ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 9. Псевдодифференциальные операторы с параметром. Резольвента

9.1. Определение и простейшие свойства. Пусть Λ — некоторое подмножество комплексной плоскости (в приложениях это, как правило, угол с вершиной в точке 0). В спектральной теории полезно рассматривать операторы, зависящие от параметра $\lambda \in \Lambda$ (примером такого оператора является резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$).

Мы введем вначале необходимые классы символов.

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть на $X \times \mathbb{R}^N \times \Lambda$ задана функция $a(x, \theta, \lambda)$, $x \in X$, $\theta \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$.

Определение 9.1. Пусть m, ρ, δ, d — действительные числа, причем $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $0 < d < +\infty$. *Класс* $S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda)$ состоит из таких функций $a(x, \theta, \lambda)$, что

1) $a(x, \theta, \lambda_0) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ при каждом фиксированном $\lambda_0 \in \Lambda$;

2) для любых мультииндексов α, β и для любого компакта $K \subset X$ существуют такие постоянные $C_{\alpha,\beta,K}$, что при $x \in K$, $\theta \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$ справедлива оценка

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x, \theta, \lambda)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1 + |\theta| + |\lambda|^{1/d})^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{9.1}$$

Как обычно, мы полагаем

$$S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times \mathbb{R}^N, \Lambda)$$

(правая часть не зависит от ρ, δ и d).

Если $a(x, y, \xi, \lambda) \in S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X \times X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$, то по функции $a(x, y, \xi, \lambda)$ можно построить ПДО A_λ, зависящий от параметра $\lambda \in \Lambda$:

$$(A_\lambda u)(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi, \lambda)\, u(y)\, dy\, đ\xi, \tag{9.2}$$

$u \in C_0^\infty(X)$. Мы будем писать в этом случае, что

$$A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda).$$

Отметим, что $A_\lambda \in L^{-\infty}(X, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda$ оператор A_λ имеет гладкое ядро $K_\lambda(x, y)$ и существуют такие постоянные $C^{(N)}_{\alpha,\beta,K}$ (K — компакт в X, α, β —

мультииндексы, N — натуральное число), что выполнены оценки

$$|\partial_x^\alpha\,\partial_y^\beta K_\lambda(x,\,y)|\leqslant C^{(N)}_{\alpha,\,\beta,\,K}(1+|\,\lambda\,|)^{-N},\qquad x,\,y\in K. \tag{9.3}$$

Многие из утверждений о ПДО без параметра (см. §§ 3–7) могут быть доказаны с учетом зависимости от λ. Мы укажем сейчас несколько таких утверждений, необходимых для дальнейшего.

Прежде всего, заметим, что на символы, зависящие от параметра, переносится вся теория асимптотического суммирования (определение 3.4 и предложения 3.5 и 3.6). Соответствующие формулировки получаются заменой $S^m_{\rho,\,\delta}(X\times\mathbb{R}^N)$ на $S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X\times\mathbb{R}^N,\,\Lambda)$, а доказательства, получающиеся почти дословным повторением рассуждений п. 3.3, предоставляются читателю в виде упражнения. Укажем лишь, что роль $\langle\theta\rangle$ в этих доказательствах (как и в дальнейшем) играет здесь $(1+|\,\theta\,|^2+|\,\lambda\,|^{2/d})^{1/2}$.

Далее, будем называть оператор $A_\lambda\in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$ *собственным*, если он собственный равномерно по λ, т. е. существует такое замкнутое множество $L\subset X\times X$, имеющее собственные проекции на оба сомножителя в $X\times X$, что $\operatorname{supp}\,K_{A_\lambda}\subset L$ при всех $\lambda\in\Lambda$.

Отметим, что всякий оператор $A\in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$ может быть разложен в сумму $A=A_1+R_1$, где оператор A_1 (зависящий от параметра) является собственным в описанном смысле, а $R_1\in L^{-\infty}_{\rho,\,\delta;\,d}(X,\,\Lambda)$. Для собственных, зависящих от параметра ПДО A_λ определен символ $\sigma_{A_\lambda}(x,\,\xi)=\sigma_A(x,\,\xi,\,\lambda)$, для которого верна теорема типа 3.1. Разумеется, формулу (3.21) надо понимать с учетом параметра, т. е.

$$\sigma_A(x,\,\xi,\,\lambda)-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\,D_y^\alpha a(x,\,y,\,\xi,\,\lambda)|_{y=x}\in S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\,\delta;\,d}(X\times\mathbb{R}^n,\,\Lambda).$$

Аналогично обобщаются теоремы 3.2—3.4 о транспонированном и сопряженном операторах и о композиции.

Упражнение 9.1. Провести аккуратно все рассуждения § 3 для случая символов и операторов, зависящих от параметра.

Далее, повторяя рассуждения § 4, можно при $1-\rho\leqslant\delta<\rho$ ввести классы $L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(M,\,\Lambda)$ на многообразии M. Перейдем теперь к рассмотрению гипоэллиптичности и эллиптичности.

Введем класс $HS^{m,\,m_0}_{\rho,\,\delta;\,d}(X\times\mathbb{R}^n,\,\Lambda)$ символов $\sigma(x,\,\xi,\,\lambda)$ (мы будем называть их *гипоэллиптическими с параметром*), принадлежащих $S^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X\times\mathbb{R}^n,\,\Lambda)$ и удовлетворяющих оценкам

$$C_1(|\,\xi\,|+|\,\lambda\,|^{1/d})^{m_0}\leqslant|\,\sigma(x,\,\xi,\,\lambda)\,|\leqslant C_2(|\,\xi\,|+|\,\lambda\,|^{1/d})^m, \tag{9.4}$$

$x \in K$ (K — компакт в X), $|\xi| + |\lambda| \geqslant R$, $C_1 > 0$, R, C_1, C_2 могут зависеть от K;

$$\left|\left[\partial_\xi^\alpha \, \partial_x^\beta \sigma(x, \xi, \lambda)\right] \sigma^{-1}(x, \xi, \lambda)\right| \leqslant C_{\alpha, \beta, K}(|\xi| + |\lambda|^{1/d})^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \tag{9.5}$$

$x \in K$, $|\xi| + |\lambda| \geqslant R$ (здесь, как и выше, R может зависет от K).

Через $HL^{m, m_0}_{\rho, \delta; d}(X, \Lambda)$ будем обозначать класс собственных ПДО (зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda$), символы которых принадлежат $HS^{m, m_0}_{\rho, \delta; d}(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$. Имеет место аналог теоремы 5.1: если $A_\lambda \in$ $\in HL^{m, m_0}_{\rho, \delta; d}(X, \Lambda)$, то существует такой оператор $B_\lambda \in HL^{-m_0, -m}_{\rho, \delta; d}(X, \Lambda)$, называемый *параметриксом* оператора A_λ, что

$$B_\lambda A_\lambda = I + R'_\lambda, \quad A_\lambda B_\lambda = I + R''_\lambda, \tag{9.6}$$

где R'_λ, $R''_\lambda \in L^{-\infty}(X, \Lambda)$. Это же утверждение верно и в случае, когда X — многообразие.

Упражнение 9.2. Доказать только что сформулированный аналог теоремы 5.1.

Естественно рассмотреть еще классические ПДО, зависящие от параметра. Соответствующие символы $a(x, \xi, \lambda)$ допускают асимптотические разложения (при $|\xi| + |\lambda|^{1/d} \geqslant 1$) вида

$$a(x, \xi, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m-j}(x, \xi, \lambda), \tag{9.7}$$

где $a_{m-j}(x, \xi, \lambda)$ положительно однородна по $(\xi, \lambda^{1/d})$ порядка $m - j$, т. е.

$$a_{m-j}(x, t\xi, t^d\lambda) = t^{m-j} a_{m-j}(x, \xi, \lambda), \tag{9.8}$$

если $t > 0$, $\lambda \in \Lambda$ и $t^d\lambda \in \Lambda$. Здесь m может быть любым комплексным числом. Этот класс символов будем обозначать через $CS^m_d(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$, а соответствующий класс операторов — через $CL^m_d(X, \Lambda)$. Этот класс устойчив относительно взятия композиции, транспонированного и сопряженного операторов.

Оператор $A_\lambda \in CL^m_d(X, \Lambda)$ мы будем называть *эллиптическим с параметром*, если он собственный и

$$a_m(x, \xi, \lambda) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in X \text{ и } |\xi| + |\lambda|^{1/d} \neq 0. \tag{9.9}$$

Отсюда очевидным образом следует включение $A_\lambda \in HL^{m, m}_{1, 0; d}(X, \Lambda)$.

У классического эллиптического оператора с параметром существует параметрикс $B_\lambda \in CL^{-m}_d(X, \Lambda)$, также являющийся эллиптическим оператором с параметром.

Пример 9.1. Пусть A — дифференциальный оператор в X порядка m, I — тождественный оператор. Тогда $A-\lambda I \in CL^m_m(X, \mathbb{C})$, причем главный символ здесь дается формулой

$$a_m(x, \xi, \lambda) = a_m(x, \xi) - \lambda, \tag{9.10}$$

где $a_m(x, \xi)$ — главный символ оператора A. Если Λ — такой замкнутый угол в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершиной в точке 0, что $a_m(x, \xi)$ при $|\xi| = 1$ не принимает значений в Λ, то оператор $A - \lambda I$ эллиптичен с параметром (и, в частности, принадлежит $HL^{m,\,m}_{1,\,0;\,m}(X, \Lambda)$).

9.2. Нормы операторов с параметром. Мы будем рассматривать в этом пункте два варианта операторов с параметром:

1) операторы A_λ в $\mathbb{R}^n$, у которых $\operatorname{supp} K_{A_\lambda}$ лежит в фиксированном компакте $\hat{K} \subset \mathbb{R}^{2n}$ (при этом $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$);

2) операторы на замкнутом многообразии M (при этом, как всегда, предполагается, что $1 - \rho \leqslant \delta < \rho$).

В дальнейшем мы будем писать $A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, имея в виду, что $X = \mathbb{R}^n$ или $X = M$ и выполнены условия 1) или 2).

Обозначим через $\|A\|_{s,\,s-l}$ норму оператора A, рассматриваемого как оператор из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-l}(\mathbb{R}^n)$ или из $H^s(M)$ в $H^{s-l}(M)$ (здесь s, l — вещественные числа). Наша цель — изучить зависимость $\|A_\lambda\|_{s,\,s-l}$ от λ при больших $|\lambda|$.

Теорема 9.1. *Пусть* $A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, $l \geqslant m$ *и* $s, l \in \mathbb{R}$. *Пусть одно из чисел* δ, s, $s - l$ *равно* 0. *Тогда*

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} \leqslant C_{s,\,l}(1 + |\lambda|^{1/d})^m, \quad \text{если} \quad l \geqslant 0, \tag{9.11}$$

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} \leqslant C_{s,\,l}(1 + |\lambda|^{1/d})^{-(l-m)}, \quad \text{если} \quad l \leqslant 0. \tag{9.12}$$

Следствие 9.1. *Если* $A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(X, \Lambda)$, *где* $m \leqslant 0$, *то*

$$\|A_\lambda\| \leqslant C(1 + |\lambda|^{1/d})^m, \tag{9.13}$$

где $\|A_\lambda\|$ *означает операторную норму* A_λ *в* $L^2(X)$.

Лемма 9.1 (Лемма Шура). *Если* A — *оператор с таким интегральным ядром* K_A, *что*

$$\sup_x \int |K_A(x, y)|\, dy \leqslant C, \quad \sup_y \int |K_A(x, y)|\, dx \leqslant C,$$

то

$$\|A\colon L^2 \to L^2\| \leqslant C.$$

(Эта лемма верна для интегральных операторов в L^2 *на любом пространстве с мерой и даже для интегральных операторов* $L^2(Y) \to \to L^2(X)$ *для любых пространств с мерой* X, Y.)

Доказательство. Согласно неравенству Коши—Буняковского мы получаем

$$|Au(x)|^2 \leqslant \left(\int |K_A(x,\,y)||u(y)|\,dy\right)^2 =$$
$$= \left(\int |K_A(x,\,y)|^{1/2}|K_A(x,\,y)|^{1/2}|u(y)|\,dy\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int |K_A(x,\,y)|\,dy \int |K_A(x,\,y)|\,|u(y)|^2\,dy \leqslant C \int |K_A(x,\,y)|\,|u(y)|^2\,dy.$$

Интегрируя по x и меняя порядок интегрирований, мы получаем требуемую оценку нормы. ■

Доказательство теоремы 9.1. 1. Отметим прежде всего, что разбиение единицы сводит случай $X=M$ к случаю $X=\mathbb{R}^n$, который мы будем сейчас рассматривать.

2. Рассмотрим вначале случай $s=l=m=0$. Утверждение теоремы сводится к оценке

$$\|A_\lambda\| \leqslant C, \tag{9.14}$$

доказательство которой получается дословным повторением рассуждений § 6 (мы рекомендуем читателю проделать это в качестве упражнения). Отметим здесь, что оценку (9.14) можно было бы доказать, прямо используя результаты § 6, если бы постоянные

$$C_{\alpha,\beta}(\lambda) = \sup_{x,\,\xi} |\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta a(x,\,\xi,\,\lambda)|\,\langle\xi\rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \tag{9.15}$$

были ограничены при $|\lambda| \to +\infty$. Это, очевидно, вытекает из оценок (9.1) при $\delta=0$, но при $\delta>0$ часть констант $C_{\alpha,\beta}(\lambda)$ может расти при $|\lambda| \to +\infty$. Поэтому при $\delta>0$ здесь действительно необходимо повторение рассуждений § 5.

3. Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}^n$ стандартную операторную функцию $\Phi_m(\lambda) \in L^m_{1,\,0;\,d}(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{C})$ с символом $\varphi_m(x,\,\xi,\,\lambda) = (1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{m/2}$. Этот ПДО с параметром будет нам полезен, хотя он и не удовлетворяет условию 1).

