам

$$|\partial_z^{\gamma} a(z, h)| \leqslant C_\gamma \langle z\rangle^{m-\rho|\gamma|} h^{\mu-\sigma|\gamma|}. \tag{Д2.8}$$

Здесь $m, \mu, \rho, \sigma \in \mathbb{R}$, $\rho>0$, $\sigma \leqslant 1/2$.

Ясно, что если $a_j \in \Sigma_{\rho_j,\sigma_j}^{m_j,\mu_j}$, $j=1, 2$, то $a_1 a_2 \in \Sigma_{\rho,\sigma}^{m_1+m_2,\mu_1+\mu_2}$, где $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

Заметим, что при каждом фиксированном h, $0<h\leqslant h_0$, из включения $a \in \Sigma_{\rho,\sigma}^{m,\mu}$ следует $a(z, h) \in \Gamma_\rho^m(\mathbb{R}^{2n})$ и формула (Д2.2) корректно определяет класс зависящих от параметра операторов $A(h)$, действующих в $S(\mathbb{R}^n)$ (зависимость от параметра имеется как в символе, так и в фазовом множителе). Соответствующий класс операторов будем обозначать через $S_{\rho,\sigma}^{m,\mu}$.

Из определения Д2.2 следует, что при $\sigma>0$ производные символа могут оцениваться через растущие при $h\to 0$ степени h. Однако влияние растущих степеней h исключается при действии соответствующего h-символу оператора. В частности, верно следующее

Предложение Д2.3. *Пусть $A(h) \in S_{\rho,\sigma}^{0,\mu}$, $\mu>0$, $\sigma<1/2$. Тогда оператор $A(h)$ ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равномерно по h при $0<h\leqslant h_0$.*

Доказательство. Пусть $a(z,\,h)$ — h-символ оператора $A(h)$ и $A^{(h)}_{(1)}(h)$ — оператор с 1-символом $a^{(h)}(z,\,h)=a(\sqrt{h}z,\,h)$. По (Д2.5) операторы $A(h)$ и $A^{(h)}_{(1)}(h)$ унитарно эквивалентны, поэтому

$$||A(h)||=||A^{(h)}_{(1)}(h)||. \tag{Д2.9}$$

Докажем теперь ограниченность оператора $A^{(h)}_{(1)}(h)$. Выберем $0<\rho'<\min(\rho,\,1-2\sigma)$; тогда

$$\begin{aligned}|\,\partial_z^\gamma a^{(h)}(z,\,h)\,|=h^{|\gamma|/2}\Big|\partial_y^\gamma a(y,\,h)\big|_{y=\sqrt{h}z}\Big|\leqslant C_\gamma h^{|\gamma|/2}\langle\sqrt{h}z\rangle^{-\rho|\gamma|}h^{\mu-\sigma|\gamma|}\leqslant\\ \leqslant C_\gamma h^{|\gamma|(1/2-\sigma)+\mu}\langle\sqrt{h}z\rangle^{-\rho'|\gamma|}\leqslant C'_\gamma h^{|\gamma|(1/2-\sigma-\rho'/2)+\mu}\langle z\rangle^{-\rho'|\gamma|}.\end{aligned} \tag{Д2.10}$$

В выкладке (Д2.10) мы воспользовались очевидным при $\varkappa>0$ неравенством

$$(1+\sqrt{h}|\,z\,|)^{-\varkappa}\leqslant C(\sqrt{h}+\sqrt{h}|\,z\,|)^{-\varkappa}=Ch^{-\varkappa/2}\langle z\rangle^{-\varkappa}.$$

Таким образом, $a^{(h)}(z,\,h)\in\Gamma^0_{\rho'}(R^{2n})$ равномерно по h и по теореме 24.3 оператор $A^{(h)}_{(1)}(h)$ ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равномерно по h. ■

Приведем теперь выражение для следа оператора через его h-символ. Из (Д2.5) следует, что

$$\mathrm{Sp}\;A_{(h)}=\mathrm{Sp}\,(T_h^{-1}A^{(h)}_{(1)}T_h)=\mathrm{Sp}\;A^{(h)}_{(1)}. \tag{Д2.11}$$

Воспользовавшись (27.2), получаем

$$\mathrm{Sp}\;A_{(h)}=\int b^{(h)}(x,\,\xi)\,dx\,d\xi=h^{-n}\int b(x,\,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{Д2.12}$$

С помощью такого же рассуждения переносится на случай h-символов оценка ядерной нормы (27.12):

Предложение Д2.4. *Существуют такие постоянные C и N, что для оператора $A(h)$ с h-символом $b(z,\,h)$ выполнена оценка для ядерной нормы*:

$$||A(h)||_1\leqslant Ch^{-n}\sum_{|\gamma|\leqslant N}h^{|\gamma|/2}\int|\,\partial_z^\gamma b(z,\,h)\,|\,dz. \tag{Д2.13}$$

Д2.4. h-антивиковские символы

Для операторов (Д2.2), действие которых зависит от параметра h, имеется следующий аналог антивиковских символов, введенных в § 24.

Всю конструкцию п. 24.1 можно провести, отправляясь, вместо функции $\Phi_0(x)$, от функции

$$\Psi_0(x) = (\pi h)^{-n/4} e^{-x^2/(2h)} = (T_h^{-1}\Phi_0)\,(x).$$

Оператор $A^{(h)}$ с h-антивиковским символом $a(x,\,\xi)$ определяется аналогично (24.9):

$$A_{(h)} = \int a(x,\,\xi)\,Q_{x,\,\xi}\,dx\,đ\xi, \tag{Д2.14}$$

где $Q_{x,\,\xi} = T_h^{-1} P_{x,\,\xi} T_h$ — проекторы, играющие роль проекторов $P_{x,\,\xi}$ в определении (24.9).

Все результаты § 24 могут быть без труда перенесены на случай h-антивиковских символов. В частности, из (Д2.14) следует, что оператор неотрицателен, когда неотрицателен его h-антивиковский символ.

Легко подсчитать, что ядро оператора Q_0 проектирования на вектор Ψ_0 равно $(\pi h)^{-n/2} e^{-(x^2+y^2)/(2h)}$, а h-вейлевский символ $\sigma_0(x,\,\xi)$ оператора Q_0 равен

$$\sigma_0(x,\,\xi) = 2^n e^{-(x^2+\xi^2)/h}. \tag{Д2.15}$$

Воспользовавшись (Д2.14) и (Д2.15), получаем формулу связи между h-вейлевским символом $b(z)$ и h-антивиковским символом $a(z)$:

$$b(z) = (\pi h)^{-n} \int a(z')\,e^{-\frac{|z-z'|^2}{h}}\,dz'. \tag{Д2.16}$$

Из (Д2.16) такими же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 24.1, может быть получен следующий аналог леммы 29.1.

Лемма Д2.1. *Пусть $B(h)$ — оператор с h-антивиковским символом $a(z,\,h) \in \Sigma_{\rho,\,\sigma}^{m,\,\mu}$, и пусть $b(z,\,h)$ — его h-символ. Тогда*

$$a - b = \sum_{0<|\gamma|<N} h^{|\gamma|/2} c_\gamma(\partial_z^\gamma a) + r_N,$$

где $c_\gamma = 0$ при нечетных $|\gamma|$ и $r_N \in \Sigma_{\rho,\,\sigma}^{m-\rho N,\,\mu+(1/2-\sigma)N}$.

Д2.5. Формула композиции

Для операторов из классов $S_{\rho,\,\sigma}^{m,\,\mu}$ верна формула композиции в следующей форме.

Теорема Д2.2. *Пусть $a_j \in \Sigma_{\rho_j,\sigma_j}^{m_j,\mu_j}$, $j = 1,\,2$; $A_j(h)$ — соответствующие операторные функции. Тогда*

$$A_1(h) \circ A_2(h) \in S_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2,\,\mu_1+\mu_2},$$

где $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$, *причем если* $b(z, h)$ *есть* h-*вейлевсяий символ композиции, то*

$$b = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{h}{2}\right)^{|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2) + h^N r_N, \qquad (\text{Д}2.17)$$

где

$$r_N \in \Sigma_{\rho,\,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2),\,\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}. \qquad (\text{Д}2.18)$$

Доказательство. Можно было бы получить доказательство, полностью продублировав доказательство теоремы 29.1. Чтобы не повторять выкладки п. 29.1, мы при доказательстве будем ссылаться там, где это возможно, на отдельные куски доказательств теоремы 29.1.

Воспользуемся соотношением (Д2.5):

$$A_1(h) \circ A_2(h) = T_h^{-1} (A_1(h))_{(1)}^{(h)}\, T_h \circ T_h^{-1} (A_2(h))_{(1)}^{(h)} T_h = \\ = T_h^{-1} [(A_1(h))_{(1)}^{(h)} \circ (A_2(h))_{(1)}^{(h)}]\, T_h.$$

Для символа $b'(x, \xi, h)$ композиции операторов $(A_j(h))_{(1)}^{(h)}$ с символами $a_j^{(h)}(z, h) = a_j(\sqrt{h} z, h)$ согласно выкладкам (29.4)—(29.18) (в них не используется характер зависимости от параметра) можно получить представление

$$b'(x, \xi, h) = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,\beta!}\, 2^{-|\alpha+\beta|} (\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)})\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}) + \tilde r_N. \quad (\text{Д}2.19)$$

Заметим, что

$$(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)})\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}) = h^{|\alpha+\beta|} [(\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1)\,(\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2)]^{(h)}.$$

Поэтому, переходя от 1-вейлевских символов в равенстве (Д2.19) к h-вейлевским согласно (Д2.5), получим конечные слагаемые в (Д2.17).

Оценка остаточного члена (речь пока идет об 1-вейлевском символе), как показано в п. 29.1, сводится к равномерным по $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ оценкам интегралов вида

$$I(x, \xi) = \int e^{2i(y\cdot\zeta - z\cdot\eta)} [\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1^{(h)}(x + \tau_1 y,\, \xi + \eta,\, h)] \times \\ \times [\partial_\xi^\beta D_x^\alpha a_2^{(h)}(x + \tau_2 z,\, \xi + \zeta,\, h)]\, d\eta\, d\zeta\, dy\, dz, \quad (\text{Д}2.20)$$

$$|\alpha + \beta| \geqslant N.$$

Аналогично вышеизложенному мы получаем, что 1-вейлевскому символу $I(x,\xi)$ отвечает h-вейлевский символ

$$J(x,\xi)=h^{|\alpha+\beta|}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}[\partial_\xi^\alpha\, D_x^\beta a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times[\partial_\xi^\beta\, D_x^\alpha a_2(x+\tau_2\sqrt{h}z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,d\!\!{}^-\eta\, d\!\!{}^-\zeta\, dy\, dz,\quad (Д2.21)$$
$$|\alpha+\beta|\geqslant N.$$

Следует доказать включение

$$R_N=h^{-N}J\in\Sigma_{\rho,\sigma}^{m_1+m_2-N(\rho_1+\rho_2),\,\mu_1+\mu_2-N(\sigma_1+\sigma_2)}$$

равномерно по $\tau_1,\,\tau_2\in[0,\,1]$.

Дифференцируя (Д2.21) по x и ξ, получим, что производная $\partial_x^\gamma\partial_\xi^\delta R_N$ является линейной комбинацией выражений вида

$$h^{|\alpha+\beta|-N}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}[\partial_x^{\alpha+\gamma'}\partial_\xi^{\beta+\delta'}a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times[\partial_x^{\beta+\gamma''}\partial_\xi^{\alpha+\delta''}a_2(x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,d\!\!{}^-\eta\, d\!\!{}^-\zeta\, dy\, dz,\quad (Д2.22)$$
$$\gamma'+\gamma''=\gamma,\qquad \delta'+\delta''=\delta.$$

Так же, как и в п. 29.1, интегрированием по частям получим убывающие множители типа $\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}$, $\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}$. Нужно только учесть, что при дифференцировании по y, $\eta\,(z,\,\zeta)$ функции a_1 (соответственно a_2) возникает множитель $\sqrt{h}$. Таким образом, (Д2.22) приведется к линейной комбинации интегралов вида

$$h^{|\alpha+\beta|-N+|\varkappa_1+\varkappa_2|/2}\int e^{2i(y\cdot\zeta-z\cdot\eta)}\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}\times$$
$$\times[\partial_x^{\nu_1+\varkappa_1}a_1(x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h)]\times$$
$$\times[\partial_x^{\nu_2+\varkappa_2}a_2(x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h)]\,d\!\!{}^-\zeta\, dy\, dz,\quad (Д2.23)$$

где

$$\begin{aligned}\nu_1&=\alpha+\beta+\gamma'+\delta', & |\nu_1|&\geqslant N+|\gamma'+\delta'|;\\ \nu_2&=\alpha+\beta+\gamma''+\delta'', & |\nu_2|&\geqslant N+|\gamma''+\delta''|.\end{aligned}\quad (Д2.24)$$

Выражение (Д2.23) оценивается по модулю через

$$h^s\int\langle x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\,\xi+\sqrt{h}\,\eta,\,h\rangle^{m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\times$$
$$\times\langle x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\,\xi+\sqrt{h}\,\zeta,\,h\rangle^{m_2-\rho_2N-\rho_2|\gamma''+\delta''|}\times$$
$$\times\langle y,\,\eta\rangle^{-2M}\langle z,\,\zeta\rangle^{-2M}\,d\!\!{}^-\eta\, d\!\!{}^-\xi\, dy\, dz,\quad (Д2.25)$$

где $s=|\alpha+\beta|-N+|\varkappa_1+\varkappa_2|/2+\mu_1-\sigma_1|\nu_1+\varkappa_1|+\mu_2-\sigma_2|\nu_2+\varkappa_2|$. Если учесть соотношения $\sigma_1,\ \sigma_2\leqslant\sigma<1/2$, $|\alpha+\beta|\geqslant N$, $\gamma'+\gamma''=\gamma$, $\delta'+\delta''=\delta$ и (Д2.24), то показатель s можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}s=\mu_1+\mu_2-\sigma_1|\gamma'+\delta'|-\sigma_2|\gamma''+\delta''|-N(\sigma_1+\sigma_2)+\\+(N-|\alpha+\beta|)(\sigma_1+\sigma_2-1)+|\varkappa_1|(1/2-\sigma_1)+|\varkappa_2|(1/2-\sigma_2)\geqslant\\\geqslant\mu_1+\mu_2-\sigma|\gamma+\delta|-N(\sigma_1+\sigma_2).\end{aligned}$$

Таким образом, степень h в (Д2.25) соответствует утверждению теоремы. Оценим теперь интеграл в (Д2.25) через нужную степень $\langle x,\,\xi\rangle$. Заметим, что он распадается в произведение интегралов

$$I=\int\langle x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\ \xi+\sqrt{h}\,\eta\rangle^{m_1-\rho_1(N+|\gamma'+\delta'|)}\langle y,\ \eta\rangle^{-2M}\,d\!\!{}^{-}\eta\,dy, \qquad (Д2.26)$$

$$I'=\int\langle x+\tau_2\sqrt{h}\,z,\ \xi+\sqrt{h}\,\zeta\rangle^{m_2-\rho_2(N+|\gamma''+\delta''|)}\langle z,\ \zeta\rangle^{-2M}\,d\!\!{}^{-}\zeta\,dz. \qquad (Д2.26')$$

Оценим интеграл (Д2.26). Будем считать, что $m_1-\rho_1N<0$, — в противном случае можно в разложении (Д2.18) взять N' членов так, что $m_1-\rho_1N'<0$, и исследовать остаток $r_{N'}$, отнеся потом к $r_{N'}$ остаток r_N и конечную сумму в пределах $N\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant N'$.

Воспользуемся очевидным неравенством *)

$$\langle x+\tau_1\sqrt{h}\,y,\ \xi+\sqrt{h}\,\eta\rangle^{-\varkappa}\leqslant\langle x,\ \xi\rangle^{-\varkappa}\langle\tau_1\sqrt{h}\,y,\ \sqrt{h}\,\eta\rangle^{\varkappa}, \quad \varkappa>0. \qquad (Д2.27)$$

Применяя (Д2.27) при $\varkappa=|m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'||$ получим для интеграла (Д2.26′) оценку

$$\begin{aligned}I\leqslant\langle x,\ \xi\rangle^{m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\int\langle\tau_1\sqrt{h}\,y,\ \sqrt{h}\,\eta\rangle^{\varkappa}\langle y,\ \eta\rangle^{-2M}\,d\!\!{}^{-}\eta\,dy\leqslant\\\leqslant\langle x,\ \xi\rangle^{m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}\int\langle y,\ \eta\rangle^{\varkappa-2M}\,d\!\!{}^{-}\eta\,dy=C_1\langle x,\ \xi\rangle^{m_1-\rho_1N-\rho_1|\gamma'+\delta'|}.\end{aligned} \qquad (Д2.28)$$

Комбинируя оценку (Д2.28) с аналогичной оценкой для интеграла (Д2.26′), получим нужную степень $\langle x,\,\xi\rangle$ в оценке для интеграла (Д2.24), и включение (Д2.18) доказано. ■

Д2.6. Доказательство теоремы Д2.1

План доказательства таков: сначала строится приближенный спектральный проектор, затем последовательно проверяется выполнение свойств, необходимых для применения предложения Д2.2.

*) Неравенство (Д2.27) есть частный случай неравенства

$$(1+|x+y|+|\xi+\eta|)^m\leqslant(1+|x|+|\xi|)^m(1+|y|+|\eta|)^{|m|}.$$

1. Пусть $\chi(t,\lambda,\delta)$ — функция, введенная в п. 28.6:

$$\chi(t,\lambda,\delta)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при}\quad t\geqslant\lambda+2\delta,\end{cases} \tag{Д2.29}$$

$$|(\partial/\partial t)^k\chi(t,\lambda,\delta)|\leqslant C_k\delta^{-k}. \tag{Д2.30}$$

Выберем $\varkappa=1/2-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и положим

$$e(z,h)=\chi(b(z),\lambda,h^{\varkappa}). \tag{Д2.31}$$

(Мы опускаем несущественный для нас аргумент λ у функции $e(z,h)$.) Оператор $\mathscr{F}_h$ определим как оператор с h-символом $e(z,h)$.