Оценим норму $\Phi_m(\lambda)$. Оператор $\Phi_m(0)$ осуществляет изометрический изоморфизм $H^m(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$\|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} = \|\Phi_{s-l}(0)\,\Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-s}(0)\|.$$

Но $\Phi_{s-l}(0)\,\Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-s}(0) = \Phi_m(\lambda)\,\Phi_{-l}(0)$ есть просто оператор умножения преобразования Фурье $\tilde{u}(\xi)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ на функцию $(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{m/2}(1+|\xi|^2)^{-l/2}$, и его норма поэтому равна

$$\psi_{ml}(\lambda) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{m/2}(1+|\xi|^2)^{-l/2}.$$

Имеем, очевидно,

$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\,\xi\,| + |\,\lambda\,|^{1/d})^m \, (1 + |\,\xi\,|)^{-l},$$

где C зависит лишь от m и l (но не от λ).

Теперь из легко проверяемого соотношения

$$\sup_{x \geqslant 0} (1 + x + t)^m (1 + x)^{-l} = \begin{cases} (1+t)^m, & \text{если} \quad l \geqslant 0, \\ C_{ml} t^{m-l}, & \text{если} \quad l \leqslant 0 \quad \text{и} \quad t \geqslant R_{ml} \end{cases}$$

(всюду подразумевается, что $m \leqslant l$), вытекает, что

$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C_{ml}(1 + |\,\lambda\,|^{1/d})^m, \qquad \text{если} \quad l \geqslant 0,$$
$$\psi_{ml}(\lambda) \leqslant C_{ml}(1 + |\,\lambda\,|^{1/d})^{m-l}, \qquad \text{если} \quad l \leqslant 0,$$

т. е. для $\Phi_m(\lambda)$ справедлива одна из оценок норм (9.11), (9.12), как утверждается в формулировке теоремы.

4. Рассмотрим теперь общий случай $A_\lambda \in L^m_{\rho,\,\delta;\,d}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$. Имеем, очевидно,

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} = \|\Phi_m(\lambda) \cdot (\Phi_{-m}(\lambda) \cdot A_\lambda)\|_{s,\,s-l} \leqslant \\ \leqslant \|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} \cdot \|\Phi_{-m}(\lambda) A_\lambda\|_{s,\,s} \qquad (9.16)$$

и аналогично

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-l} = \|(A_\lambda \Phi_{-m}(\lambda))\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l} \leqslant \\ \leqslant \|A_\lambda \cdot \Phi_{-m}(\lambda)\|_{s-l,\,s-l} \|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l}. \qquad (9.17)$$

Учитывая уже доказанную оценку нормы $\|\Phi_m(\lambda)\|_{s,\,s-l}$, мы видим, что для окончания доказательства теоремы при $s = 0$ или $s - l = 0$ достаточно проверить, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda) A_\lambda\| \leqslant C, \qquad \|A_\lambda \cdot \Phi_{-m}(\lambda)\| \leqslant C. \qquad (9.18)$$

5. Определим $\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)$ как оператор с ядром Л. Шварца, полученным с помощью умножения ядра оператора $\Phi_{-m}(\lambda)$ на $\varphi(x-y)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)$ является равномерно собственным ПДО, принадлежащим классу $L^m_{1,\,0;\,d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Запишем

$$\Phi_{-m}(\lambda) = \tilde{\Phi}_{-m}(\lambda) + R_{-m}(\lambda) \qquad (9.19)$$

и исследуем остаточный член $R_{-m}(\lambda)$, который имеет ядро Л. Шварца $K_{R_{-m}}$, обращающееся в 0 в ε-окрестности диагонали. Ясно, что он является оператором свертки, так как $K_{R_{-m}}$ зависит только от $x - y$

и λ. Из построения оператора $R_{-m}(\lambda)$ вытекает, что $K_{R_{-m}}(x, y; \lambda) = r_{-m}(x-y, \lambda)$, где

$$r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}(1-\varphi(z))\,(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\,đ\xi,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ в окрестности точки 0.

Теперь легко доказать, что $r_{-m}(\cdot, \lambda) \in S(\mathbb{R}^n)$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, все полунормы функции $r_{-m}(\cdot, \lambda)$ в $S(\mathbb{R}^n)$ убывают при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $|\lambda|$. В самом деле, применяя стандартное интегрирование по частям, мы получаем

$$r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}|z|^{-2N}(1-\varphi(z))\left[(-\Delta_\xi)^N(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\right]đ\xi,$$

следовательно,

$$z^\alpha D_z^\beta r_{-m}(z, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} z^\alpha D_z^\beta\left[e^{iz\cdot\xi}|z|^{-2N}(1-\varphi(z))\right]\times$$
$$\left[(-\Delta_\xi)^N(1+|\xi|^2+|\lambda|^{2/d})^{-m/2}\right]đ\xi,$$

для любого целого $N \geqslant 0$ и любых фиксированных мультииндексов α, β.

Подинтегральное выражение можно оценить через

$$C(1+|z|)^{|\alpha|-2N}(1+|\xi|)^{|\beta|}(1+|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{-m-2N},$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Мы можем предположить, что $m+2N \geqslant 0$ и использовать очевидное неравенство

$$(1+|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{-m-2N} \leqslant (1+|\xi|)^{-m/2-N}(1+|\lambda|^{1/d})^{-m/2-N},$$

что приведет к оценке

$$|z^\alpha D_z^\beta r_{-m}(z, \lambda)| \leqslant C_{\alpha\beta N}(1+|\lambda|^{1/d})^{-m/2-N},$$

верной при достаточно большом N и приводящей к желаемому результату.

6. Теперь мы приведём эскиз доказательства оценок типа (9.18) для $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$.

Напомним, что, как мы предположили, ядра операторов A_λ сосредоточены в фиксированном (не зависящем от λ) компактном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

а) Заметим, что рассуждения из доказательства ограниченности (см., например, предложение (7.5)) приводят к оценке

$$\|A_\lambda\|_{s,\,s-m} \leqslant C(1+|\lambda|)^M,$$

где $M = M(s, A)$ не зависит от λ. Это — грубая оценка, и её легко получить, повторяя доказательство предложения 7.5 и соответствующих результатов из параграфа § 6.

Заметим теперь, что оператор $R_{-m}(\lambda)$ является бесконечно сглаживающим в соболевской шкале $H^s(\mathbb{R}^n)$. Точнее,

$$\|R_{-m}(\lambda)\|_{s,\,t} \leqslant C_{s,\,t,\,N}(1 + |\lambda|)^{-N}$$

при всех $s, t \in \mathbb{R}$ и $N \geqslant 0$. Это вытекает из того, что оператор свёртки $R_{-m}(\lambda)$ представляется как оператор умножения преобразования Фурье на функцию $\tilde{r}_{-m}(\xi, \lambda) = F_{z\to\xi}\, r(z, \lambda)$, принадлежащую $S(\mathbb{R}^n)$ по ξ с полунормами, убывающими при $|\lambda| \to \infty$ быстрее любой степени $|\lambda|$ благодаря оценкам, полученным в первой части приведённых выше рассуждений по этому поводу.

Комбинируя два последних неравенства, мы получаем желаемые оценки типа (9.18) для $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$.

б) Другой способ доказательства нужных оценок основан на описании структуры операторов $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$ и $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$. Достаточно рассмотреть операторы $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ и использовать соотношение

$$(R_{-m}(\lambda)\, A_\lambda)^* = A_\lambda^* R_{-m}(\lambda)$$

для доказательства тех же оценок для операторов вида $R_{-m}(\lambda)A_\lambda$.

Ясно, что оператор $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ можно записать в стандартной форме (3.9) с символом $\sigma_{\lambda,\,m}(x, \xi) = \sigma_{A_\lambda}(x, \xi)\, \tilde{r}_{-m}(\xi, \lambda)$, где функция $\tilde{r}$ была определена выше. Заметим, что $\sigma_{A_\lambda}(x, \xi)$ имеет компактный носитель по x равномерно по ξ. Принимая во внимание поведение $\tilde{r}$, мы видим, что для $\sigma_{\lambda,\,m}(x, \xi)$ выполнены оценки

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_{\lambda,\,m}(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,m,\,M,\,N}(1 + |\xi|)^{-M}(1 + |\lambda|)^{-N}$$

при любых $M, N \geqslant 0$ и любых мультииндексах α, β. Ядро Л. Шварца оператора $A_\lambda R_{-m}(\lambda)$ имеет вид

$$K_\lambda(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma_\lambda(x, \xi)\, d\xi.$$

Из оценок для σ_λ немедленно следует, что

$$|K_\lambda(x, y)| \leqslant C_N(1 + |x - y|)^{-N},$$

и требуемые оценки норм следуют из леммы Шура.

7. Теперь предположим, что $\delta = 0$. Как видно из (9.16), нам надо доказать, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda)\, A_\lambda\|_{s,\,s} \leqslant C, \tag{9.20}$$

где C не зависит от λ (но может зависеть от s). Ясно, что

$$\|\Phi_{-m}(\lambda)\, A_\lambda\|_{s,\,s} = \|\Phi_s(0)\,(\Phi_{-m}(\lambda)\, A_\lambda)\,\Phi_{-s}(0)\|. \tag{9.21}$$

Действуя, как в части 5 этого доказательства, мы можем заменить $\Phi_t(\lambda)$ на собственный ПДО $\tilde{\Phi}_t(\lambda)$ (для любого $t \in \mathbb{R}$) и вместо (9.20) доказывать оценки

$$\|\tilde{\Phi}_s(0)\,\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)\, A_\lambda \tilde{\Phi}_{-s}(0)\| \leqslant C, \tag{9.22}$$

Обозначим символ оператора $\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)\, A_\lambda$ через $b(x,\, \xi,\, \lambda)$. Тогда

$$b(x,\, \xi,\, \lambda) \in S^0_{\rho,\, 0;\, d}(\mathbb{R}^n;\, \Lambda)$$

в смысле равномерных классов в $\mathbb{R}^n$ (см. задачи 3.1 и 3.2. В частности, $b(x,\, \xi,\, \lambda) \in S^0_{\rho,\, 0}(\mathbb{R}^{2n})$ равномерно по λ, т. е.

$$\sup_{x,\, \xi,\, \lambda} \left[|\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta b(x,\, \xi,\, \lambda)|\, \langle \xi \rangle^{\rho|\alpha|} \right] < +\infty.$$

Используя подходящую формулу композиции (например, в равномерных классах, указанных в задачах 3.1 и 3.2), мы видим, что те же самые оценки выполняются и для символа $a(x,\, \xi,\, \lambda)$ оператора $\tilde{\Phi}_s(0)\,\tilde{\Phi}_{-m}(\lambda)\, A_\lambda \tilde{\Phi}_{-s}(0)$.

Теперь, применяя теорему об ограниченности (тоже распространённую на классы равномерных псевдодифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$), мы получаем требуемую оценку (9.22) для операторной нормы.

Возможен и другой способ рассуждений (обходящий использование равномерных операторов в $\mathbb{R}^n$): ввести подходящие срезающие функции, чтобы свести всё к функциям с носителем в фиксированном компакте, а затем оценить остаточные члены, используя лемму Шура. ■

9.3. Обращение оператора с параметром. В этом пункте мы будем рассматривать лишь операторы на замкнутом многообразии M.

Теорема 9.2. *Пусть $A_\lambda \in HL^{m,\, m_0}_{\rho,\, \delta;\, d}(M,\, \Lambda)$. Тогда существует такое $R > 0$, что при $|\lambda| \geqslant R$ оператор A_λ обратим, причем*

$$A_\lambda^{-1} \in HL^{-m_0,\, -m}_{\rho,\, \delta;\, d}(M,\, \Lambda_R), \tag{9.23}$$

где $\Lambda_R = \Lambda \cap \{\lambda\colon |\lambda| \geqslant R\}$. Точнее, если B_λ — параметрикс оператора с параметром A_λ, т. е. выполнены условия (9.6), то

$$A_\lambda^{-1} - B_\lambda \in L^{-\infty}(M,\, \Lambda_R). \tag{9.24}$$

Доказательство. Пусть B_λ — параметрикс оператора A_λ. Из (9.6) видно, что достаточно уметь доказывать, что оператор $I + R_\lambda$, где $R_\lambda \in L^{-\infty}(M,\, \Lambda_R)$, обратим при больших λ, причем

$$(I + R_\lambda)^{-1} - I \in L^{-\infty}(M,\, \Lambda_R). \tag{9.25}$$

Заметим, что для любого $N>0$ и для любых $s,\, t\in\mathbb{R}$

$$\|R_\lambda\|_{s,\,t}\leqslant C_{s,\,t}^{(N)}(1+|\lambda|)^{-N}. \tag{9.26}$$

Отсюда следует, в частности, что существует такое $R>0$, что $\|R_\lambda\|<<1/2$ при $|\lambda|\geqslant R$, так что $(I+R_\lambda)^{-1}$ существует при $\lambda\in\Lambda_R$ по крайней мере в пространстве $L^2(M)$. Но оператор $I+R_\lambda$ фредгольмов в каждом из пространств $H^s(M)$ (этот результат формально является следствием эллиптичности $I+R_\lambda$ и теоремы 8.1, хотя, конечно, легко может быть получен непосредственно) и имеет всюду одно и то же ядро и коядро, так что обратимость $I+R_\lambda$ при $|\lambda|\geqslant R$ имеется и в каждом из пространств $H^s(M)$.

Для доказательства (9.25) удобно воспользоваться формулой

$$(I+R_\lambda)^{-1}-I=-R_\lambda(I+R_\lambda)^{-1} \tag{9.27}$$

и соотношениями (9.26). Обозначая через Q_λ левую часть (9.27), мы видим, что для Q_λ выполнены оценки вида (9.26).