Функция $e(z,h)$ бесконечно дифференцируема по z и

$$e(z,h)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad b(z)\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при}\quad b(z)\geqslant\lambda+2h^{\varkappa}.\end{cases}$$

Оценим производные $e(z,h)$ по z. Продифференцируем по z равенство (Д2.31):

$$\partial_z^{\gamma}(z,h)=\sum_{\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\gamma}c_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}(\partial^{\gamma_1}b(z))\ldots(\partial^{\gamma_k}b(z))\,\frac{\partial^k\chi}{\partial t^k}(t,\lambda,h)\Big|_{t=b(z)}. \tag{Д2.32}$$

Суммирование в (Д2.32) ведется по всевозможным разбиениям γ в сумму $\gamma_1+\ldots+\gamma_k$, где $k\leqslant|\gamma|$. Учитывая (Д2.30) и включение $b\in H\Gamma_{\rho}^{m,0}$, получаем для отдельного слагаемого в (Д2.32) оценку

$$\left|(\partial^{\gamma_1}b)\ldots(\partial^{\gamma_k}b)\left(\frac{\partial^k\chi(t,\lambda,h)}{\partial t^k}\Big|_{t=b(z)}\right)\right|\leqslant Ch^{-k\varkappa}|b|^k\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{k}|\partial^{\gamma_i}b/b|\leqslant Ch^{-k\varkappa}|b|^k(1+|z|)^{-\rho|\gamma|}. \tag{Д2.33}$$

Заметим еще, что на носителе $e(z,h)$

$$|b|<\lambda+h^{\varkappa}. \tag{Д2.34}$$

Поэтому из (Д2.32)—(Д2.34) получаем оценку $|\partial_z^{\gamma}e(z,h)|\leqslant\leqslant Ch^{-k\varkappa}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}$, т. е.

$$e(z,h)\in\Sigma_{\rho,\varkappa}^{0,0}. \tag{Д2.35}$$

2. Мы должны теперь проверить, что для $\mathscr{F}_h$ выполнены все условия предложения Д2.2.

Оператор $\mathscr{F}_h$ симметричен благодаря вещественности символа и ограничен согласно (Д2.35) и предложению Д2.3, следовательно, $\mathscr{F}_h^*=\mathscr{F}_h$. Ядерность $\mathscr{F}_h$ вытекает из предложения Д2.4.

Будем обозначать h-символ любого оператора A через $\sigma(A)$. Чтобы оценить ядерную норму $\|\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h\|_1$, вычислим h-символ оператора $\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h$.

По формуле композиции (Д2.17)

$$\sigma(\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h)=-e(z,\,h)+e(z,\,h)^2+\sum_{|\alpha|+|\beta|<N} c_{\alpha\beta}h^{|\alpha+\beta|}h^{|\alpha+\beta|}(D_x^\alpha\partial_\xi^\beta e)\times \\ \times(D_x^\beta\partial_\xi^\alpha e)+h^N r_N,\qquad h^N r_N\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2\rho N,\,(1-2\varkappa)N}. \quad (Д2.36)$$

Все слагаемые правой части в (Д2.36), кроме r_N, сосредоточены в области $\{z\colon \lambda<b(z)<\lambda+2h^\varkappa\}$, поэтому ядерные нормы соответствующих операторов могут быть по предложению Д2.4 оценены через

$$C[V(\lambda+2h^\varkappa)-V(\lambda)]\,h^{-n}. \quad (Д2.37)$$

Ядерная норма остатка оценивается через $o(h^{-n+\varkappa})$ при достаточно большом N.

Заметим теперь, что $V(\lambda)$ — неубывающая функция; по известной теореме Лебега она почти всюду дифференцируема. Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что рассматриваемое λ принадлежит множеству полной меры, на котором V дифференцируема. Тогда (Д2.37) трансформируется в нужную оценку

$$\|\mathscr{F}_h^2-\mathscr{F}_h\|_1\leqslant C[V'(\lambda)h^\varkappa+o(h^\varkappa)]\,h^{-n}\leqslant Ch^{-n+\varkappa}. \quad (Д2.38)$$

Кроме того, по (Д2.12)

$$\operatorname{Sp}\,\mathscr{F}_h=(2\pi h)^{-n}\int e(z,\,h)\,dz=h^{-n}[V(\lambda)+O(V(\lambda)-V(\lambda+2h^\varkappa))]= \\ =h^{-n}V(\lambda)\,(1+O(h^\varkappa)). \quad (Д2.39)$$

Таким образом, требования 1°, 2° и 5° предложения Д2.2 выполнены ($\mathscr{F}_h^*=\mathscr{F}_h$, (Д2.38) и (Д2.39)).

3. Проверим теперь требование 3° предложения Д2.2. Для этого нам понадобится h-символ оператора $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h$. Вычислим сначала $\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I))$. Имеем

$$\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I))=e(z,\,h)\,(b(z)-\lambda)+ \\ +\sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|<N} h^{|\alpha+\beta|}c_{\alpha\beta}(D_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta e)\,(D_x^\beta\,\partial_\xi^\alpha b)+r_N,\qquad r_N\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{m-2N\rho,\,N(1-\varkappa)}. \quad (Д2.40)$$

Оператор R_N, отвечающий символу r_N, при $m-2N\rho<0$ ограничен и $\|R_N\|=O(h^{N(1-\varkappa)})=o(h^{\varkappa})$. Покажем, что для $\varphi_{\alpha\beta}=h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e)\times$ $\times(\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha b)$ верно включение

$$\varphi_{\alpha\beta}\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2|\alpha+\beta|\rho,\,\varkappa+(1-2\varkappa)|\alpha+\beta|},\qquad|\alpha+\beta|>0.\tag{Д2.41}$$

Для этого стандартным образом построим функцию $\varphi(z,\,h)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, для которой $0\leqslant\varphi(z,\,h)\leqslant 1$,

$$\varphi(z,\,h)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad z\in\operatorname{supp}\,\partial_z e,\\ 0 & \text{при}\quad b(z)\geqslant\lambda+3h^{\varkappa},\ b(z)\leqslant\lambda-h^{\varkappa}\end{cases}$$

и которая строится, как $e(z,\,h)$ в п. 1 настоящего доказательства, с помощью сглаженной характеристической функции $\chi(t,\,\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$ интервала $(\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$ по формуле $\varphi(z,\,h)=\chi(b(z),\,\lambda,\,\lambda+2h^{\varkappa})$.

Аналогично (Д2.33), (Д2.34) можно проверить, что

$$\varphi\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,0}.\tag{Д2.42}$$

Заметим теперь, что при $|\alpha+\beta|>0$

$$\varphi_{\alpha\beta}=h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e)\,[\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha(\varphi\cdot(b-\lambda))].\tag{Д2.43}$$

Покажем, что $\varphi\cdot(b-\lambda)\in\sum_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$. Ясно, что $|\varphi\cdot(b-\lambda)|\leqslant Ch^{\varkappa}$. Оценим производную по z. Имеем

$$\partial_z^\gamma[\varphi\cdot(b-\lambda)]=(\partial^\gamma\varphi)\,(b-\lambda)+\sum_{|\alpha|>0}c_\alpha(\partial^{\gamma-\alpha}\varphi)\,(\partial^\alpha(b-\lambda)).\tag{Д2.44}$$

Для 1-го слагаемого вследствие (Д2.42) есть оценка

$$|(\partial^\gamma\varphi(z,\,h)\,(b(z)-\lambda)|\leqslant Ch^{-\varkappa|\gamma|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}h^{\varkappa};\tag{Д2.45}$$

для слагаемых из суммы в (Д2.44) получаем

$$|(\partial^{\gamma-\alpha}\varphi)\,(\partial^\alpha(b-\lambda))|=|\partial^{\gamma-\alpha}\varphi|\cdot|b|\cdot|(\partial^\alpha b)/b|\leqslant$$
$$\leqslant Ch^{-\varkappa|\gamma-\alpha|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma-\alpha|-\rho|\alpha|}\leqslant Ch^{\varkappa-\varkappa|\gamma|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}.\tag{Д2.46}$$

Оценки (Д2.45), (Д2.46) доказывают включение $\varphi\cdot(b-\lambda)\in\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$, откуда с учетом (Д2.43) следует включение (Д2.41). Таким образом, конечная сумма в (Д2.40) содержится в $\Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-2\rho,\,1-\varkappa}$ и оператор $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)$ представим в виде

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)=Q_1+R,\tag{Д2.47}$$

причем $\|R\|=O(h^{1-\varkappa})=o(h^{\varkappa})$, а $\sigma(Q_1)=e\cdot(b-\lambda)$.

Используя (Д2.47), имеем

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\,\mathscr{F}_h=Q_1\mathscr{F}_h+R_1,\qquad\|R_1\|=o(h^{\varkappa}).\tag{Д2.48}$$

Вычислим символ оператора $Q_1\mathscr{F}_h$:

$$\sigma(Q_1\mathscr{F}_h)=e^2\cdot(b-\lambda)+\sum_{0<|\alpha+\beta|<N} c_{\alpha\beta}h^{|\alpha+\beta|}(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[e\cdot(b-\lambda)])\times(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e)+r_N. \tag{Д2.49}$$

Вводя, как и выше, функцию φ и используя включение $e\cdot\varphi\cdot(b-\lambda)\in\in\Sigma^{0,\varkappa}_{\rho,\varkappa}$, получим, что норма оператора, отвечающего конечной сумме и остатку в (Д2.49), оценивается также через $O(h^{1-\varkappa})$.

Рассмотрим главный член в $-\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h)$ — функцию $q(z,h)=-e(z,h)^2(b(z)-\lambda)$. Для q и ее производных по z справедливы оценки

$$q(z,h)\geqslant -Ch^{\varkappa}; \tag{Д2.50}$$

$$|\partial^\gamma q|=\left|\sum_{|\alpha|>0} c_\alpha(\partial^\alpha b)\,(\partial^{\gamma-\alpha}e^2)+2(b-\lambda)\sum_\alpha c_\alpha(\partial^{\gamma-\alpha}e)(\partial^\alpha e)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{|\alpha|>0} c_\alpha h^{-\varkappa|\gamma-\alpha|}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}|\lambda|+Ch^{\varkappa}h^{-|\gamma|\varkappa}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}\leqslant Ch^{\varkappa(1-|\gamma|)}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}. \tag{Д2.51}$$

Обозначим через P оператор с h-вейлевским символом $q(z,h)$, через Q — с h-антивиковским символом $q(z,h)$. Из (Д2.51) следует, что $h^{|\gamma|/2}\partial^\gamma q\in\Sigma^{-\rho|\gamma|,\,\varkappa+(1/2-\varkappa)|\gamma|}_{\rho,\varkappa}$, поэтому, согласно лемме Д2.1, $\sigma(P-Q)\in\in\Sigma^{-2\rho,\,1-\varkappa}_{\rho,\varkappa}$ и, значит, $\|P-Q\|=O(h^{1-\varkappa})$. Из (Д2.50) ясно, что $Q\geqslant -Ch^{\varkappa}$, но $P=Q+(P-Q)$, следовательно, и $P\geqslant -Ch^{\varkappa}$. Таким образом, для главной части и, стало быть, для всего оператора $\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h$ получена оценка

$$\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h\leqslant Ch^{\varkappa}. \tag{Д2.52}$$

4. Проверим теперь, что

$$(I-\mathscr{F}_h)(A_{(h)}-\lambda I)(I-\mathscr{F}_h)\geqslant -Ch^{\varkappa}. \tag{Д2.53}$$

Символ левой части в (Д2.53) после раскрытия скобок имеет вид

$$\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h)-\sigma(\mathscr{F}_h(A_{(h)}-\lambda I))-\sigma((A_{(h)}-\lambda I)\mathscr{F}_h)+(b(z)-\lambda). \tag{Д2.54}$$

В п. 3 доказательства было показано, что в первых двух слагаемых в (Д2.54) выделяются главные члены $e^2\cdot(b-\lambda)$, и $e\cdot(\lambda-b)$, а операторы, отвечающие остаткам, оцениваются по норме через $O(h^{1-\varkappa})$. Третье слагаемое в (Д2.54) аналогично второму. Таким образом,

$$\sigma((I-\mathscr{F}_h)(A_{(h)}-\lambda I)(I-\mathscr{F}_h))=(1-e)^2(b-\lambda)+r, \tag{Д2.55}$$

и оператор R с h-символом r допускает оценку

$$\|R\| = O(h^{1-\varkappa}).$$

Рассмотрим оператор P с h-символом

$$q(z,\, h) = (1 - e(z,\, h))^2\, (b(z) - \lambda).$$

Рассуждениями, аналогичными использованным в п. 29.3 при доказательстве теоремы о положительности оператора с положительным символом, можно показать, что

$$P = Q_k + A_k. \tag{Д2.56}$$

Здесь оператор Q_k имеет h-антивиковский символ

$$q_k(z,\, h) = q(z,\, h) + \sum_{2 \leqslant |\gamma| < N} c_\gamma h^{|\gamma|/2} \partial_z^\gamma q(z,\, h) + r_N(z,\, h), \tag{Д2.57}$$

где $r_N \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{m-2\rho N,\ (1/2-\varkappa)N}$; поэтому оператор с h-символом r_N можно оценить по норме через $O(h^{1-\varkappa})$.

Для оператора A_k в (Д2.56) имеется включение $A_k \in S_{\rho,\,\varkappa}^{m-2\rho k,\,(1-2\varkappa)k}$, и поэтому $\|A_k\| = O(h^{1-\varkappa})$ при подходящем выборе k.

Сохраним обозначение q_k для правой части (Д2.57) уже без остатка r_N, а Q_k для оператора с соответствующим h-антивиковским символом.

Пусть $\varphi(z,\, h)$ — функция, введенная в предыдущем пункте доказательства. Разобьем q_k на два слагаемых:

$$q_k = \varphi q_k + (1 - \varphi)\, q_k. \tag{Д2.58}$$

В п. 3 показано, что $\varphi \cdot (b - \lambda) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$, откуда ясно, что $\varphi(1-e)^2 \times \times (b - \lambda) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{0,\,\varkappa}$. Выкладками, аналогичными (Д2.44)—(Д2.46) в п. 3, можно показать, что $\varphi \cdot h^{|\gamma|/2} \partial_z^\gamma q(z,\, h) \in \Sigma_{\rho,\,\varkappa}^{-\rho|\gamma|,\,\varkappa+(1/2-\varkappa)|\gamma|}$. Следовательно, оператор с h-антивиковским символом φq_k оценивается по норме через $O(h^\varkappa)$.

Покажем, наконец, что при малых h

$$(1 - \varphi)\, q_k \geqslant 0 \tag{Д2.59}$$

и, значит, $Q_k \geqslant -Ch^\varkappa$. Для этого заметим, что

$$(1 - \varphi)\, q_k = \begin{cases} (1 - \varphi)\Big(b - \lambda + \sum\limits_{2 \leqslant |\gamma| < N} c_\gamma h^{|\gamma|/2} \partial^\gamma b\Big) & \text{при } z \in D_h, \\ 0 & \text{при } z \notin D_h, \end{cases} \tag{Д2.60}$$

где $D_h = \{z\colon b(z, h) \geqslant \lambda + 2h^{\varkappa}\}$. Соотношение (Д2.60) очевидно, так как $(1 - e(z, h))(1 - \varphi(z, h)) = 0$ при $z \notin D_h$ и $1 - e(z, h) = 1$ при $z \in D_h$. Таким образом, в D_h

$$(1 - \varphi)\, q_k = (1 - \varphi)\, (b - \lambda)(1 + \sum c_\gamma h^{|\gamma|/2}(\partial^\gamma b)/(b - \lambda)). \qquad (Д2.61)$$

Заметим теперь, что в области D_h

$$b(z)/(b(z) - \lambda) = (1 - \lambda/b(z))^{-1} \leqslant (1 - \lambda/(\lambda + 2h^{\varkappa}))^{-1} \leqslant Ch^{-\varkappa};$$

отсюда

$$|\, h^{|\gamma|/2}(\partial^\gamma b)/(b - \lambda)\, | \leqslant Ch^{|\gamma|/2 - \varkappa}\langle z\rangle^{-\rho|\gamma|}.$$

Следовательно, сумма в правой части (Д2.61) оценивается через $Ch^{1-\varkappa} = o(1)$, т. е.

$$(1 - \varphi)\, q_k = (1 - \varphi)\, (b - \lambda)\, (1 + o(1)) \geqslant 0.$$

Итак, мы проверили выполнение требований 1°—5° предложения Д2.2 (соотношения (Д2.38), (Д2.39), (Д2.52) и (Д2.53)) и можем применить предложение. Теорема Д2.1 доказана. ■

Д2.7. Поведение $N_h(\lambda)$, когда $V(\lambda) = +\infty$

В теореме Д2.1 рассматривается квазиклассическая асимптотика собственных чисел при $\lambda < \lambda_0$, где $V(\lambda_0) < +\infty$. Включение $b(z) \in H\Gamma_\rho^{m,\,0}$ не исключает существования таких λ, для которых $V(\lambda) = +\infty$ (для символов из $H\Gamma_\rho^{m,\,m_0}$, $m_0 > 0$, такая ситуация невозможна). Дополнением к теореме Д2.1 в этом случае служит следующая

Т е о р е м а Д2.3. *Пусть $b(z)$ удовлетворяет условиям теоремы* Д2.1, *и пусть $V(\lambda) = +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon_0 > 0$*

$$\lim_{h\to 0} h^n N_h(\lambda + \varepsilon_0) = +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого N мы построим пространство $H_{\tilde N}$, на котором выполнено неравенство

$$((A_{(h)} - \lambda I)\, \xi,\, \xi) \leqslant Ch^{\varkappa}(\xi, \xi), \quad \xi \in H_{\tilde N}, \qquad (Д2.62)$$

причем при достаточно малом h

$$\dim H_{\tilde N} \geqslant h^{-n} N. \qquad (Д2.63)$$

Из (Д2.62), (Д2.63) следует по лемме Глазмана неравенство $N_h(\lambda + ch^{\varkappa}) \geqslant h^{-n} N$, которое влечет за собой утверждение теоремы.

Введем множество $\Omega^\lambda = \{z\colon b(z) \leqslant \lambda\}$. Из определения функции $V(\lambda)$ видно, что $V(\lambda) = (2\pi)^{-n}$ mes Ω^λ, так что в условиях теоремы mes $\Omega^\lambda = +\infty$.

Пусть Ω_ε — семейство областей с гладкими границами, обладающее следующими свойствами:

1) Ω_ε ограничены, $\Omega_\varepsilon \subset \Omega^\lambda$;

2) $W_\varepsilon = (2\pi)^{-n}$ mes $\Omega_\varepsilon \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$;

3) $\inf\limits_{x\in\Omega_\varepsilon, y\in\mathbb{R}^{2n}\setminus\Omega^\lambda} |x-y| \geqslant \varepsilon$, т. е. расстояние от Ω_ε до $\partial\Omega^\lambda$ не меньше чем ε.

Мы построим сейчас сглаженную характеристическую функцию множества Ω_ε (это можно сделать по образцу построения в п. 28.6).

Пусть $2h^\varkappa < \varepsilon$ (как всегда $0 < \varkappa < 1/2$), $\psi_\varepsilon(z, h)$ — характеристическая функция $(h^\varkappa)$-оболочки множества Ω_ε. Положим

$$\chi_\varepsilon(z, h) = h^{-2n\varkappa} \int \psi_\varepsilon(y, h)\, \chi_0\left((y-z)\, h^{-\varkappa}\right) dy,$$

где $\chi_0(\nu) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\chi_0 \geqslant 0$, $\chi_0(\nu) = 0$ при $|\nu| \geqslant 1$ и $\int \chi_0(\nu)\, d\nu = 1$.