Ядро $Q_\lambda(x,\, y)$ оператора Q_λ выражается через Q_λ формулой

$$Q_\lambda(x,\, y)=[Q_\lambda\delta(\cdot-y)]\,(x), \tag{9.28}$$

где $\delta(z-y)$ — δ-функция (от z) в точке $y\in M$, от которой она зависит как от параметра. Оператор Q_λ в (9.28) применяется по переменной z и результат берется в точке x. Заметим, что если $s<-n/2$, то $\delta(\cdot-y)\in H^s(M)$. Далее, $\delta(\cdot-y)$ — дифференцируемая функция от y со значениями в $H^{s-1}(M)$ и вообще, k раз дифференцируемая функция от $y\in M$ со значениями в $H^{s-k}(M)$. Поэтому из оценок (9.26) вытекают оценки вида (9.3) для ядра $Q_\lambda(x,\, y)$, что и доказывает требуемое включение $Q_\lambda\in L^{-\infty}(M,\, \Lambda_R)$. Отсюда и вытекают требуемые включения (9.23) и (9.24). ■

9.4. Резольвента эллиптического оператора. Вернемся к примеру 9.1, перейдя к случаю оператора на многообразии, и применим полученные результаты.

Теорема 9.3. *Пусть A — дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\, \xi)$ — его главный символ, Λ — замкнутый угол в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершиной в точке $0\in\mathbb{C}$. Пусть A эллиптичен с параметром относительно Λ, т. е. $a_m(x,\, \xi)$ при $\xi\neq 0$ не принимает значений, принадлежащих Λ. Тогда*

а) *существует такое $R>0$, что при $\lambda\in\Lambda_R$ оператор $A-\lambda I$ обратим и притом*

$$(A-\lambda I)^{-1}\in CL_m^{-m}(M,\, \Lambda_R); \tag{9.29}$$

б) *имеет место оценка нормы*

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{s,\,s+l} \leqslant C_{s,\,l}/|\lambda|^{1-l/m}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m, \quad \lambda \in \Lambda_R, \tag{9.30}$$

где s — любое вещественное число.

Доказательство. Утверждение п. а) вытекает из теоремы 9.1, а утверждение п. б) — из п. а) и теоремы 9.2. ■

Следствие 9.2. *В условиях теоремы* 9.3

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant C/|\lambda|, \quad \lambda \in \Lambda_R. \tag{9.31}$$

Следствие 9.3. *Пусть A — эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\,\xi)$ — его главный символ. Предположим, что $a_m(x,\,\xi) > 0$ при всех $(x,\,\xi)$, $\xi \neq 0$. Тогда A полуограничен снизу, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что $A \geqslant -CI$, т. е.*

$$(Au,\,u) \geqslant -C(u,\,u), \quad u \in C^\infty(M). \tag{9.32}$$

Мы отметим здесь еще то важное обстоятельство, что при условии эллиптичности с параметром резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$ лишь оператором из $L^{-\infty}(M,\,\Lambda)$ отличается от параметрикса. Это используется в теории комплексных степеней вместе с явной конструкцией параметрикса, даваемой эллиптической теорией (см. п. 5.5).

Задача 9.1. Распространить теорию эллиптических операторов с параметром на случай матричных операторов, т. е. систем.

Указание. Условие эллиптичности с параметром матричной функции $a_m(x,\,\xi)$ означает, что $\det(a_m(x,\,\xi)-\lambda) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in \Lambda$ или, что то же самое, собственные значения матрицы $a_m(x,\,\xi)$ при $\xi \neq 0$ не попадают в угол Λ.

Задача 9.2. Пусть на замкнутом многообразии дан эллиптический дифференциальный оператор оператор A, и пусть для некоторого угла Λ оператор $A-\lambda I$ удовлетворяет условию эллиптичности с параметром при $\lambda \in \Lambda$. Доказать, что $\operatorname{index} A = 0$.

§ 10. Определение и простейшие свойства комплексных степеней эллиптического оператора

10.1. Определение голоморфной полугруппы A_z. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m на замкнутом многообразии M размерности n. Пусть $a_m(x,\,\xi)$ — главный символ оператора A. Предположим, что $a_m(x,\,\xi)$ не принимает (при $\xi \neq 0$) значений в замкнутом угле Λ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (вершина угла Λ — точка $0 \in \mathbb{C}$). Иными словами, в обозначениях § 9 $A-\lambda I \in CL^m_m(M,\,\Lambda)$ и выполнено условие эллиптичности с параметром.

Из теоремы 9.3 следует, что резольвента $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ определена при $|\lambda| \geqslant R$, $\lambda \in \Lambda$, т. е. при $\lambda \in \Lambda_R$. Теперь в силу теоремы 8.4 спектр $\sigma(A)$ оператора A — дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Поэтому в угле Λ может находиться лишь конечное число точек $\sigma(A)$. Мы можем тогда так провести луч L_0, начинающийся в точке O и содержащийся в Λ, что $\sigma(A) \cap L_0$ либо пусто, либо состоит лишь из точки 0. В дальнейшем мы будем для удобства предполагать, во-первых, что $0 \notin \sigma(A)$, т. е. существует оператор A^{-1} (см. § 8), и, во-вторых, что $L_0 = (-\infty, 0]$. Оба эти предположения не очень существенны: от первого можно освободиться, заменяя A на $A + \varepsilon I$, а от второго — переходя от A к оператору $e^{i\theta}A$.

Итак, окончательно наши предположения таковы:

1) $a_m(x, \xi) - \lambda \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in (-\infty, 0]$; (10.1)
2) $\sigma(A) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$. (10.2)

Из условий 1) и 2) вытекает, что для некоторого угла Λ вида $\{\pi - \varepsilon \leqslant \arg\,\lambda \leqslant \pi + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, выполнены условия:

1′) $a_m(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и $\lambda \in \Lambda$; (10.1′)
2′) $\sigma(A) \cap \Lambda = \varnothing$. (10.2′)

В дальнейшем мы будем считать, что угол Λ выбран именно таким образом.

Поскольку $0 \notin \sigma(A)$, то угол $\sigma(A)$ не пересекается с целым кругом $|\lambda| < 2\rho$ в комплексной λ-плоскости. Выберем теперь в этой плоскости контур $\Gamma = \Gamma_\rho$ вида $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где

$$\lambda = re^{i\pi} \quad (+\infty > r > \rho) \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$
$$\lambda = \rho e^{i\varphi} \quad (\pi > \varphi > -\pi) \quad \text{на} \quad \Gamma_2,$$
$$\lambda = re^{-i\pi} \quad (\rho < r < +\infty) \quad \text{на} \quad \Gamma_3$$

(рис. 1).

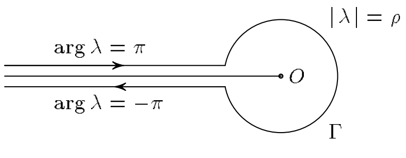

Рис. 1.

Рассмотрим интеграл

$$A_z = \frac{i}{2\pi} \int\limits_\Gamma \lambda^z (A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda, \quad (10.3)$$

где $z \in \mathbb{C}$, λ^z определяется как голоморфная функция от λ при $\lambda \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$, равная $e^{z\,\ln\,\lambda}$ при $\lambda > 0$ (здесь подразумевается, что $\ln\lambda \in \mathbb{R}$ при $\lambda > 0$). Иными словами, на Γ мы полагаем

$$\lambda^z = e^{z\,\ln\,\lambda} = e^{z\,\ln\,|\lambda| + iz\,\arg\,\lambda} = |\lambda|^z e^{iz\,\arg\,\lambda}, \quad (10.4)$$

где $-\pi \leqslant \arg\,\lambda \leqslant \pi$ (более точно $\arg\,\lambda$ указан в определении контура Γ).

Отметим, что ввиду оценки (9.31) (следствие 9.2) интеграл (10.3) при $\operatorname{Re} z<0$ сходится по операторной норме в $L^2(M)$ и тем самым A_z — ограниченный оператор в $L^2(M)$. На самом деле по теореме 9.3 интеграл (10.3) сходится и по операторной норме в $H^s(M)$ при любом $s\in\mathbb{R}$ и тем самым A_z при $\operatorname{Re} z<0$ отображает $H^s(M)$ в $H^s(M)$. Поэтому A_z отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$ и $\mathscr{D}'(M)$ в $\mathscr{D}'(M)$, поскольку $C^\infty(M)=\bigcap\limits_s H^s(M)$, $\mathscr{D}'(M)=\bigcup\limits_s H^s(M)$.

Предложение 10.1. а) *При* $\operatorname{Re} z<0$ *и* $\operatorname{Re} w<0$ *справедливо полугрупповое свойство*

$$A_zA_w=A_{z+w}. \tag{10.5}$$

б) *Если* $k\in\mathbb{Z}$ *и* $k>0$, *то*

$$A_{-k}=(A^{-1})^k. \tag{10.6}$$

в) A_z *при любом* $s\in\mathbb{R}$ *представляет собой голоморфную оператор-функцию от* z (*при* $\operatorname{Re} z<0$) *со значениями в алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве* $H^s(M)$.

Доказательство. а) Образуем контур Γ' (рис. 2) вида $\Gamma'=\Gamma_1'\cup\Gamma_2'\cup\Gamma_3'$, где

$$\lambda=re^{i(\pi-\varepsilon)}\quad \left(+\infty>r>\frac{3}{2}\rho\right)\quad \text{на}\quad \Gamma_1',$$

$$\lambda=\frac{3}{2}\rho e^{i\varphi}\quad (\pi-\varepsilon>\varphi>-\pi+\varepsilon)\quad \text{на}\quad \Gamma_2',$$

$$\lambda=re^{i(-\pi+\varepsilon)}\quad \left(\frac{3}{2}\rho<r<+\infty\right)\quad \text{на}\quad \Gamma_3'.$$

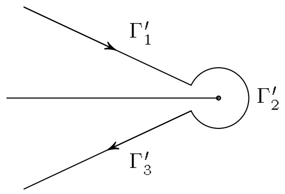

Рис. 2.

Число $\varepsilon>0$ выбрано так, что выполнены условия (10.1′) и (10.2′). Контур Γ содержится «внутри» контура Γ', но ввиду оценки (9.31) и условий на Γ' ясно, что интеграл (10.5) не изменится, если в нем заменить Γ на Γ'.

Используя это обстоятельство, получаем

$$\begin{aligned}A_zA_w&=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma'}\int\limits_{\Gamma}(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}\lambda^z\mu^w\,d\mu\,d\lambda=\\&=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma'}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^z\mu^w}{\lambda-\mu}\left[(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}\right]d\mu\,d\lambda=\\&=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma'}\lambda^{w+z}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma'}(A-\mu I)^{-1}\frac{\lambda^z\mu^w}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu=\\&\qquad\qquad=A_{z+w}+0=A_{z+w}.\end{aligned}$$

В этой выкладке использовались формула Коши и так называемое *тождество Гильберта*

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}=\frac{1}{\lambda-\mu}\,[(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}], \tag{10.7}$$

которое становится очевидным, если, например, умножить обе его части на $(A-\lambda I)\,(A-\mu I)$.

б) Заметим, что если $z=-1,\,-2,\,\ldots$, то $(re^{i\pi})^z=(re^{-i\pi})^z$ и интегралы по прямолинейным частям Γ в (10.3) сокращаются. Поэтому

$$A_{-k}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\lambda^{-k}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ_2 — окружность $\{|\lambda|=\rho\}$, пробегаемая по часовой стрелке. Сделаем здесь замену переменных, полагая $\lambda=1/\mu$. Получим

$$A_{-k}=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2'}\mu^k(A-\mu^{-1}I)^{-1}\mu^{-2}\,d\mu,$$

где Γ_2' — окружность $\{|\mu|=1/\rho\}$, также проходимая по часовой стрелке. Учитывая, что $(A-\mu^{-1}I)^{-1}=\mu A^{-1}(\mu I-A^{-1})^{-1}$, мы можем написать теперь

$$A_{-k}=-\frac{iA^{-1}}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2'}\mu^{k-1}(\mu I-A^{-1})^{-1}\,d\mu=A^{-1}(A^{-1})^{k-1}=(A^{-1})^k,$$

поскольку весь спектр ограниченного оператора A^{-1} лежит внутри контура Γ_2' и можно воспользоваться формулой Коши.

в) Дифференцируя интеграл (10.3) по z, мы получим интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z(\ln\lambda)\,(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \tag{10.8}$$

который сходится по операторной норме (в $H^s(M)$) равномерно при $\operatorname{Re} z\leqslant-\varepsilon<0$. Отсюда следует, что оператор-функция A_z голоморфна по z, причем производная $\dfrac{d}{dz}A_z$ равна интегралу (10.8). ■

10.2. Определение комплексных степеней оператора.

Определение 10.1. Пусть $z\in\mathbb{C}$ и $k\in\mathbb{Z}$ выбрано так, что $\operatorname{Re} z<k$. Положим на $C^\infty(M)$ или на $\mathscr{D}'(M)$

$$A^z=A^k\cdot A_{z-k}. \tag{10.9}$$

Нуждается в проверке корректность этого опеределения. Эта корректность — первое утверждение следующей теоремы.

Теорема 10.1. а) *Оператор* A^z, *определяемый формулой* (10.9), *не зависит от выбора целого числа* k, *для которого* $\operatorname{Re} z < k$.

б) *Если* $\operatorname{Re} z < 0$, *то* $A^z = A_z$.

в) *Имеет место групповое свойство*

$$A^z A^w = A^{z+w}, \quad z,\, w \in \mathbb{C}. \tag{10.10}$$

г) *Если* $k \in \mathbb{Z}$, *то из* (10.9) *при* $z = k$ *получается обычная* k*-я степень оператора* A (*в частности*, $A^0 = I$, $A^1 = A$ *и* A^{-1} — *оператор, обратный к* A).

д) *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *и для любого* $s \in \mathbb{R}$ *функция* A^z *является голоморфной оператор-функцией от* z *в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < k$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathscr{L}(H^s(M), H^{s-mk}(M))$ *ограниченных линейных операторов из* $H^s(M)$ *в* $H^{s-mk}(M)$.

Доказательство. а) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, причем $\operatorname{Re} z < k$, $\operatorname{Re} z < l$. Нужно доказать, что

$$A^k A_{z-k} = A^l A_{z-l}. \tag{10.11}$$

Предположим, что $k > l$. Положим $k - l = p$ и $z - k = w$. Тогда (10.11) сведется к тождеству $A_w = A^{-p} A_{w+p}$, где p — натуральное число, $\operatorname{Re}(w+p) < 0$. Но это сразу следует из предложения 10.1, ибо $A^{-p} = A_{-p}$ в силу (10.6), и остается воспользоваться полугрупповым свойством (10.5).

б)—г) Эти свойства очевидным образом вытекают из п. а) этой теоремы и предложения 10.1.

д) Это утверждение просто получается из п. а) этой теоремы и п. в) предложения 10.1, если вспомнить, что A^k при целом k непрерывно отображает $H^s(M)$ в $H^{s-mk}(M)$ (это вытекает из теоремы об об ограниченности 7.3 и того факта, что $A^{-1} \in CL^{-m}(M)$ в силу теоремы 8.2 об обратном операторе). ■

10.3. Самосопряженный случай. Пусть на M введена гладкая положительная плотность, определяющая скалярное произведение в $L^2(M)$. Пусть A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка m на M. Его главный символ $a_m(x, \xi)$ вещественнозначен, и условия (10.1) и (10.2), которые мы будем предполагать выполненными, означают в данном случае, что

$$a_m(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0, \tag{10.12}$$

$$A \geqslant \delta I, \quad \text{где} \quad \delta > 0, \tag{10.13}$$

т. е. $(Au, u) \geqslant \delta(u, u)$ для любой функции $u \in C^\infty(M)$. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора A с собственными значениями $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$. Напомним, что $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to \infty$ (см. теорему 8.3). Из (10.13) следует, что $\lambda_j \geqslant \delta > 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots$

Каждой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(M)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f \sim \sum_{j=1}^\infty f_j \varphi_j(x), \quad x \in M, \tag{10.14}$$

где

$$f_j = (f, \varphi_j). \tag{10.15}$$

Здесь для $f \in L^2(M)$ в формуле (10.15) стоит обычное скалярное произведение в $L^2(M)$. Если же $f \in \mathscr{D}'(M)$, то (f, φ_j) означает $\langle f, \bar{\varphi}_j \, d\mu \rangle$, где $d\mu$ — фиксированная плотность на M (вспомним, что обобщенные функции являются линейными непрерывными функционалами на пространстве гладких плотностей). Мы опишем сейчас свойства рядов Фурье гладких и обобщенных функций.

Предложение 10.2. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty c_j \varphi_j(x) \tag{10.16}$$

с комплексными коэффициентами c_j. Тогда следующие свойства эквивалентны:

а) *ряд* (10.16) *сходится в топологии* $C^\infty(M)$;

б) *ряд* (10.16) *является рядом Фурье некоторой обобщенной функции* $f \in C^\infty(M)$;

в) *для любого целого* N

$$\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 \lambda_j^{2N} < +\infty. \tag{10.17}$$

Далее, следующие условия г), д) *и* е) *также эквивалентны*:

г) *ряд* (10.16) *сходится в слабой топологии* $\mathscr{D}'(M)$;

д) *ряд* (10.16) *является рядом Фурье некоторой обобщенной функции* $f \in \mathscr{D}'(M)$;

е) *существует такое целое* N (*быть может, отрицательное*), *что выполнено условие* (10.17).

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в том, что верны соотношения

$$C^\infty(M) = \bigcap_s H^s(M), \quad \mathscr{D}'(M) = \bigcup_s H^s(M),$$

а оператор A^N осуществляет топологический изоморфизм $H^{mN}(M)$ и $L^2(M)$. Но $L^2(M)$ очень просто описывается в терминах коэффициентов Фурье ввиду равенства Парсеваля. Поэтому топологию в $C^\infty(M)$ можно задать полунормами $\|f\|_{A;N}$, где

$$\|f\|_{A;N}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \lambda_j^{2N},$$

поскольку $A^N f$ имеет коэффициенты Фурье $\lambda_j^N f_j$. Теперь эквивалентность а), б) и в) очевидна.

Проверим эквивалентность г), д) и е). Если выполнено г), то обозначим через f сумму ряда (10.16), так что $f \in \mathscr{D}'(M)$ и

$$(f, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (\varphi_j, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$. В частности, беря $\varphi = \varphi_j$, мы получим, что $c_j = f_j$, т. е. выполнено д). Далее, если выполнено д), т. е. $c_j = (f, \varphi_j)$, где $f \in \mathscr{D}'(M)$, то, выбирая целое число N таким, что $A^N f \in L^2(M)$, мы получим, что выполнено е). Наконец, если е) выполнено, то ряд (10.16) сходится по норме $H^{mN}(M)$, что дает выполнение п. г). ∎

Теперь приведем «спектральное» описание комплексных степеней самосопряженного оператора A в терминах коэффициентов разложения по собственным функциям φ_j.

Предложение 10.3. *Пусть $f \in \mathscr{D}'(M)$, $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(x)$ — разложение f в ряд Фурье по собственным функциям оператора A. Тогда*

$$A^z f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^z f_j \varphi_j(x). \tag{10.18}$$

В частности, $\varphi_j(x)$ — собственные функции оператора A^z с собственными значениями λ_j^z.

Доказательство. Оператор A^z непрерывно отображает $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$. Ввиду легко проверяемого соотношения $(A^z)^* = A^{\bar z}$ отсюда следует, что оператор A^z, как сопряженный оператор к $A^{\bar z}$, непрерывно отображает $\mathscr{D}'(M)$ в $\mathscr{D}'(M)$, если $\mathscr{D}'(M)$ рассматривать со слабой топологией. Поскольку ряд, стоящий в правой части (10.18), слабо сходится в $\mathscr{D}'(M)$ в силу предложения 10.2, для проверки (10.18) в общем случае достаточно проверить это соотношение при $f = \varphi_j$,

$\mathrm{Re}\ z<0$. Но при $f=\varphi_j$, $\mathrm{Re}\ z<0$ имеем

$$A^z\varphi_j=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z(A-\lambda I)^{-1}\varphi_j\,d\lambda=\frac{i\varphi_j}{2\pi}\int\limits_\Gamma \lambda^z(\lambda_j-\lambda)^{-1}\,d\lambda=\lambda_j^z\varphi_j$$

в силу формулы Коши. Но это и означает (10.18) для $f=\varphi_j$. ■

Упражнение 10.1. Пусть A удовлетворяет условию (10.1), а вместо (10.2) потребуем, чтобы было выполнено более слабое условие

$$\sigma(A)\cap(-\infty,\,0)=\varnothing,$$

так что $\mathrm{Ker}\ A$ может быть ненулевым конечномерным подпространством в $C^\infty(M)$. Определим A_z контурным интегралом (10.3). Пусть E_0, E_0' — инвариантные подпространства оператора A, о которых говорится в теореме 8.4.

а) Доказать, что $A_zE_0=0$ и E_0' — инвариантное подпространство для A_z при $\mathrm{Re}\ z<0$.

б) Доказать, что для оператора A_z выполнено полугрупповое свойство $A_zA_w=A_{z+w}$, $\mathrm{Re}\ z<0$, $\mathrm{Re}\ w<0$, позволяющее корректно определить оператор A_z при всех z по формуле (10.9), причем для операторов A^z выполнено групповое свойство (10.10).

в) Проверить, что A^z при достаточно большом натуральном z есть обычная степень оператора A, в то время как

$$A^0=I-P_0,$$

где P_0 — проектор на E_0 параллельно E_0', и аналогично A_{-k} при достаточно большом натуральном k является обратным оператором к A^k на E_0' и равен 0 на E_0.

Задача 10.1. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M, $a_m(x,\xi)$ — его главный символ. Предположим, что $\mathrm{Re}\ a_m(x,\xi)<0$ при $\xi\neq 0$. Доказать, что задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au,\quad t>0;\quad u|_{t=0}=\varphi(x); \tag{10.19}$$

однозначно разрешима в $C^\infty(M)$ и в $\mathscr{D}'(M)$.

Указание. Решение $u(t,\,x)$ надо строить в виде

$$u=e^{At}\varphi, \tag{10.20}$$

где оператор e^{At} строится с помощью контурного интеграла

$$e^{At}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda. \tag{10.21}$$

Считая, что спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda<0$ (этого можно достичь заменой A на $A-CI$ или заменой $u=ve^{ct}$ в задаче (10.19)), надо выбрать $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — следующие лучи:

$$\lambda=re^{i(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}\quad(+\infty>r>0)\quad\text{на}\quad\Gamma_1,$$
$$\lambda=re^{i(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}\quad(0<r<+\infty)\quad\text{на}\quad\Gamma_2.$$

Единственность обобщенного решения задачи (10.19) доказывается с помощью принципа Хольмгрена (см., например, Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. [1], вып. 3, стр. 41).

§ 11. Структура комплексных степеней эллиптического оператора

11.1. Символ резольвенты. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор на замкнутом многообразии M. Мы построим сейчас в локальных координатах символ специального параметрикса оператора с параметром $A-\lambda I$ (мы рассматриваем его здесь как оператор из $CL^m_m(M,\,\Lambda)$, где Λ — замкнутый угол в $\mathbb{C}$ с вершиной в точке 0). Мы считаем, что A удовлетворяет условию эллиптичности с параметром относительно Λ, причем угол Λ такой же, как в § 10 (т. е. выполнены условия (10.1) и (10.2), а Λ содержит внутри себя полуось $(-\infty,\,0]$).

Параметрикс будем строить в некоторой координатной окрестности $X\subset M$. Будем отождествлять X с областью в $\mathbb{R}^n$ с помощью заданной на X системы координат.

Пусть на X оператор A имеет вид

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,D^\alpha. \tag{11.1}$$

Его полный символ

$$a(x,\,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \tag{11.2}$$

можно разбить на однородные компоненты

$$a_j(x,\,\xi)=\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha,\qquad j=0,\,1,\,\ldots,\,m. \tag{11.3}$$

Полный символ $a(x,\,\xi,\,\lambda)=a(x,\,\xi)-\lambda$ оператора $A-\lambda I$ разбивается на однородные по $(\xi,\,\lambda^{1/m})$ компоненты, задаваемые формулами

$$a_m(x,\,\xi,\,\lambda)=a_m(x,\,\xi)-\lambda, \tag{11.4}$$

$$a_j(x,\,\xi,\,\lambda)=a_j(x,\,\xi),\qquad j=0,\,1,\,\ldots,\,m-1. \tag{11.5}$$

Условие эллиптичности с параметром означает, что

$$a_m(x,\,\xi,\,\lambda)\neq 0\quad\text{при}\quad x\in X,\ \ \lambda\in\Lambda,\ \ |\xi|+|\lambda|^{1/m}\neq 0. \tag{11.6}$$

Символ параметрикса оператора $A-\lambda I$ естественно искать в виде асимптотической суммы функций, однородных по $(\xi,\,\lambda^{1/m})$. Обозначим эти функции через $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$, $j=0,\,1,\,2,\,\ldots$, где нижний индекс означает степень однородности:

$$b^0_{-m-j}(x,\,t\xi,\,t^m\lambda)=t^{-m-j}\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda),\qquad t>0,\ \ |\xi|+|\lambda|^{1/m}\neq 0. \tag{11.7}$$

Эти функции определяются рекуррентным образом из соотношений

$$a_m(x, \xi, \lambda)\, b^0_{-m}(x, \xi, \lambda) = 1, \tag{11.8}$$

$$a_m(x, \xi, \lambda)\, b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda) + \\ + \sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j \\ l<j}} \partial^\alpha_\xi a_{m-k}(x, \xi, \lambda)\, D^\alpha_x b^0_{-m-l}(x, \xi, \lambda)/\alpha! = 0, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{11.9}$$

(ср. построение параметрикса классического эллиптического ПДО в § 5 — формулы (5.17′) и (5.17″)).

Чтобы получить из построенных функций $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ настоящий параметрикс, нужно, во-первых, умножением на срезающую функцию ликвидировать их особенность при $|\xi| + |\lambda|^{1/m} = 0$ и, во-вторых, произвести склейку разных локальных параметриксов с помощью разбиения единицы (см. § 5).

11.2. Символы комплексных степеней. Мы построим однородные компоненты $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ символа оператора A^z по построенным выше однородным компонентам параметрикса точно так же, как сами степени A^z строились по резольвенте $(A - \lambda I)^{-1}$. Именно, из условия эллиптичности с параметром вытекает существование такого $\rho = \rho(x, \xi)$, что $a_m(x, \xi, \lambda) \neq 0$ при $|\lambda| < 2\rho$, $\xi \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Из уравнений (11.8), (11.9) ясно тогда, что $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ голоморфно по λ в круге $|\lambda| < 2\rho$. Образуя контур Γ, как в § 10, мы определим функции $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ при $\mathrm{Re}\, z < 0$ формулами

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_\Gamma \lambda^z b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11.10}$$

где ветвь λ^z выбирается так же, как в § 10.

В частности, при $j = 0$ мы получаем по формуле Коши

$$b^{(z),0}_{mz}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_\Gamma \lambda^z (a_m(x, \xi) - \lambda)^{-1}\, d\lambda = a^z_m(x, \lambda). \tag{11.11}$$

Отметим, что при достаточно малом ρ интеграл (11.10) не зависит от выбора ρ (в круге $|\lambda| < 2\rho$ уже нет особенностей функции $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$).

Функция $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ положительно однородна по ξ порядка $mz - j$, т. е.