Очевидно, что

$$\operatorname{supp}\, \chi_\varepsilon \subset \Omega^\lambda. \qquad (Д2.64)$$

Кроме того, легко проверить, что $|\partial_z^\gamma \chi_\varepsilon(z, h)| < C h^{-\varkappa|\gamma|}$, а из этой оценки и из финитности χ_ε следует включение

$$\chi_\varepsilon(z, h) \in \Sigma_{\rho, \varkappa}^{-\infty, 0} \qquad (Д2.65)$$

Пусть $\mathscr{F}_h$ — приближенный спектральный проектор, построенный в п. Д2.6. Обозначим через F_h оператор с h-активиковским символом $e(z, h)$, через $\mathscr{E}_{\varepsilon, h}$ — оператор с h-символом $\chi_\varepsilon(z, h)$ и через $E_{\varepsilon, h}$ — оператор с h-антивиковскнм символом $\chi_\varepsilon(z, h)$. Между операторами $\mathscr{F}_h$, F_h, $\mathscr{E}_{\varepsilon, h}$ и $E_{\varepsilon, h}$ имеются следующие соотношения:

$$\mathscr{F}_h - F_h = R \in S_{\rho, \varkappa}^{-2\rho, 1-2\varkappa}, \quad \|R\| \leqslant C h^{1-2\varkappa}; \qquad (Д2.66)$$

$$F_h \geqslant E_{\varepsilon, h}; \qquad (Д2.67)$$

$$\mathscr{E}_{\varepsilon, h} - E_{\varepsilon, h} = R' \in S_{\rho, \varkappa}^{-\infty, 1-2\varkappa}, \quad \|R'\| \leqslant C h^{1-2\varkappa}. \qquad (Д2.68)$$

Здесь (Д2.66) и (Д2.68) справедливы вследствие леммы Д2.1, (Д2.67) очевидно, так как $\chi_\varepsilon \leqslant e$ благодаря (Д2.64).

Рассмотрим теперь оператор $\mathscr{E}_{\varepsilon, h}$. Так же, как в п. 2 доказательства теоремы Д2.1, рассматривая h-символ оператора $\mathscr{E}_{\varepsilon, h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon, h}$, можно получить оценку

$$\|\mathscr{E}_{\varepsilon, h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon, h}\|_1 \leqslant C(W_{\varepsilon, h} - W_\varepsilon) h^{-n}, \qquad (Д2.69)$$

где $W_{\varepsilon, h}$ — объем $(2h^\varkappa)$-оболочки множества Ω_ε. Но $W_{\varepsilon, h} - W_\varepsilon = O(h^\varkappa)$, поскольку область Ω_ε ограничена и имеет гладкую границу. Поэтому верна оценка

$$\|\mathscr{E}_{\varepsilon, h}^2 - \mathscr{E}_{\varepsilon, h}\|_1 \leqslant C h^{-n+\varkappa}. \qquad (Д2.70)$$

Аналогично получается равенство

$$\operatorname{Sp} \mathscr{E}_{\varepsilon,\,h} = h^{-n} W_\varepsilon (1 + O(h^\varkappa)). \tag{Д2.71}$$

Из (Д2.70) и (Д2.71) так же, как и в леммах 28.2, 28.3, может быть получено асимптотическое выражение для числа $\tilde N$ собственных значений оператора $\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h}$, лежащих на $[1/2,\ 3/2]$:

$$\tilde N = h^{-n} W_\varepsilon (1 + O(h^\varkappa)). \tag{Д2.72}$$

Пространство, натянутое на соответствующие собственные векторы, обозначим через $\mathscr{K}_{\tilde N}$.

Покажем, что пространство $H_{\tilde N} = \mathscr{F}_h \mathscr{K}_{\tilde N}$ обладает свойствами (Д2.62), (Д2.63).

Пусть $\eta \in \mathscr{K}_{\tilde N}$, тогда для оператора $\mathscr{F}_h$ выполнена оценка

$$(\mathscr{F}_h \eta,\ \eta) \geqslant (1/2 + O(h^{1-\varkappa}))\,(\eta,\ \eta). \tag{Д2.73}$$

Действительно, используя (Д2.66)—(Д2.68), получаем,

$$(\mathscr{F}_h \eta,\ \eta) = (F_h \eta,\ \eta) + (R\eta,\ \eta) \geqslant (E_{\varepsilon,\,h} \eta,\ \eta) + (R\eta,\ \eta) = \\ = (\mathscr{E}_{\varepsilon,\,h} \eta,\ \eta) + ((R + R')\eta,\ \eta) \geqslant (1/2 + O(h^{1-\varkappa}))\,(\eta,\ \eta).$$

Воспользуемся неравенством Шварца

$$(\mathscr{F}_h \eta,\ \eta) \leqslant \sqrt{(\mathscr{F}_h \eta,\ \mathscr{F}_h \eta)\,(\eta,\ \eta)};$$

отсюда и из (Д2.73) следует, что

$$\sqrt{(\mathscr{F}_h \eta,\ \mathscr{F}_h \eta)} \geqslant (\mathscr{F}_h \eta,\ \eta)/\sqrt{(\eta,\ \eta)} \geqslant \sqrt{(\eta,\ \eta)}\,(1/2 + O(h^{1-\varkappa})),$$

или

$$(\mathscr{F}_h \eta,\ \mathscr{F}_h \eta) \geqslant [(1/4 + O(h^{1-\varkappa})]\,(\eta,\ \eta). \tag{Д2.74}$$

Пусть теперь $\xi \in H_{\tilde N}$; тогда $\xi = \mathscr{F}_h \eta$, где $\eta \in \mathscr{K}_{\tilde N}$. Вспомним полученное при доказательстве теоремы Д2.1 неравенство

$$\mathscr{F}_h (A_{(h)} - \lambda I)\, \mathscr{F}_h \leqslant C h^\varkappa \tag{Д2.75}$$

(этот факт не зависит от поведения функции $V(\lambda)$).

Из (Д2.74) и (Д2.75) вытекает оценка

$$((A_{(h)} - \lambda I)\,\xi,\ \xi) = ((A_{(h)} - \lambda I)\,\mathscr{F}_h \eta,\ \mathscr{F}_h \eta) \leqslant C h^\varkappa (\eta,\ \eta) \leqslant \\ \leqslant (4 + O(h^{1-\varkappa}))\,(\mathscr{F}_h \eta,\ \mathscr{F}_h \eta)\, C h^\varkappa = O(h^\varkappa)\,(\xi,\ \xi).$$

Таким образом, на $H_{\tilde N}$

$$A_{(h)} - (\lambda + O(h^\varkappa))\, I \leqslant 0.$$

Кроме того, из (Д2.74) следует, что оператор $\mathscr{F}_h$ мономорфен на $\mathscr{K}_{\tilde{N}}$, поэтому

$$\dim H_{\tilde{N}} = \dim \mathscr{K}_{\tilde{N}} = h^{-n} W_\varepsilon (1 + O(h^\varkappa)).$$

Доказательство теоремы завершается ссылкой на то, что объем W_ε, может быть взят сколь угодно большим. ■

ДОБАВЛЕНИЕ 3

ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Д3.1. Операторы Гильберта—Шмидта и норма Гильберта—Шмидта

Определение Д3.1. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ограниченный линейный оператор $K: H_1 \to H_2$ называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если для некоторого ортонормнрованного базиса $\{e_\alpha\}$ пространства H_1

$$\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2 < +\infty. \tag{Д3.1}$$

Множество всех операторов Гильберта—Шмидта $K: H_1 \to H_2$ обозначается $S_2(H_1, H_2)$ или $S_2(H)$ при $H_1 = H_2 = H$. Следующее предложение описывает основные свойства этих операторов.

Предложение Д3.1. 1) *Левая часть* (Д3.1) *не зависит от выбора ортонормированного базиса* $\{e_\alpha\}$ *(квадратный корень из нее называется* нормой Гильберта—Шмидта *оператора* K *и обозначается* $\|K\|_2$*).*

2) $\|K^*\|_2 = \|K\|_2$.

3) $\|K\| \leqslant \|K\|_2$, *где* $\|K\|$ *— обычная операторная норма* K.

4) *Всякий оператор* $K \in S_2(H_1, H_2)$, *компактен.*

5) *Если* K *— компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* H, *то*

$$\|K\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2, \tag{Д3.2}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *— все ненулевые собственные значения* K, *причем каждое повторяется столько раз, какова его кратность.*

6) *Если* $\{e_\alpha\}$ *— ортонормированный базис в пространстве* H_1, *то скалярное произведение*

$$(K, L)_2 = \sum_\alpha (Ke_\alpha, Le_\alpha) \tag{Д3.3}$$

при $K, L \in S_2(H_1, H_2)$ *не зависит от выбора базиса* $\{e_\alpha\}$ *и определяет в* $S_2(H_1, H_2)$, *структуру гильбертова пространства с соответствующей нормой* $\|\cdot\|_2$.

7) *Если* $\mathscr{L}(H_j)$, $j=1, 2$, *означает алгебру всех ограниченных операторов в* H_j, *то* $S_2(H_1, H_2)$ *представляет собой левый* $\mathscr{L}(H_2)$-*модуль и правый* $\mathscr{L}(H_1)$-*модуль, причем*

$$\|AK\|_2 \leqslant \|A\|\,\|K\|_2, \quad A\in\mathscr{L}(H_2), \quad K\in S_2(H_1, H_2), \tag{Д3.4}$$

$$\|KB\|_2 \leqslant \|K\|_2\,\|B\|, \quad B\in\mathscr{L}(H_1), \quad K\in S_2(H_1, H_2). \tag{Д3.5}$$

В частности, $S_2(H)$ — *двусторонний идеал в алгебре* $\mathscr{L}(H)$.