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, t\xi) = t^{mz-j} b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi), \quad t > 0, \quad \xi \neq 0. \tag{11.12}$$

Для того чтобы в этом убедиться, надо сделать в интеграле (11.10) замену переменной и воспользоваться однородностью $b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$:

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x,t\xi)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,t\xi,\lambda)\,d\lambda=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^t}(t^m\mu)^z b_{-m-j}(x,t\xi,t^m\mu)\,t^m\,d\mu=t^{mz-j}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^t}\mu^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\mu)\,d\mu=$$
$$=t^{mz-j}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\mu)\,d\mu=t^{mz-j}b^{(z),0}_{mz-j}(x,\xi).$$

Здесь Γ^t — контур $t^{-m}\Gamma$ (он имеет тот же вид, что и Γ, но с радиусом круговой части $t^{-m}\rho$ вместо ρ).

Теперь необходимо распространить определение $b^{(z),0}_{mz-j}(x,\xi)$ на все $z\in\mathbb{C}$. Это делается так же, как построение A^z при $z\in\mathbb{C}$, проведенное в § 10. Имеет место следующий аналог предложения 10.1.

Предложение 11.1. а) *При* $\operatorname{Re} z<0$ *и* $\operatorname{Re} w<0$ *справедливо полугрупповое свойство*

$$\sum_{|\alpha|+p+q=j}\partial^\alpha_\xi b^{(z),0}_{mz-p}(x,\xi)\,D^\alpha_x b^{(w),0}_{mw-q}(x,\xi)/\alpha!=b^{(z+w),\theta}_{m(z+w)-j}(x,\xi),$$
$$j=0,1,2,\ldots \qquad (11.13)$$

б) *Если* $k\in\mathbb{Z}$ *и* $k>0$, *то набор* $b^{(-k)}_{-mk-j}(x,\xi)$, $j=0,1,2,\ldots$, *представляет собой набор однородных компонент параметрикса оператора* A^k.

в) *Для любых мультииндексов* α,β *производная* $\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x b^{(z),0}_{mz-j}(x,\xi)$ *при* $\xi\neq 0$ *является голоморфной функцией от* z *при* $\operatorname{Re} z<0$.

Доказательство этого предложения получается повторением на уровне символов доказательства предложения 10.1, что предоставляется читателю в качестве полезного упражнения. ■

Для дальнейшего полезно обозначить через $a^{(k)}_j(x,\xi)$ при целом $k\geqslant 0$ однородную компоненту (порядка j) символа $a^{(k)}(x,\xi)$ оператора A^k, так что

$$a^{(k)}(x,\xi)=\sum_{j=0}^{mk}a^{(k)}_j(x,\xi).$$

Если k — целое, $k<0$, то через $a^{(k)}_j(x,\xi)$ обозначаются однородные компоненты символа параметрикса оператора A^k или, что то же самое, однородные компоненты символа оператора A^{-k}. Они определяются рекурентным образом из соотношений

$$a_{-mk}^{(-k)}(x,\xi)\cdot a_{mk}^{(k)}(x,\xi)=1, \tag{11.14}$$

$$a_{-mk}^{(-k)}(x,\xi)\cdot a_{mk-j}^{(k)}(x,\xi)+\sum_{\substack{p+q+|\alpha|=j\\ q<j}}\partial_\xi^\alpha a_{-mk-p}^{(-k)}(x,\xi)\cdot D_x^\alpha a_{mk-q}^{(k)}(x,\xi)/\alpha!=0,$$
$$j=1,\,2,\,\ldots \tag{11.15}$$

Определение 11.1. Пусть $z\in\mathbb{C}$ и $k\in\mathbb{Z}$ выбрано так, что $\operatorname{Re} z<k$. Положим

$$b_{mz-j}^{(z),0}(x,\xi)=\sum_{p+q+|\alpha|=j}\partial_\xi^\alpha a_{mk-p}^{(k)}(x,\xi)\cdot D_x^\alpha b_{m(z-k)-q}^{(z-k),0}(x,\xi)/\alpha!,$$
$$j=0,\,1,\,\ldots \tag{11.16}$$

Теорема 11.1. а) *Функции* $b_{mz-j}^{(z),0}(x,\xi)$, *определяемые формулой* (11.16), *не зависят от выбора целого* k, *для которого* $\operatorname{Re} z<k$.

б) *Если* $\operatorname{Re} z<0$, *то функции* $b_{mz-j}^{(z),0}$, *получаемые по формуле* (11.16), *совпадают с так же обозначенными функциями, получаемыми с помощью контурного интеграла* (11.10).

в) *Групповое свойство* (11.13) *имеет место при всех* $z,\,w\in\mathbb{C}$.

г) *Если* $k\in\mathbb{Z}$, *то* $b_{mk-j}^{(k),0}(x,\xi)=a_{mk-j}^{(k)}(x,\xi)$.

д) *Для любых мультииндексов* α,β *для любых* x,ξ $(\xi\neq 0)$ *и для любого* $j=0,1,\ldots$ *функция* $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta b_{mz-j}^{(z),0}(x,\xi)$ *является целой функцией от* z.

Доказательство пунктов а)—г) идентично доказательству соответствующих пунктов теоремы 10.1 (необходимо лишь перейти от алгебры операторов к алгебре символов, являющихся формальными рядами однородных функций и перемножающихся по формуле композиции). Доказательство пункта д) получается непосредственным рассмотрением формул, определяющих функции $b_{mz-j}^{(z),0}(x,\xi)$. ■

11.3. Сглаженные символы резольвенты. Пусть $\omega(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, причем $\omega(\tau)=0$ при $\tau<1/2$, $\omega(\tau)=1$ при $\tau\geqslant 1$. Положим

$$\theta(\xi,\lambda)=\omega(|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}) \tag{11.17}$$

и определим

$$b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)=\theta(\xi,\lambda)\,b_{m-j}^0(x,\xi,\lambda). \tag{11.18}$$

С помощью функций $b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$ мы построим на многообразии M параметрикс оператора с параметром $A-\lambda I$ аналогично второй части доказательства теоремы 5.1. Пусть $M=\bigcup_\gamma X^\gamma$ — конечное покрытие M координатными окрестностями, φ^γ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, функции $\psi^\gamma\in C_0^\infty(X^\gamma)$ таковы, что $\psi^\gamma\equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp}\varphi^\gamma$. Пусть Φ^γ, Ψ^γ — операторы умножения на φ^γ и ψ^γ, а $B^\gamma_{-m-j}(\lambda)$ — ПДО в X^γ с символом $b^\gamma_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$, построенным по формуле (11.18) в координатной окрестности X^γ.

Мы положим

$$B_{-m-j}(\lambda)=\sum_\gamma \Phi^\gamma B^\gamma_{-m-j}(\lambda)\,\Psi^\gamma \tag{11.19}$$

и

$$B_{(N)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{N-1} B_{-m-j}(\lambda). \tag{11.20}$$

Предложение 11.2.

$$(A-\lambda I)^{-1}-B_{(N)}(\lambda)\in CL_m^{-m-N}(M,\Lambda). \tag{11.21}$$

Доказательство. Мы построим вначале полный параметрикс $B(\lambda)$ оператора $A-\lambda I$, полагая

$$B(\lambda)\sim\sum_{j=0}^{\infty} B_{-m-j}(\lambda). \tag{11.22}$$

Точный смысл этой формулы состоит в том, что надо для любого γ построить в X^γ асимптотическую сумму

$$b^\gamma(x,\xi,\lambda)\sim\sum_{j=0}^{\infty} b^\gamma_{-m-j}(x,\xi,\lambda), \tag{11.23}$$

затем взять оператор $B^\gamma(\lambda)$ в X^γ с символом $b^\gamma(x,\xi,\lambda)$ и, наконец, положить

$$B(\lambda)=\sum_\gamma \Phi^\gamma B^\gamma\Psi^\gamma, \tag{11.24}$$

где Φ^γ, Ψ^γ те же, что и в формуле (11.19).

Мы имеем, очевидно

$$B(\lambda)-B_{(N)}(\lambda)\in CL_m^{-m-N}(M,\Lambda). \tag{11.25}$$

Но из теоремы 9.2 следует, что

$$(A-\lambda I)^{-1}-B(\lambda)\in L^{-\infty}(M,\Lambda). \tag{11.26}$$

Сравнивая (11.25) и (11.26), мы приходим к (11.21). ∎

11.4. Сглаженные символы комплексных степеней и структурная теорема. Пусть $\omega(\tau)$ — та же функция на $\mathbb{R}^1$, что и в начале п. 11.3. Положим

$$\theta(\xi)=\omega(|\xi|) \tag{11.27}$$

и определим

$$b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)=\theta(\xi)\,b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\xi). \tag{11.28}$$

Конструкцию $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\xi)$ и $b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$ можно проделать в любой координатной окрестности X^γ (соответствующие функции будут обозначаться $b^{(z),\,0,\,\gamma}_{mz-j}(x,\xi)$ и $b^{(z),\,\gamma}_{mz-j}(x,\xi)$, если нужно будет точно указать, в какой координатной окрестности мы находимся). Обозначая через $B^{(z),\,\gamma}_{mz-j}$ оператор в X^γ с символом $b^{(z),\,\gamma}_{mz-j}(x,\xi)$, мы опять-таки положим

$$B^{(z)}_{mz-j}=\sum_\gamma \Phi^\gamma B^{(z),\,\gamma}_{mz-j}\Psi^\gamma \tag{11.29}$$

и

$$B^{(z)}_{(N)}=\sum_{j=0}^{N-1} B^{(z)}_{mz-j}. \tag{11.30}$$

Для формулировки основной структурной теоремы нам понадобится еще определение голоморфных семейств ПДО, которые будут обозначаться $\mathscr{O}\big(G,L^m_{\rho,\,\delta}(M)\big)$, где G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 11.2. Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, G — область в $\mathbb{C}$, $a(x,\xi,z)\in C^\infty(X\times\mathbb{R}^n\times G)$, причем $a(x,\xi,z)$ голоморфна по z. Мы будем писать, что $a(x,\xi,z)\in\mathscr{O}\big(G,S^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если для любых мультииндексов α,β, для любого $k\in\mathbb{Z}_+$ и для любых компактов $K_1\subset X$ и $K_2\subset G$ существует такая постоянная $C=C(\alpha,\beta,k,K_1,K_2)$, что

$$\big|\,\partial^\alpha_\xi\,\partial^\beta_x\,\partial^k_z a(x,\xi,z)\big|\leqslant C\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{11.31}$$

если $(x,\xi,z)\in K_1\times\mathbb{R}^n\times K_2$. Если $A(z)$ — зависящий от параметра z ПДО в области X, то мы будем писать, что $A(z)\in\mathscr{O}\big(G,L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если $A(z)=A_1(z)+R(z)$, где $A_1(z)$ — собственный ПДО на X с символом $a(x,\xi,z)\in\mathscr{O}\big(G,S^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, а оператор $R(z)$ имеет ядро $R(x,y,z)\in C^\infty(X\times X\times G)$, голоморфное по z. Наконец, мы будем писать, что $A(z)\in\mathscr{O}\big(G,L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$, если $A(z)$ — ПДО на M, зависящий от параметра $z\in G$, причем для любой координатной окрестности $X\subset M$ и любого координатного диффеоморфизма $\varkappa\colon X\to X_1$, где X_1 — область в $\mathbb{R}^n$, операторное семейство $A^{\varkappa}(z)$ операторов на X_1, индуцированных операторами $A(z)$ на M с помощью диффеоморфизма $\varkappa$, таково, что

$$A^{\varkappa}(z) \in \mathscr{O}\big(G,\, L^m_{\rho,\,\delta}(X_1)\big).$$

Повторение рассуждений § 4 показывает, что включение $A(z) \in \in \mathscr{O}\big(G,\, L^m_{\rho,\,\delta}(X)\big)$ при $1-\rho \leqslant \delta < \rho$ достаточно проверять, используя какое-нибудь фиксированное покрытие M координатными окрестностями и фиксированные координатные диффеоморфизмы.

Повторение же рассуждений § 3 и § 5 показывает, что композиция голоморфных семейств, сопряженное и транспонированное семейства, а также параметрикс гипоэллиптического голоморфного семейства (условие гипоэллиптичности считается выполненным равномерно по z) также являются голоморфными семействами в смысле определения 11.2.

Мы можем теперь сформулировать основную структурную теорему.

Теорема 11.2. *При любом* $z \in \mathbb{C}$

$$A^z \in CL^{mz}(M), \tag{11.32}$$

причем для любого целого $N \geqslant 0$ *и при любом* $t \in \mathbb{R}$

$$A^z - B^{(z)}_{(N)} \in \mathscr{O}\big(\operatorname{Re} z < t,\, L^{mt-N}_{1,\,0}(M)\big). \tag{11.33}$$

Доказательство. 1. Докажем вначале, что (11.32) следует из (11.33). Мы положим при фиксированном $z \in \mathbb{C}$

$$B^{(z)} \sim \sum_{j=0}^{\infty} B^{(z)}_{mz-j} \tag{11.34}$$

(смысл этой формулы расшифровывается так же, как для (11.22)). Тогда ясно, что мы можем считать

$$B^{(z)} \in CL^{mz}(M). \tag{11.35}$$

Но если в (11.33) фиксировать такое $t \in \mathbb{R}$, что $t > \operatorname{Re} z$, и затем устремить N к $+\infty$, то мы получим

$$A^z - B^{(z)} \in L^{-\infty}(M), \tag{11.36}$$

откуда и следует (11.32).

2. Докажем (11.33). Введем обозначение

$$R^{(z)}_{(N)} = A^z - B^{(z)}_{(N)}. \tag{11.37}$$

Отметим прежде всего, что групповые свойства комплексных степеней A^z и их пока гипотетических символов $b^{(z),\,0}_{mz-j}$ (теоремы 10.1 и 11.1), а также голоморфность композиции голоморфных семейств позволяют свести доказательство к случаю $t=0$ (N должно быть произвольным). Иными словами, достаточно проверить, что

$$R^{(z)}_{(N)} \in \mathscr{O}\big(\operatorname{Re} z<0,\ L^{-N}_{1,\,0}(M)\big). \tag{11.38}$$

Для того чтобы воспользоваться предложением 11.2, удобно при $\operatorname{Re} z<0$, наряду с оператором $B^{(z)}_{(N)}$, рассмотреть оператор

$$'B^{(z)}_{(N)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \lambda^z B_{(N)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{11.39}$$

Легко проверить, что

$$'B^{(z)}_{(N)} - B^{(z)}_{(N)} \in \mathscr{O}\big(\operatorname{Re} z<0,\ L^{-\infty}(M)\big). \tag{11.40}$$

В самом деле, мы имеем, очевидно,

$$'B^{(z)}_{(N)} = \sum_{j=0}^{N-1} {'B^{(z)}_{mz-j}}, \tag{11.41}$$

где

$$'B^{(z)}_{(mz-j)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \lambda^z B_{-m-j}(\lambda)\,d\lambda, \tag{11.42}$$

и потому символ $'b^{(z)}_{mz-j}(x,\,\xi)$ оператора $'B^{(z)}_{mz-j}$ в какой-нибудь локальной системе координат выражается формулой

$$'b^{(z)}_{(mz-j)}(x,\,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \lambda^z b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{11.43}$$

Отсюда очевидным образом следует, что

$$'b^{(z)}_{(mz-j)}(x,\,\xi) = b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi) \quad \text{при} \quad |\,\xi\,| \geqslant 1. \tag{11.44}$$

Но то же самое верно и для символов $b^{(z)}_{mz-j}(x,\,\xi)$ операторов $B^{(z)}_{mz-j}$, сумма которых дает $B^{(z)}_{(N)}$ (см. формулы (11.28)—(11.30)). С учетом очевидных оценок производных по z отсюда сразу получается (11.40).

Теперь ввиду (11.40) ясно, что достаточно для оператора $'R^{(z)}_{(N)} = A^z - {'B^{(z)}_{(N)}}$ проверить включение вида (11.38). Обозначим через

${}'r^{(z)}_{(N)}(x, \xi)$ символ оператора ${}'R^{(z)}_{(N)}$ в какой-нибудь локальной системе координат, а через $r_{(N)}(x, \xi, \lambda)$ — такой же символ оператора $R_{(N)}(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} - B_{(N)}(\lambda)$. Тогда

$$ {}'r^{(z)}_{(N)}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z r_{(N)}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda \tag{11.45} $$

и мы имеем

$$ \partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x\, \partial^k_z\, {}'r^{(z)}_{(N)}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z (\ln\lambda)^k\, \partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x r_{(N)}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda. \tag{11.46} $$

Но в силу предложения 11.2 имеют место оценки

$$ \left|\partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x r_{(N)}(x, \xi, \lambda)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{-m-N-|\alpha|}, \quad x \in K, \tag{11.47} $$

где K — некоторый компакт, лежащий в рассматриваемой координатной окрестности. Отсюда следует, что

$$ \left|\partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x r_{(N)} x, \xi, \lambda)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,K} (1 + |\xi|)^{-N-|\alpha|} (1 + |\lambda|)^{-1}, \quad x \in K, \tag{11.48} $$

и из (11.46) мы получаем теперь для ${}'R^{(z)}_{(N)}$ включение (11.38). ■

Упражнение 11.1. Распространить теорему 11.2 на ситуацию, описанную в упражнении 10.1.

§ 12. Аналитическое продолжение ядер комплексных степеней

12.1. Постановка задачи. Выражение ядра через символ. Пусть M — замкнутое многообразие, A — эллиптический оператор на M, удовлетворяющий условиям (10.1) и (10.2), обеспечивающим возможность построения комплексных степеней. При $\operatorname{Re} z < -n/m$ мы обозначим через $A_z(x, y)\, dy$ ядро оператора A^z (это зависящая от параметра $x \in M$ плотность на M, которую в локальных координатах, определенных при $y \in Y$, можно записать в виде $A_z(x, y)\, dy$, где dy — мера Лебега, определяемая локальными координатами, а $A_z(x, y)$ — некоторая непрерывная числовая функция на $M \times Y$). Используя некоторую вольность речи, мы будем называть ядром саму функцию $A_z(x, y)$, зависящую от параметра z и от локальных координат в окрестности точки Y.

Наша цель — построить аналитическое продолжение (по z) ядер $A_z(x, y)$ во всю комплексную z-плоскость $\mathbb{C}$.

Отметим, что если X, Y — открытые подмножества M, то $A_z(x, y)$ при $x \in X$ и $y \in Y$ однозначно определяется значениями $(A^z u, v)$, где $u \in C_0^\infty(Y)$, $v \in C_0^\infty(X)$.

Пусть теперь X — некоторая координатная окрестность (не обязательно связная), которую мы будем отождествлять с открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$. Если ПДО $B \in L^m(X)$ записывается в виде

$$Bu(x) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x, \xi)\, u(y)\, dy\, đ\xi,$$

где $b \in S^l(X \times \mathbb{R}^n)$, то при $l < -n$ его ядро $A(x, y)$ непрерывно и имеет вид

$$A(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x, y)\, đ\xi.$$

Ограничение ПДО A^z на X (см. п. 4.3) можно представить в виде $A^z = A_{1,z} + R_{1,z}$, где $A_{1,z}$ — собственный ПДО, а $R_{1,z}$ — оператор с ядром $R_1(x, y, z) \in C^\infty(X \times X \times \mathbb{C})$, голоморфным по z и равным 0 при близких x и y. Обозначим символ оператора $A_{1,z}$ через $a(x, \xi, z)$ и будем, используя вольность речи, называть его символом оператора A^z. Ядро $A_z(x, y)$ при близких $x, y \in X$ можно записать в виде

$$A_z(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi, z)\, đ\xi. \tag{12.1}$$

Ядро $A_z(x, y)$ при $\operatorname{Re} z < -n/m$ непрерывно и голоморфно по z. При $x = y$ получаем

$$A_z(x, y) = \int a(x, \xi, z)\, đ\xi. \tag{12.2}$$

Отметим, что результат интегрирования в (12.2) (и в (12.1) при близких x и y) не зависит от выбора «символа» $a(x, \xi, z)$.

12.2. Формулировка результата. В формулировке результата будут участвовать построенные в § 11 однородные компоненты $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ символа оператора A^z. Отметим здесь, что при $\operatorname{Re} z < j/m$ они задаются формулами

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_\Gamma \lambda^z b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.3}$$

где $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ — однородные компоненты символа параметрикса оператора $A - \lambda I$, также построенные в § 11. Ранее формула (12.3) употреблялась лишь при $\operatorname{Re} z < 0$, но интеграл в (12.3) сходится при $\operatorname{Re} z < j/m$, так что обе части (12.3) голоморфны по z при $\operatorname{Re} z < j/m$, что и доказывает их совпадение при этих z.

Нужны будут также функции

$$d^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\,\xi)=\int\limits_0^\infty r^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-r)\,dr,\quad j=0,\,1,\,2,\,\ldots,\tag{12.4}$$

определенные при $-1<\operatorname{Re} z<j/m$ и положительно однородные по ξ порядка $mz-j$.

Т е о р е м а 12.1. *Пусть X — любая фиксированная координатная окрестность на M, $A_z(x,\,y)$ — определенные при $\operatorname{Re} z<-n/m$ и при $x,\,y\in X$ ядра комплексных степеней A^z эллиптического оператора A. Тогда*

1) *при $x\neq y$ функция $A_z(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z, равной 0 при $z=0,\,1,\,2,\,\ldots$;*

2) *$A_z(x,\,x)$ продолжается до мероморфной функции во всей комплексной z-плоскости с не более чем простыми полюсами, которые могут быть расположены лишь в точках арифметической прогресии $z_j=\dfrac{j-n}{m}$, $j=0,\,1,\,\ldots$, причем вычет $A_z(x,\,x)$ в точке z_j равен*

$$\gamma_j(x)=-\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} b^{(z_j),\,0}_{-n}(x,\,\xi)\,d\!\!{}^-\xi',\tag{12.5}$$

где $d\!\!{}^-\xi'=(2\pi)^{-n}\,d\xi'$, а $d\xi'$ — элемент площади поверхности сферы $|\,\xi\,|=1$;

3) *если $z_j=l$ — неотрицательное целое число, то $\gamma_j(x)=0$ и значение $\varkappa_l(x)=A_l(x,\,x)$ аналитического продолжения ядра в точке $z=l$ дается формулой*

$$\varkappa_l(x)=(-1)^l\,\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} d^{(l),\,0}_{-n}(x,\,\xi)\,d\!\!{}^-\xi'.\tag{12.6}$$

Утверждение 1) имеет место равномерно при $x\in K_1$, $y\in K_2$, где K_1, K_2 — непересекающиеся компакты, лежащие в X, т. е. $K_z(x,\,y)$ продолжается до целой функции z со значениями в $C(K_1\times K_2)$. Аналогично, утверждения 2) и 3) равномерны по $x\in K$, где K — компакт в X, т. е. отображение $z\mapsto A_z(x,\,x)$, рассматриваемое как функция от z со значениями в $C(K)$, мероморфно продолжается во всю комплексную z-плоскость с полюсами в точках z_j, $j=0,\,1,\,\ldots$, вычетами в этих полюсах $\gamma_j(x)|_K$ и значениями $\varkappa_l(x)|_K$ в точках $l=0,\,1,\,2,\,\ldots$

З а м е ч а н и я. 1) В формуле (12.5) фигурирует функция $b^{(z_j),\,0}_{-n}(x,\,\xi)$, которую можно в соответствии с обозначениями § 11 записать также в виде

$$b_{-n}^{(z_j),\,0}(x,\,\xi) = b_{mz_j-j}^{(z_j),\,0}(x,\,\xi), \tag{12.7}$$

поскольку $mz_j - j = -n$.

2) Поскольку $z_j < j/m$, то вместо (12.5) мы можем написать непосредственное выражение $\gamma_j(x)$ через $b_{-m-j}^0(x,\,\xi,\,\lambda)$:

$$\gamma_j(x) = -\frac{i}{m\cdot 2\pi}\int\limits_{|\xi|=1} d\xi' \int\limits_{\Gamma} \lambda^{\frac{j-n}{m}}\, b_{-m-j}^0(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.8}$$

Аналогичное выражение пишется и для $\varkappa_l(x)$:

$$\varkappa_l(x) = (-1)^l\,\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} d\xi' \int\limits_0^\infty r^l\, b_{-m(l+1)-n}^0(x,\,\xi,\,-r)\,dr, \tag{12.9}$$

где l — неотрицательное целое число (индекс $-m(l+1)-n$) в (12.9) получается, если выразить j через l из соотношения $\dfrac{j-m}{n} = l$.

3) Отметим особо формулу вычета в самом левом полюсе $z_0 = -n/m$:

$$\gamma_0(x) = -\frac{1}{m}\int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi)\,d\xi'. \tag{12.10}$$

В важном частном случае, когда $a_m(x,\,\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, из этой формулы следует, что $\gamma_0(x) \neq 0$. В дальнейшем мы преобразуем в этом случае формулу (12.10) к более естественному для приложений виду.

Доказательство теоремы 12.1. 1. Мы будем пользоваться структурной теоремой 11.2 и использованными там обозначениями $B_{(N)}^{(z)}$ и $R_{(N)}^{(z)} = A^z - B_{(N)}^{(z)}$. Обозначим через $R_{(N)}^{(z)}(x,\,y)$ ядро оператора $R_{(N)}^{(z)}$, а через $r_{(N)}^{(z)}(x,\,\xi)$ — его символ в какой-нибудь координатной окрестности X. Тогда, если $x,\,y \in X$, то

$$R_{(N)}^{(z)}(x,\,y) = \int r_{(N)}^{(z)}(x,\,\xi)\,e^{i(x-y)\cdot\xi}\,d\xi. \tag{12.11}$$

Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re} z < \dfrac{N-n}{m}$ и определяет при этих z голоморфную функцию от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$, где $K_1,\,K_2$ — любые компакты в X.

Поэтому утверждения о голоморфности, полюсах и вычетах сводятся к соответствующим утверждениям для ядер операторов $B_{(N)}^{(z)}$.

Ядро оператора $B^{(z)}_{(N)}$ в свою очередь является суммой слагаемых вида

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b^{(z)}_{mz-j}(x,\, \xi)\, d\!\!{}^-\xi, \tag{12.12}$$

так что мы будем в дальнейшем изучать интегралы вида (12.12).

2. Пусть $K_1,\, K_2$ — непересекающиеся компакты в X. Докажем, что $B^{(z)}_{mz-j}(x,\, y)$ является целой функцией от z со значениями в $C(K_1 \times K_2)$.

Интегрируя в (12.12) по частям при $x \neq y$, мы получим

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} |\, x-y\,|^{-2M} \Delta^M_\xi b^{(z)}_{mz-j}(x,\, \xi)\, d\!\!{}^-\xi, \tag{12.13}$$

где M — натуральное число. Этот интеграл сходится уже при $\operatorname{Re} z < \dfrac{2M+j-n}{m}$ и определяет голоморфную при этих z функцию со значениями в $C(K_1 \times K_2)$, поскольку $|\, x-y\,| \geqslant \varepsilon > 0$ при $x \in K_1,\, y \in K_2$. Ввиду произвольности M ясно, что $B^{(z)}_{mz-j}(x,\, y)$ является целой функцией от z со значениями в $C(K_1 \times K_2)$.