Доказательство. Пусть $\{f_\beta\}$ — ортонормированный базис в H_2. Тогда

$$\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha,\,\beta} |(Ke_\alpha, f_\beta)|^2 = \sum_{\alpha,\,\beta} |(e_\alpha, K^*f_\beta)| = \sum_\beta \|K^*f_\beta\|^2, \tag{Д3.6}$$

откуда следуют пп. 1) и 2). Если теперь $x=\sum\limits_\alpha x_\alpha e_\alpha \in H_1$, то

$$\|Kx\|^2 = \left\|\sum_\alpha x_\alpha Ke_\alpha\right\|^2 \leqslant \left(\sum_\alpha |x_\alpha|\,\|Ke_\alpha\|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_\alpha |x_\alpha|^2\right)\left(\sum_\alpha \|Ke_\alpha\|^2\right) = \|K\|_2^2\,\|x\|^2,$$

откуда следует утверждение п. 3).

Чтобы доказать п. 4), аппроксимируем оператор $K\in S_2(H_1, H_2)$ конечномерными операторами. А именно, пусть $e_1, e_2, \ldots$ — все такие векторы из некоторого ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$, что $Ke_\alpha\neq 0$ (тот факт, что их не более чем счетное множество, вытекает из (Д3.1)). Тогда ясно, что

$$Kx = \sum_{j=1}^\infty (x, e_j)\,Ke_j, \tag{Д3.7}$$

и, полагая $K_Nx=\sum\limits_{j=1}^N (x, e_j)\,Ke_j$, мы получаем, что $\|K-K_N\|^2 \leqslant \leqslant \|K-K_N\|_2^2 = \sum\limits_{j=N+1}^\infty \|Ke_j\|^2 \to 0$ при $N\to\infty$, что и требовалось.

Утверждение п. 5) вытекает из п. 1), если в качестве базиса выбрать базис из собственных векторов оператора K.

Докажем утверждение п. 6). Заметим вначале, что

$$|(Ke_\alpha, Le_\alpha)| \leqslant \|Ke_\alpha\|\,\|Le_\alpha\| \leqslant \frac{1}{2}\,(\|Ke_\alpha\|^2 + \|Le_\alpha\|^2),$$

откуда следует сходимость ряда (Д3.3) при $K, L\in S_2(H_1, H_2)$.

При этом ясно, что $(K, K)_2 = \|K\|_2^2$, откуда следует независимость $(K, L)_2$ от выбора базиса.

Заметим, что алгебраические свойства скалярного произведения для (Д3.3) очевидным образом выполнены и для доказательства п. 6) остается проверить лишь полноту $S_2(H_1, H_2)$ относительно нормы $\|\cdot\|_2$. Это удобнее всего сделать, построив изоморфизм $S_2(H_1, H_2)$ и пространства $l^2(M_1 \times M_2)$, где M_j — множество мощности $\dim H_j$. Пространство $l^2(M)$ для любого множества M состоит из функций f на M, отличных от 0 в не более чем счетном множестве точек, причем $\sum\limits_{\alpha \in M} |f(\alpha)|^2 < +\infty$. Его можно рассматривать как $L^2(M)$, если на M взять σ-алгебру, порожденную одноточечными множествами, и ввести меру на этой σ-алгебре, полагая меру каждой точки равной 1.

Требуемый изоморфизм $S_2(H_1, H_2)$, и $l^2(M_1 \times M_2)$ задается сопоставлением каждому оператору $K \in S_2(H_1, H_2)$ его матрицы $K_{\alpha\beta} = (Ke_\alpha, f_\beta)$, где $\{e_\alpha\}$, $\{f_\beta\}$ — ортонормированные базисы в пространствах H_1 и H_2. Тот факт, что это сопоставление задает изометрический изоморфизм, ясен из выкладки (Д3.6).

Перейдем к доказательству п. 7). Поскольку $\|AKe_\alpha\| \leqslant \|A\| \, \|Ke_\alpha\|$, то оценка (Д3.4) и вместе с ней тот факт, что $S_2(H_1, H_2)$ является левым $\mathscr{L}(H_2)$-модулем, очевидны из определений. Для доказательства оценки (Д3.5), обеспечивающей возможность введения на $S_2(H_1, H_2)$, структуры правого $\mathscr{L}(H_1)$-модуля, нужно перейти к сопряженному оператору:

$$\|KB\|_2 = \|(KB)^*\|_2 = \|B^*K^*\|_2 \leqslant \|B^*\| \, \|K^*\|_2 = \|B\| \, \|K\|_2,$$

что и требовалось. ■

Пусть теперь X, Y — два пространства с мерой, $H_1 = L^2(Y)$, $H_2 = L^2(X)$. Описание операторов $K \in S_2(H_1, H_2)$ в этой ситуации дает

П р е д л о ж е н и е Д3.2. *Операторы $K \in S_2(H_1, H_2)$ — это в точности те операторы, которые могут быть записаны в виде*

$$(Kf)(x) = \int\limits_Y K(x, y) f(y) \, dy \tag{Д3.8}$$

с помощью ядра $K(x, y) \in L^2(X \times Y)$. При этом

$$\|K\|_2^2 = \iint\limits_{X \times Y} |K(x, y)|^2 \, dx \, dy \tag{Д3.9}$$

(в формулах (Д3.8) и (Д3.9) выражения dx и dy означают меры на X и Y).

Доказательство. Пусть $\{e_\alpha(y)\}$ и $\{f_\beta(x)\}$ — ортонормированные базисы в $L^2(Y)$ и $L^2(X)$. Предположим, что $K \in S_2(H_1, H_2)$. Заметим, что $\{f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}\}$ — полная ортонормированная система в $L^2(X\times Y)$ и если положить

$$K(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} (Ke_\alpha, f_\beta)\, f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}, \tag{Д3.10}$$

то $K(x, y) \in L^2(X\times Y)$ и оператор вида (Д3.8) совпадает с оператором K, так как у этих операторов одинаковые матрицы при выбранных базисах $\{e_\alpha\}$ в H_2, и $\{f_\beta\}$ в H_2. Равенство Парсеваля обеспечивает выполнение (Д3.9).

Обратно, если $K(x, y) \in L^2(X\times Y)$ то, разлагая $K(x, y)$ в ряд по системе $\{f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}\}$, мы получим

$$K(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} f_\beta(x)\,\overline{e_\alpha(y)}, \qquad \sum_{\alpha,\beta} |c_{\alpha\beta}|^2 < +\infty.$$

Но тогда ясно, что в базисах $\{e_\alpha\}$, $\{f_\beta\}$ оператор k имеет матрицу $c_{\alpha\beta} = (Ke_\alpha, f_\beta)$, откуда и следует, что $K \in S_2(H_1, H_2)$. ■

Д3.2. Ядерные операторы и след

Определение Д3.2. Пусть H — гильбертово пространство, $S_2(H)$ — идеал операторов Гильберта—Шмидта в H. Пусть $S_1(H) = (S_2(H))^2$ — двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$, являющийся квадратом идеала $S_2(H)$, т. е. состоящий из операторов, имеющих вид конечной суммы:

$$A = \sum_j B_j C_j, \qquad B_j,\ C_j \in S_2(H). \tag{Д3.11}$$

Элементы идеала $S_1(H)$ называются *ядерными операторами* в H.

Предложение Д3.3. 1) *Пусть $A \in S_1(H)$ и $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный базис в H. Тогда*

$$\sum_\alpha |(Ae_\alpha, e_\alpha)| < +\infty \tag{Д3.12}$$

и выражение

$$\mathrm{Sp}\, A = \sum_\alpha (Ae_\alpha, e_\alpha) \tag{Д3.13}$$

не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_\alpha\}$ (оно называется *следом* оператора A). *След — линейный функционал на $S_1(H)$, причем* $\mathrm{Sp}\, A \geqslant 0$ *при $A \geqslant 0$. Скалярное произведение $(K, L)_2$ может быть* *записано через след по формуле*

$$(K,\, L)_2 = \mathrm{Sp}\,(L^*K), \qquad K,\ L \in S_2(H). \tag{Д3.14}$$

2) *Если A — компактный самосопряженный оператор, $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots$ — его ненулевые собственные значения с учетом кратности, то условие $A \in S_1(H)$ равносильно тому, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < +\infty. \tag{Д3.15}$$

При этом

$$\mathrm{Sp}\ A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j. \tag{Д3.16}$$

3) *Если $A \in S_1(H)$, то*

$$\mathrm{Sp}\ A^* = \overline{\mathrm{Sp}\ A}. \tag{Д3.17}$$

4) *Если $A \in S_1(H)$ и $B \in \mathscr{L}(H)$, то*

$$\mathrm{Sp}\,(AB) = \mathrm{Sp}\,(BA). \tag{Д3.18}$$

Доказательство. 1) Если оператор A представлен в виде (Д3.11), то

$$(Ae_\alpha,\, e_\alpha) = \sum_j (B_j C_j e_\alpha,\, e_\alpha) = \sum_j (C_j e_\alpha,\, B_j^* e_\alpha),$$

откуда следуют (Д3.12) и соотношение

$$\sum_\alpha (Ae_\alpha,\, e_\alpha) = \sum_j (C_j,\, B_j^*)_2, \tag{Д3.19}$$

из которого, в частности, ясно, что $\mathrm{Sp}\ A$ не зависит от выбора базиса.