3. При $x = y$ мы имеем

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\, x) = \int b^{(z)}_{mz-j}(x,\, \xi)\, d\!\!{}^-\xi,$$

или

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\, x) = \int \theta(\xi)\, b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\, \xi)\, d\!\!{}^-\xi, \tag{12.14}$$

где $\theta(\xi) = \omega(|\,\xi\,|)$, $\omega(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\omega(\tau) = 0$ при $\tau \leqslant 1/2$, $\omega(\tau) = 1$ при $\tau \geqslant 1$. Перейдем в интеграле (12.14) к полярным координатам. Получим тогда

$$B^{(z)}_{mz-j}(x,\, x) = \left(\int\limits_0^\infty \omega(r)\, r^{mz-j+n-1}\, dr \right) \left(\int\limits_{|\xi|=1} b^{(z),\,0}_{mz-j}(x,\, \xi)\, d\!\!{}^-\xi' \right). \tag{12.15}$$

Ясно, что второй сомножитель является целой функцией от z со значениями в $C(K)$ (K — любой компакт в X). Первый же можно разбить в сумму

$$\int\limits_0^\infty \omega(r)\, r^{mz-j+n-1}\, dr = \int\limits_0^1 \omega(r)\, r^{mz-j+n-1}\, dr + \int\limits_1^\infty r^{mz-j+n-1}\, dr. \tag{12.16}$$

Первый интеграл в (12.16) — целая функция от z, а второй явно вычисляется:

$$\int\limits_1^\infty r^{mz-j+n-1}\, dr = -\frac{1}{mz-j+n} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{z-z_j}, \tag{12.17}$$

где $z_j = \dfrac{j-n}{m}$. Тем самым $B^{(z)}_{mz-j}(x, x)$ имеет единственный полюс с вычетом $\gamma_j(x)$, заданным формулой (12.5).

Проверим, что $\gamma_j(x) = 0$, если $z_j = l$ — неотрицательное и целое. Это ясно из теоремы 11.1, п. г) (функции $b^{(l),\,0}_{ml-j}(x, \xi)$ являются однородными компонентами символа дифференциального оператора A^l и тем самым равны 0 при $ml - j < 0$ и, в частности, при $ml - j = -n$).

4. Для окончания доказательства п. 1) и 2) теоремы 12.1 осталось показать, что $A_l(x, y) = 0$ при $x \neq y$ и $l \in \mathbb{Z}_+$. Для этого достаточно проверить, что если $u,\, v \in C_0^\infty(X)$ и $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v = \varnothing$, то

$$\int A_l(x, y)\, u(y)\, v(x)\, dy\, dx = 0. \tag{12.18}$$

Но это равенство равносильно тому, что $\langle A^l u, v\rangle = 0$, поскольку в силу теоремы 10.1, п. д) функция $\langle A^z u, v\rangle$ является целой функцией от z.

Таким образом, п. 1) и 2) теоремы 12.1 и отсутствие полюсов при $z \in \mathbb{Z}_+$ доказаны. В дальнейшем фактически будет дано новое независимое (хотя и более сложное) доказательство, позволяющее вычислить $A_l(x, x)$ при $l \in \mathbb{Z}_+$. Читатель, не интересующийся этим вычислением, может опустить дальнейшую часть доказательства без ущерба для понимания дальнейшего содержания книги.

5. Для изучения значений $A_z(x, x)$ при $z \in \mathbb{Z}_+$ удобна другая аппроксимация ядер $A_z(x, y)$, получающаяся, если срезку делать не в символах $b^{(z),\,0}_{mz-j}(x, \xi)$ комплексных степеней, а еще в символе параметрикса $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$. По существу, это уже делалось в п. 11.3. Именно, там мы ввели операторы $B_{-m-j}(\lambda)$, $B_{(N)}(\lambda)$, $R_{(N)}(\lambda)$, $'B^{(z)}_{mz-j}$, $'B^{(z)}_{(N)}$, $'R^{(z)}_{(N)}$ и их символы, определенные в произвольной координатной окрестности X: $b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$, $b_{(N)}(x, \xi, \lambda)$, $r_{(N)}(x, \xi, \lambda)$, $'b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi)$, $'b^{(z)}_{(N)}(x, \xi)$, $'r^{(z)}_{(N)}(x, \xi)$ (см. формулы (11.17)—(11.48)). В качестве аппроксимации ядер $A_z(x, y)$ мы будем использовать теперь ядра $'B^{(z)}_{(N)}(x, y)$ операторов $'B^{(z)}_{(N)}$:

$$'B^{(z)}_{(N)}(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} {'B^{(z)}_{mz-j}}(x, y), \tag{12.19}$$

где $'B^{(z)}_{mz-j}(x, y)$ — ядро оператора $'B^{(z)}_{mz-j}$, выражающееся формулой

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x, y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, {'b^{(z)}_{mz-j}}(x, \xi)\, d\xi, \tag{12.20}$$

или

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}b_{mz-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.21}$$

Здесь важную роль играет выбор контура Γ, поскольку интеграл в (12.21) зависит, вообще говоря, от выбора радиуса его круговой части (срезающая функция $\theta(\xi,\,\lambda)$, входящая в определение $b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$, не голоморфна по λ). Будем обозначать радиус круговой части Γ через ρ^m, где $\rho>0$. Ввиду однородности $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ по $(\xi,\,\lambda^{1/m})$ ясно, что существует такая постоянная $L>0$, что $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ при $|\lambda|<L^m|\xi|^m$. Мы выберем радиус круговой части Γ равным ρ^m, где $\rho>0$ таково, что

$$\rho<L/(2\sqrt{L^2+1}). \tag{12.22}$$

Тогда, если $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}\geqslant 1/4$ и $\lambda\in\Gamma$, то либо $|\lambda|>\rho^m$ (т. е. λ принадлежит прямолинейной части Γ), либо $|\lambda|=\rho^m$ и

$$L^m|\xi|^m\geqslant L^m\left(\frac14-|\lambda|^{2/m}\right)^{m/2}=L^m\left(\frac14-\rho^2\right)^{m/2}>\rho^m=|\lambda|$$

(последнее неравенство равносильно (12.22)). Таким образом, ввиду того, что $\theta(\xi,\,\lambda)=0$ при $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}\leqslant 1/2$, при рассмотрении круговой части Γ всегда можно считать $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфной внутри этой круговой части.

Ядра $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ определены и голоморфны при $\operatorname{Re}\,z<j/m$ (при этих z интеграл (12.21) абсолютно сходится). Наша цель в настоящий момент — аналитически продолжить эти ядра во всю комплексную z-плоскость.

Докажем прежде всего, что при $x\neq y$ ядро $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z (и, более того, если $K_1,\,K_2$ — непересекающиеся компакты в X, то ядро $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ продолжается до целой функции от z со значениями в $C(K_1\times K_2)$). В самом деле, стандартное интегрирование по частям дает

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}|x-y|^{-2M}\Delta^M_\xi\left(b_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\right)d\lambda, \tag{12.23}$$

где M — любое натуральное число, а из записи в таком виде очевидна голоморфность $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)$ по z при $\operatorname{Re}\,z<\dfrac{j+2M}{m}$.

6. Теперь покажем, что $'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,y)=0$ при $x\neq y$ и $z\in\mathbb{Z}_+$. Если $z\in\mathbb{Z}_+$, то λ^z — однозначная функция и интегралы по прямолинейным

частям контура Γ в (12.23) сокращаются. Интеграл же по круговой части Γ равен 0 по теореме Коши, поскольку

$$\Delta_\xi^M(b_{-m-\xi}(x,\,\xi,\,\lambda))=\sum_{|\alpha|+|\beta|=2M} C_{\alpha\beta}[\,\partial_\xi^\alpha b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)]\,[\,\partial_\xi^\beta\theta(\xi,\,\lambda)],$$

функция $\partial_\xi^\alpha b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ внутри круговой части Γ, а любая производная $\partial_\xi^\beta\theta(\xi,\,\lambda)$ постоянна по λ при $|\lambda|=\mathrm{const}$.

7. Займемся теперь аналитическим продолжением интеграла

$$'B^{(z)}_{mz-j}(x,\,x)=\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int_\Gamma \lambda^z\theta(\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.24}$$

Пусть Γ^1 — часть контура Γ, лежащая там, где $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}>1$, а Γ^2 — часть, лежащая там, где $|\xi|^2+|\lambda|^{2/m}\leqslant 1$ (при $|\xi|>1$ это пустое множество). Мы имеем, очевидно,

$$\int_\Gamma \lambda^z\theta b^0_{-m-j}\,d\lambda=\int_{\Gamma^1}\lambda^z b^0_{-m-j}\,d\lambda+\int_{\Gamma^2}\lambda^z\theta b^0_{-m-j}\,d\lambda.$$

Ясно, что интеграл

$$\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int_{\Gamma^2}\lambda^z\theta(\xi,\,\lambda)\,b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda$$

представляет собой целую функцию от z. Эта целая функция равна 0 при $z=0,\,1,\,2,\,\ldots$, поскольку тогда интегралы по прямолинейным частям Γ^2 сокращаются ввиду однозначности λ^z, а интеграл по круговой части равен 0 в силу теоремы Коши ($\theta(\xi,\,\lambda)$ постоянна при $|\xi|=\mathrm{const}$ и $|\lambda|=\mathrm{const}$, а $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ внутри круговой части Γ^2). Поэтому можно доказывать все утверждения о продолжении для интеграла

$$I(z)=\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int_{\Gamma^1}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.25}$$

Ясно, что $\Gamma^1=\Gamma$ при $|\xi|\geqslant\sqrt{1-\rho^2}$ и Γ^1 состоит из двух лучей при $|\xi|<\sqrt{1-\rho^2}$. Положим $\Gamma^1_\xi=\Gamma^1$ при $|\xi|<\sqrt{1-\rho^2}$ и $\Gamma^1_\xi=|\xi|^m(1-\rho^2)^{-m/2}\Gamma$ при $|\xi|\geqslant\sqrt{1-\rho^2}$. Поскольку из (12.22) вытекает, что $\rho/\sqrt{1-\rho^2}<L$, то $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ не имеет особенностей при

$|\lambda| < \rho|\xi|/\sqrt{1-\rho^2}^{\,m}$ и по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma^1} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\, \xi,\, \lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\, \xi,\, \lambda)\, d\lambda. \tag{12.26}$$

Сделаем теперь замену переменных, полагая

$\lambda = e^{\pm i\pi} t^m$ на прямолинейной части Γ_ξ;

$\lambda = \alpha^m |\xi|^m e^{i\varphi}$, где $\alpha = \dfrac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, на круговой части Γ^1_ξ.

Цель этой замены — получить из (12.25) интеграл от однородной функции по $(\xi,\, t)$ и дальше действовать, как в п. 3 этого доказательства.

После замены получается, что

$$\frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}\, d\lambda = I_1 \qquad \text{при} \quad |\xi| < \sqrt{1-\rho^2},$$

$$\frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^1_\xi} \lambda^z b^0_{-m-j}\, d\lambda = I_2 + I_3 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \sqrt{1-\rho^2},$$

где

$$I_1 = m \frac{\sin \pi z}{\pi} \int\limits_{\sqrt{1-|\xi|^2}}^{+\infty} t^{mz+m-1} b^0_{-m-j}(x,\, \xi,\, -t^m)\, dt,$$

$$I_2 = m \frac{\sin \pi z}{\pi} \int\limits_{\alpha|\xi|}^{+\infty} t^{mz+m-1} b^0_{-m-j}(x,\, \xi,\, -t^m)\, dt,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\alpha|\xi|)^{mz+m} e^{i\varphi(z+1)} b^0_{-m-j}(x,\, \xi,\, \alpha^m |\xi|^m e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Заметим, что сумма

$$\int\limits_{|\xi| < \sqrt{1-\rho^2}} I_1\, d\xi + \int\limits_{|\xi| \geqslant \sqrt{1-\rho^2}} I_2\, d\xi \tag{12.27}$$

является интегралом функции от $(\xi,\, t)$, однородной порядка $mz + m - 1 - m - j$, по области, являющейся пересечением конической области с дополнением шара (рис. 3).

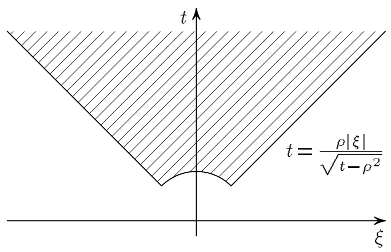

Рис. 3.

Вводя в пространстве $(\xi,\,t)$ полярные координаты, мы видим, что интеграл (12.27) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(mz-j-1)<-n-1$ и в силу (12.17) записывается в виде

$$-\frac{m\sin\pi z}{\pi(mz-j+n)}\int\limits_{\substack{|\xi|^2+t=1\\ t>\rho}} t^{mz+m-1}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,-t^m)\,d(\xi,\,t)', \tag{12.28}$$

где $d(\xi,\,t)'$ — элемент площади единичной сферы S^n в $(\xi,\,t)$-пространстве. Ввиду того, что $\rho>0$, а $t>\rho$, интеграл в (12.28) определен и является целой функцией от z, а все это выражение может иметь лишь один полюс при $z=z_j=\dfrac{j-n}{m}$, причем если $z_j\neq 0,\,1,\,2,\,\ldots$, то оно обращается в 0 при всех $z\in\mathbb{Z}_+$, а если $z_j=l\in\mathbb{Z}_+$, то при всех $z\neq l$, но при этом в точке $z=l$ полюса уже нет.

Здесь можно, разумеется, написать и значение (12.28) при $z=z_j=$ $=l\in\mathbb{Z}_+$, но нам удобнее будет сделать это в дальнейшем сразу для всего интеграла (12.25).