Равенство (Д3.14) очевидно.

2) Пусть теперь $A = A^*$. Если $A \in S_1(H)$, то условие (Д3.15) и соотношение (Д3.16) выполнены, так как в качестве базиса $\{e_\alpha\}$ можно выбрать собственный базис. Обратно, если выполнено (Д3.15) и $\{e_\alpha\}$ — собственный базис, так что $Ae_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$, то, определяя B и C формулами

$$Be_\alpha = \sqrt{|\lambda_\alpha|}\, e_\alpha,\ Ce_\alpha = \lambda_\alpha / \sqrt{|\lambda_\alpha|}\, e_\alpha,$$

мы видим, что $B,\ C \in S_2(H)$ и $A = BC$, так что $A \in S_1(H)$.

3) Проверим (Д3.17). Если оператор A представлен в виде (Д3.11), то $A^* = \sum\limits_j C_j^* B_j^*$ и из (Д3.19)

$$\mathrm{Sp}\ A^* = \sum_j (B_j^*,\, C_j)_2 = \sum_j \overline{(C_j,\, B_j^*)}_2 = \overline{\mathrm{Sp}\ A},$$

что и доказывает (Д3.17).

4) Проверим, наконец, (Д3.18). Пусть вначале B — унитарный оператор. Но тогда операторы AB и BA унитарно эквивалентны, поскольку $AB = B^{-1}(BA)\,B$. Поэтому равенство (Д3.18) для унитарного B вытекает из уже доказанной независимости следа от выбора базиса. Для доказательства (Д3.18) в общем случае заметим, что обе части (Д3.18) линейны по B и имеет место

Лемма Д3.1. *Любой оператор $B \in \mathscr{L}(H)$ является линейной комбинацией четырех унитарных.*

Доказательство. Поскольку можно написать

$$B = B_1 + iB_2, \quad B_1^* = B_1 = \frac{B + B^*}{2}, \quad B_2^* = B_2 = \frac{B - B^*}{2i},$$

то достаточно проверить, что самосопряженный оператор B может быть записан в виде линейной комбинации двух унитарных. Можно считать, что $\|B\| \leqslant 1$. Но тогда искомая запись имеет вид

$$B = \frac{1}{2}\,[B + i\sqrt{I - B^2}] + \frac{1}{2}\,[B - i\sqrt{I - B^2}].$$

Лемма Д3.1, а вместе с ней и предложение Д3.3 доказаны. ■

Д3.3. Полярное разложение оператора

Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Напомним, что ограниченный оператор $U\colon H_1 \to H_2$ называется *частично изометрическим*, если он изометрично отображает $(\mathrm{Ker}\ U)^\perp$ на $\mathrm{Im}\ U$. Отсюда следует, что

$$U^*U = E, \quad UU^* = F, \tag{Д3.20}$$

где E — ортогональный проектор на $(\mathrm{Ker}\ U)^\perp$ в H_1, F — ортогональный проектор на $\mathrm{Im}\ U$ в H_2 (в этом случае $\mathrm{Im}\ U$ — замкнутое подпространство в H_2). Если $\mathrm{Ker}\ U = 0$, $\mathrm{Im}\ U = H_2$, то U является унитарным оператором.

Определение Д3.3. *Полярным разложением* ограниченного оператора $A\colon H_1 \to H_2$ называется его представление в виде

$$A = US, \tag{Д3.21}$$

где S — ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор в H_1, U — такой частично изометрический оператор $U\colon H_1 \to H_2$, что

$$\mathrm{Ker}\ U = \mathrm{Ker}\ S = (\mathrm{Im}\ S)^\perp. \tag{Д3.22}$$

Предложение Д3.4. *Полярное разложение ограниченного оператора $A\colon H_1 \to H_2$ существует и единственно.*

Доказательство. Из (Д3.21) находим $A^* = SU^*$, откуда $A^*A = SU^*US = SES$. Но $ES = S$ в силу (Д3.22), так что

$$A^*A = S^2, \tag{Д3.23}$$

откуда

$$S = \sqrt{A^*A}, \tag{Д3.24}$$

где $\sqrt{A^*A}$ определяется с помощью спектральной теоремы. В самом деле, пусть $C = A^*A$ и B – любой ограниченный самосопряженный оператор в H_1, для которого $B^2 = C$ и $B \geqslant 0$. Докажем, что $B = S$, где S определяется формулой (Д3.24). Будучи функцией от C, оператор S коммутирует с каждым оператором, коммутирующим с C. В частности, $BS = SB$, поскольку $BC = CB = B^3$. Следовательно,

$$(S-B)\,S(S-B) + (S-B)\,B(S-B) = (S^2 - B^2)\,(S-B) = 0.$$

Оба члена в правой части являются неотрицательными операторами, откуда следует, что они оба равны нулю. Поэтому обращается в ноль их разность $(S-B)^3$, откуда $(S-B)^4 = 0$. Отсюда вытекает, что $S - B = 0$, поскольку оператор $S - B$ самосопряжен.

Далее, оператор U однозначно определен формулой (Д3.21) в силу (Д3.22), что доказывает единственность полярного разложения.

Для доказательства существования построим S по формуле (Д3.24) и определим U, полагая

$$Ux = 0 \quad \text{при} \quad x \perp \operatorname{Im} S, \tag{Д3.25}$$

$$U(Sx) = Ax \quad \text{при} \quad x \in H_1. \tag{Д3.26}$$

Для проверки корректности этого определения достаточно доказать, что если $Sx = 0$, то $Ax = 0$. Но это сразу следует из (Д3.23). Более того, из (Д3.23) получается

$$\|Sx\|^2 = (Sx,\, Sx) = (S^2x,\, x) = (A^*Ax,\, x) = (Ax,\, Ax) = \|Ax\|^2,$$

что доказывает частичную изометричность U. ■

Подробнее о спектральной теореме и полярном разложении см., например, Рисс и Секефальви-Надь [1].

Определение Д3.4. Если $A = US$ — полярное разложение A, то мы будем использовать обозначение $S = |A|$.

Предложение Д3.5. *Пусть J — любой левый идеал в алгебре $\mathscr{L}(H)$. Тогда условие $A \in J$ равносильно условию $|A| \in J$.*

Доказательство очевидно из формул $A = U|A|$, $U^*A = |A|$. ■

С л е д с т в и е Д3.1. *Имеем*

$$A \in S_2(H) \Leftrightarrow |A| \in S_2(H),$$
$$A \in S_1(H) \Leftrightarrow |A| \in S_1(H).$$

Пользуясь полярным разложением, можно в добавление к п. 4) предложения Д3.3 доказать

П р е д л о ж е н и е Д3.6. *Если* $A,\ B \in S_2(H)$, *то*

$$\mathrm{Sp}\,(AB) = \mathrm{Sp}\,(BA).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь тождествами

$$4AB^* = (A+B)\,(A+B)^* - (A-B)\,(A-B)^* + \\ + i(A+iB)\,(A+iB)^* - i(A-iB)\,(A-iB)^*,$$

$$4B^*A = (A+B)^*(A+B) - (A-B)^*(A-B) + \\ + i(A+iB)^*(A+iB) - i(A-iB)^*(A-iB),$$

мы видим, что достаточно проверить, что

$$\mathrm{Sp}\,(AA^*) = \mathrm{Sp}\,(A^*A), \quad A \in S_2(H). \tag{Д3.27}$$

Но используя полярное разложение $A = US$, мы видим, что $S \in S_2(H)$, следовательно, $S^2 \in S_1(H)$, и поскольку

$$A^*A = S^2, \quad AA^* = US^2U^*,$$

то в силу предложения Д3.3, п. 4)

$$\mathrm{Sp}\,(AA^*) = \mathrm{Sp}\,(US^2U^*) = \mathrm{Sp}\,(U^*US^2) = \mathrm{Sp}\ S^2 = \mathrm{Sp}\,(A^*A),$$

что и требовалось. ■

Д3.4. Ядерная норма

О п р е д е л е н и е Д3.5. *Ядерной нормой* оператора $A \in S_1(H)$ называется величина

$$\|A\|_1 = \mathrm{Sp}\ |A|. \tag{Д3.28}$$

П р е д л о ж е н и е Д3.7. 1) *Имеют место неравенства*

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1, \qquad A \in S_1(H); \tag{Д3.29}$$

$$\|BA\|_1 \leqslant \|B\|\,\|A\|_1, \quad A \in S_1(H), \quad B \in \mathscr{L}(H); \tag{Д3.30}$$

$$\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1\,\|B\|, \quad A \in S_1(H), \quad B \in \mathscr{L}(H); \tag{Д3.30$'$}$$

$$\|\ \mathrm{Sp}\ A\| \leqslant \|A\|_1, \qquad A \in S_1(H), \tag{Д3.31}$$

и соотношения

$$\|A^*\|_1 = \|A\|_1, \qquad A \in S_1(H); \tag{Д3.32}$$

$$\|A\|_1 = \sup_{\substack{B\in\mathscr{L}(H)\\ \|B\|\leqslant 1}} |\,\mathrm{Sp}\,(BA)|, \quad A \in S_1(H). \tag{Д3.33}$$

2) *Ядерная норма определяет на $S_1(H)$ структуру банахова пространства.*

Доказательство. 1) а) Докажем (Д3.29). Пусть $A = US$ — полярное разложение A. Тогда имеем

$$\|A\|_1 = \|S\|_1 = \mathrm{Sp}\ S, \tag{Д3.34}$$

$$\|A\|_2^2 = \mathrm{Sp}\ S(A^*A) = \mathrm{Sp}\ S^2, \tag{Д3.35}$$

откуда (Д3.29) сводится к неравенству

$$\mathrm{Sp}\ S^2 \leqslant (\mathrm{Sp}\ S)^2, \tag{Д3.36}$$

которое становится очевидным, если $\mathrm{Sp}\ S^2$ и $\mathrm{Sp}\ S$ записать в собственном базисе оператора S.

б) Для доказательства (Д3.32) заметим, что $A^* = SU^*$, $AA^* = US^2U^*$ и $|A^*| = USU^*$, откуда

$$\mathrm{Sp}\ |A^*| = \mathrm{Sp}\,(USU^*) = \mathrm{Sp}\,(U^*US) = \mathrm{Sp}\ S = \mathrm{Sp}\ |A|.$$

в) Докажем теперь (Д3.31). Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный собственный базис оператора S, s_α — собственные значения, т. е.

$$Se_\alpha = s_\alpha e_\alpha. \tag{Д3.37}$$

Имеем

$$\mathrm{Sp}\ A = \sum (USe_\alpha,\, e_\alpha) = \sum\ s_\alpha(Ue_\alpha,\, e_\alpha), \tag{Д3.38}$$

но поскольку $|(Ue_\alpha,\, e_\alpha)| \leqslant 1$, то ясно, что

$$|\ \mathrm{Sp}\ A\,| \leqslant \sum_\alpha\ s_\alpha = \mathrm{Sp}\ S = \|A\|_1.$$

г) Докажем (Д3.30). Пусть $BA = VT$ — полярное разложение оператора BA. Тогда

$$\|BA\|_1 = \mathrm{Sp}\ T = \mathrm{Sp}\,(V^*BA) = \mathrm{Sp}\ (V^*BUS).$$

Заметим теперь, что $\|V^*BU\| \leqslant \|B\|$. Дальнейшее рассуждение проходит аналогично п. в).

д) Оценка (Д3.30$'$) сводится к оценке (Д3.30), поскольку

$$\|AB\|_1 = \|(AB)^*\|_1 = \|B^*A^*\|_1.$$

е) Соотношение (Д3.33) теперь очевидно ввиду оценки

$$|\ \mathrm{Sp}\,(BA)\,| \leqslant \|BA\|_1 \leqslant \|B\|\,\|A\|_1,$$

в которой при $B = U^*$ имеет место равенство.

2) а) Докажем, что ядерная норма $\|\cdot\|_1$ обладает обычными свойствами нормы:

$$\|A' + A''\|_1 \leqslant \|A'\|_1 + \|A''\|_1, \quad A',\ A'' \in S_1(H);$$
$$\|\lambda A\|_1 = |\,\lambda\,|\,\|A\|_1, \quad A \in S_1(H), \quad \lambda \in \mathbb{C};$$
$$\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Не очевидно лишь первое соотношение. Для его доказательства воспользуемся соотношением (Д3.33):

$$\|A' + A''\|_1 = \sup_{\|B\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\ B(A' + A'')\,| = \sup_{\|B\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(BA') + \mathrm{Sp}\,(BA'')\,| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|B\| \leqslant 1} (|\ \mathrm{Sp}\,(BA')\,| + |\ \mathrm{Sp}\,(BA'')\,|) \leqslant \sup_{\substack{\|B'\| \leqslant 1 \\ \|B''\| \leqslant 1}} (|\ \mathrm{Sp}\,(B'A')\,| + |\ \mathrm{Sp}\,(B''A'')\,|) =$$
$$= \sup_{\|B'\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(B'A')\,| + \sup_{\|B''\| \leqslant 1} |\ \mathrm{Sp}\,(B''A'')\,| = \|A'\|_1 + \|A''\|_1.$$

б) Докажем полноту $S_1(H)$ по норме glossary$\|\cdot\|_1\|\cdot\|_1$. Пусть $n = 1, 2, \ldots,$ $A_n \in S_1(H)$ и $\|A_n - A_m\|_1 \to 0$ при $n,\ m \to +\infty$. Тогда в силу (Д3.29) и предложения Д3.1, п. 6) существует такой оператор $A \in S_2(H)$, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A_n - A\|_2 = 0$.

Проверим, что $A \in S_1(H)$. Пусть $A = US$ — полярное разложение A. Положим $C_n = U^* A_n$. Ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} \|C_n - S\|_2 = 0 \tag{Д3.39}$$

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \|C_n - C_m\|_1 = 0. \tag{Д3.40}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированный собственный базис S, s_α — собственные значения. Из (Д3.39) следует, что

$$s_\alpha = (Se_\alpha,\ e_\alpha) = \lim_{n \to \infty} (C_n e_\alpha,\ e_\alpha). \tag{Д3.41}$$

Для доказательства того, что $A \in S_1(H)$, достаточно проверить, что $\sum\limits_\alpha s_\alpha < +\infty$. Это в свою очередь, благодаря (Д3.41), вытекает из оценки

$$\sup_n \sum_\alpha |\,(C_n e_\alpha,\ e_\alpha)\,| < +\infty, \tag{Д3.42}$$

верной в силу неравенства

$$\sum_{\alpha} |(C_n e_\alpha, e_\alpha)| \leqslant \|C\|_1, \quad C \in S_1(H), \tag{Д3.43}$$

легко выводимого из (Д3.33).

Остается доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_1 = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем столь большое N, что

$$\|A_m - A_n\|_1 \leqslant \varepsilon, \quad m, \ n \geqslant N. \tag{Д3.44}$$

Проверим, что

$$\|A_n - A\|_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N. \tag{Д3.45}$$

Из оценки (Д3.43) вытекает, что для любого $B \in \mathscr{L}(H)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sp}(BA_n) = \operatorname{Sp}(BA).$$

Но в силу (Д3.44) отсюда следует, что

$$|\operatorname{Sp}(BA_n) - \operatorname{Sp}(BA)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N,$$

если $\|B\| \leqslant 1$. Остается воспользоваться соотношением (Д3.33), и мы приходим к требуемому (Д3.45). ■

Д3.5. Выражение следа через ядро оператора

Вопрос о выражении следа оператора через ядро очень прост с формальной точки зрения, но труден технически (трудно обосновать легко находимую формально формулу). В этом пункте мы приведем формальную схему, которая в каждом конкретном случае должна детально обосновываться.

Пусть X — пространство с мерой dx, K — ядерный оператор в $L^2(X)$ с ядром $K(x, y)$. Мы можем записать K в виде

$$K = L_1 L_2, \quad L_1, \ L_2 \in S_2(L^2(X)) \tag{Д3.46}$$

(это, например, можно сделать так: пусть $K = US$ — полярное разложение оператора K; тогда можно взять $L_1 = U\sqrt{S}$, $L_2 = \sqrt{S}$). Обозначим через $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$ ядра операторов L_1, L_2. Тогда формально имеем

$$K(x, y) = \int L_1(x, z)\, L_2(z, y)\, dz. \tag{Д3.47}$$

Поскольку мы можем также записать $K=(L_1^*)^*L_2$, а оператор L_1^* имеет ядро $L_1^*(x,\,y)=\overline{L_1(y,\,x)}$, то из предложения Д3.3 (формула (Д3.14)) и из предложения Д3.2, гарантирующего равенство

$$(K_1,\,K_2)_2=\int K_1(x,\,y)\,\overline{K_2(x,\,y)}\,dx\,dy \tag{Д3.48}$$

(где $K_j\in S_2(L^2(X))$, $K_j(x,\,y)$ — ядра операторов K_j), мы находим

$$\operatorname{Sp}\,K=(L_2,\,L_1^*)_2=\int L_1(y,\,x)\,L_2(x,\,y)\,dx\,dy=\int L_1(x,\,z)\,L_2(z,\,x)\,dz\,dx, \tag{Д3.49}$$

или

$$\operatorname{Sp}\,K=\int K(x,\,x)\,dx. \tag{Д3.50}$$

Фактическое обоснование формальных выкладок (Д3.47)—(Д3.50) может быть проведено, например, в случае, когда X — компактное многообразие с краем, dx — мера на X, заданная с помощью положительной гладкой плотности, и ядро $K(x,\,y)$ непрерывно. Одно рассуждение такого сорта, основанное на теореме Мерсера, было проведено в § 13 в доказательстве теоремы 3.2. Отметим основную трудность обоснования: ядро $K(x,\,y)$ определено лишь с точностью до множества меры 0 в $X\times X$, а в (Д3.50) входит ограничение $K(x,\,y)$ на диагональ в $X\times X$, являющуюся множеством меры 0 в $X\times X$.

Один из вариантов такого обоснования — получить интеграл (Д3.50) как предел интегралов по малым окрестностям диагонали, нормированных соответствующим множителями (см. Гохберг и Крейн [1], гл. III, § 10). Мы опускаем соответствующие подробности, так как они не используются в тексте книги.

Задача Д3.1. Доказать, что

$$\|AB\|_1\leqslant\|A\|_2\,\|B\|_2,\qquad A,\ B\in S_2(H).$$

Задача Д3.2. Доказать, что

$$\|B\|=\sup_{\substack{A\in S_1(H)\\ \|A\|_1\leqslant 1}}|\ \operatorname{Sp}(AB)\,|.$$

Задача Д3.3. Пусть J — двусторонний идеал в $\mathscr{L}(H)$. Пусть $0\leqslant A\leqslant B$ и $B\in J$. Доказать, что $A\in J$.

Указание. Доказать, что $A^{1/2}=CB^{1/2}$, где $C\in\mathscr{L}(H)$ и $\|C\|\leqslant 1$.