Рассмотрим оставшийся член $\displaystyle\int\limits_{|\xi|>\sqrt{1-\rho^2}} I_3\,d\xi$. Здесь удобно перейти к полярным координатам в ξ-пространстве. Мы получим тогда

$$\int\limits_{|\xi|>\sqrt{1-\rho^2}} I_3\,d\xi=\frac{C}{mz-j+n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi(z+1)}\int\limits_{|\xi|=1}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m e^{i\varphi})\,d\xi'\,d\varphi, \tag{12.29}$$

где $C=\mathrm{const}$. Отсюда очевидна мероморфность этого интеграла с единственным возможным полюсом при $z=z_j$. Если $z=l\in\mathbb{Z}_+$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi(z+1)}b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m e^{i\varphi})\,d\varphi=i^{-1}\int\limits_{|w|=1}w^l b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\alpha^m w)\,dw=0,$$

поскольку функция $b^0_{-m-j}(x,\,\xi,\,\lambda)$ голоморфна по λ при $|\lambda|<\alpha^m$. Отсюда ясно, что при $z=l\in\mathbb{Z}_+$ интеграл (12.29) обращается в 0, за исключением, быть может, точки $z=z_j$ (если $z_j\in\mathbb{Z}_+$), в которой в этом случае нет полюса.

8. Таким образом, доказано, что интеграл (12.24) мероморфно продолжается во всю комплексную плоскость, имея не более одного простого полюса, который возможен лишь при $z=z_j=\dfrac{j-n}{m}$. Более того, при $z=l\in\mathbb{Z}_+$ значение этого интеграла обращается в 0, кроме, быть

может, случая $z=l=z_j$, но тогда в точке z_j нет полюса. Рассмотрим именно этот случай $z=l=z_j\in\mathbb{Z}_+$ и вычислим значение аналитического продолжения (12.24) в точке $z=l=z_j$.

Заметим, что интеграл по λ в (12.24) является при $z=z_j$ сходящимся, поскольку $z_j=\dfrac{j-n}{m}<j/m$. Разобьем интеграл по ξ в сумму интегралов по шару $|\xi|\leqslant 1$ и по внешности $|\xi|>1$. Стандартное рассуждение, уже использованное выше, показывает, что интеграл по шару $|\xi|\leqslant 1$ обращается в 0 при $z=z_j$. При $|\xi|\geqslant 1$ мы имеем $\theta(\xi,\lambda)=1$ и вместо (12.24) достаточно рассмотреть интеграл

$$I=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\xi|\geqslant 1} d\xi \int\limits_{\Gamma} \lambda^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda. \tag{12.30}$$

Переходя к полярным координатам в ξ-пространстве, получим

$$I=-\frac{1}{mz-j+n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda\,d\xi'. \tag{12.31}$$

При $\operatorname{Re} z>-1$ мы можем, пользуясь теоремой Коши, стянуть в точку 0 круговую часть контура Γ. Тогда вместо (12.31) мы получим выражение

$$I=\frac{\sin\pi z}{\pi(mz-j+n)}\int\limits_{|\xi|=1}\int\limits_0^{\infty} r^z b^0_{-m-j}(x,\xi,-r)\,dr\,d\xi'.$$

Значение этого выражения при $z=z_j=l\in\mathbb{Z}_+$ равно в точности $\varkappa_l(x)$, где $\varkappa_l(x)$ задается формулой (12.6) или (12.9). Поэтому $'B^{(l)}_{-n}(x,x)=$ $=\varkappa_l(x)$.

9. Заметим теперь, что разность

$$\begin{aligned} {}'R^{(z)}_{(N)}(x,y)&=A_z(x,y)-{}'B^{(z)}_{(N)}(x,y)=\\ &=\frac{i}{2\pi}\int d\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^z e^{i(x-y)\cdot\xi}r_{(N)}(x,\xi,\lambda)\,d\lambda \end{aligned} \tag{12.32}$$

продолжается до голоморфной функции от z при $\operatorname{Re} z<\dfrac{N-n}{m}$ со значениями в $C(K\times K)$, где K — любой компакт в X. Отсюда видно, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z<\dfrac{N-n}{m}$ функции $A_z(x,y)$ и $'B^{(z)}_{(N)}(x,y)$ имеют одни и те же полюсы с одинаковыми вычетами. Более того, если $z=l\in\mathbb{Z}_+$ и

$x \neq y$, то $A_l(x, y) = {}'B^{(l)}_{(N)}(x, y) = 0$ (см. пп. 4 и 6 этого доказательства). Поэтому ясно, что по непрерывности $A_l(x, y) \equiv {}'B^{(l)}_{(N)}(x, y)$ при всех x, y $\left(\text{если } l < \dfrac{N-n}{m}\right)$. В частности, $A_l(x, x) = {}'B^{(l)}_{(N)}(x, x)$, что с учетом результата п. 8 заканчивает доказательство теоремы 12.1. ■

§ 13. ζ-функция эллиптического оператора и формальные асимптотики спектра

13.1. Определение и теорема о продолжении. Пусть A — эллиптический оператор на замкнутом многообразии M, удовлетворяющий тем же условиям, что и в предыдущем параграфе. Пусть $A_z(x, y)\, dy$ — ядро оператора A^z. При $x = y$ мы получаем из этого ядра плотность $A_z(x, x)\, dx$, корретно определенную на всем многообразии M. Ее можно проинтегрировать по M.

Определение 13.1. Функция

$$\zeta_A(z) = \int_M A_z(x, x)\, dx \tag{13.1}$$

называется *ζ-функцией* эллиптического оператора A.

В следующем пункте будет показано, что $\zeta_A(z)$ выражается через собственные значения оператора A, что позволяет получить в самосопряженном случае простейшую теорему об асимптотике собственных значений. Пока же мы удовлетворимся формальным определением 13.1 и сформулируем теорему об аналитическом продолжении ζ-функции.

Теорема 13.1. *Функция $\zeta_A(z)$, определенная формулой* (13.1) *при* $\operatorname{Re} z < -n/m$, *продолжается до мероморфной функции во всей комплексной z-плоскости с не более чем простыми полюсами, которые могут быть расположены лишь в точках арифметической прогрессии $z_j = \dfrac{j-n}{m}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, за исключением точек $z_j = l = 0, 1, 2, \ldots$, причем вычет γ_j в точке z_j и значение $\varkappa_l = \zeta(l)$ в обозначениях теоремы* 12.1 *даются формулами*

$$\gamma_j = \int_M \gamma_j(x)\, dx = -\frac{1}{m} \int_M dx \int_{|\xi|=1} b^{(z_j),\,0}_{-n}(x, \xi)\, d\xi' =$$
$$= -\frac{i}{2\pi m} \int_M dx \int_{|\xi|=1} d\xi' \int_\Gamma \lambda^{\frac{j-n}{m}}\, b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda, \tag{13.2}$$

$$\varkappa_l = \int\limits_M \varkappa_l(x)\,dx = (-1)^l \frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} d_{-n}^{(l),\,0}(x,\,\xi)\,đ\xi' =$$

$$= (-1)^l \frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} đ\xi' \int\limits_0^\infty r^l b^0_{-m(l+1)-n}(x,\,\xi,\,-r)\,dr. \quad (13.3)$$

Доказательство получается из теоремы 12.1 интегрированием по x формул (12.5) и (12.6) с учетом следующих за теоремой 12.1 замечаний. ■

13.2. Спектральный смысл ζ-функции. В этом пункте мы будем считать, что на M задана гладкая положительная плотность, которую мы, используя некоторую вольность в обозначениях, будем записывать как dx. Тогда ядро оператора можно отождествить с обычной функцией на $M \times M$. Кроме того, имеет смысл говорить о самосопряженности эллиптического оператора на M.

Теорема 13.2. *Пусть на M задан самосопряженный положительный эллиптический дифференциальный оператор A, и пусть λ_j $(j = 1,\,2,\,\ldots)$ — его собственные значения. Тогда*

$$\zeta_A(z) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^z, \quad \operatorname{Re} z < -n/m, \quad (13.4)$$

причем ряд в правой части (13.4) при указанных значениях z сходится абсолютно. Эта сходимость при любом $\varepsilon > 0$ равномерна по z в полуплоскости $\operatorname{Re} z < -n/m - \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} z < -n/m$ и $A_z(x,\,y)$ — ядро оператора A^z, являющееся непрерывной функцией на $M \times M$. Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированная полная система собственных функций A. Разлагая $A_z(x,\,y)$ в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_k(y)}\}_{j,\,k=1}^\infty$, мы получим

$$A_z(x,\,y) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^z \varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}, \quad (13.5)$$

где ряд сходится в $L^2(M \times M)$. Если при этом число z вещественно, то по теореме Мерсера (см. Рисс и Секефальви-Надь [1], § 98) ряд (13.5) сходится абсолютно и равномерно. Полагая в (13.5) $x = y$ и интегрируя по x, мы получим тождество (13.4). В случае же невещественного z необходимо заметить, что $|\lambda_j^z| = \lambda_j^{\operatorname{Re} z}$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость рядов в (13.4) и (13.5). Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что если $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 < -n/m$, то ряд (13.5) при $\operatorname{Re} z < s_0$ мажорируется по модулю суммой рядов

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{s_0}|\varphi_j(x)|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{s_0}|\varphi_j(y)|^2,$$

представляющих собой абсолютно и равномерно сходящиеся ряды с положительными членами. ■

Замечание 1. Можно доказать теорему 13.2 и без использования теоремы Мерсера, если заметить, что при $\operatorname{Re} z < -n/(2m)$ оператор A^z имеет ядро $A_z(x, y) \in L^2(M \times M)$ (или, как говорят, является оператором Гильберта–Шмидта), причем в силу равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2s}=\int\limits_{M\times M}|A_s(x, y)|^2\,dx\,dy, \qquad s<-n/(2m). \tag{13.6}$$

Но из группового свойства следует, что при $s < -n$

$$A_s(x, y)=\int A_{s/2}(x, z)\,A_{s/2}(z, y)\,dz,$$

или

$$A_s(x, y)=\int A_{s/2}(x, z)\,\overline{A_{s/2}(y, z)}\,dz$$

в силу эрмитовости ядра $A_{s/2}(x, y)$. Полагая здесь $x = y$ и интегрируя по x, мы получим из (13.6), что тождество (13.4) верно при вещественных $z < -n/m$. Переход к комплексному z осуществляется так же, как и выше, или с помощью аналитического продолжения.

Отметим, однако, что из этого доказательства трудно получить точную информацию о разложении (13.5) (в частности, равномерную сходимость стоящего там ряда).

Замечание 2. Тождество (13.4) верно и без предположения о самосопряженности A. Доказательство легко получить из теоремы В. Б. Лидского (см. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. [1], теорема 8.4). Однако в несамосопряженном случае не удается извлечь из (13.4) какую бы то ни было содержательную информацию о собственных значениях. Исключение представляет собой случай нормального оператора A, где, впрочем, результаты могут быть просто выведены из результатов, относящихся к самосопряженному случаю.

13.3. Формальная асимптотика функции $N(t)$ в самосопряженном случае. Функция $V(t)$. Пусть оператор A такой же, как в теореме 3.2.

Обозначим для любого $t \in \mathbb{R}$

$$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1, \tag{13.7}$$

т. е. $N(t)$ — количество собственных значений оператора A, не превосходящих t (с учетом кратности). Ясно, что $N(t)$ — неубывающая функция от t, равная 0 при $t < \lambda_1$. Мы считаем здесь для удобства, что собственные значения упорядочены по возрастанию:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \tag{13.8}$$

Имеется очевидная формула, выражающая $\zeta_A(z)$ через $N(t)$ в виде интеграла Стильтьеса:

$$\zeta_A(z) = \int\limits_0^\infty t^z \, dN(t). \tag{13.9}$$

Предположим теперь, что при $t \to +\infty$ функция $N(t)$ допускает следующее асимптотическое разложение:

$$N(t) = c_1 t^{\alpha_1} + c_2 t^{\alpha_2} + \ldots + c_k t^{\alpha_k} + O(t^{\alpha_{k+1}}), \tag{13.10}$$

где $\mathrm{Re}\ \alpha_1 > \mathrm{Re}\ \alpha_2 > \ldots > \mathrm{Re}\ \alpha_k > \mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$. Тогда

$$\zeta_A(z) = \sum_{l=1}^k c_l \int\limits_1^\infty t^z d(t^{\alpha_l}) + f_k(z), \tag{13.11}$$

где $f_k(z)$ голоморфна при $\mathrm{Re}\ z < -\mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$. Поскольку

$$\int\limits_1^\infty t^z d(t^{\alpha_l}) = \int\limits_1^\infty \alpha_l t^{z+\alpha_l-1} \, dt = -\frac{\alpha_l}{z+\alpha_l},$$

то (13.11) можно переписать в виде

$$\zeta_A(z) = -\sum_{l=1}^k \frac{c_l \alpha_l}{z+\alpha_l} + f_k(z). \tag{13.12}$$

Следовательно, $\zeta_A(z)$ имеет при $\mathrm{Re}\ z < -\mathrm{Re}\ \alpha_{k+1}$ простые полюсы в точках $-\alpha_l$ с вычетами $-c_l \alpha_l$, $l = 1, \ldots, k$. Поэтому знание полюсов функции $\zeta_A(s)$ и вычетов в них позволяет написать формальную асимптотику функции $N(t)$. Однако в действительности удается вычислить только первый член асимптотики. Этот член, диктуемый сопоставлением (13.10) и (13.12), должен иметь вид $-\dfrac{r_0}{s_0} t^{s_0}$, если $\zeta_A(s)$ имеет самыйлевый полюс в точке $-s_0 < 0$ с вычетом r_0.

Формула

$$N(t) \sim -\frac{r_0}{s_0} t^{s_0} \tag{13.13}$$

будет аккуратно доказана в следующем параграфе с помощью тауберовой теоремы Икехара, а пока мы займемся уточнением ее коэффициентов.

По теореме 13.1 мы имеем $s_0 = n/m$ и

$$r_0 = -\frac{1}{m} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x, \xi)\, d\xi'. \tag{13.14}$$

Поскольку в рассматриваемой ситуации $a_m(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, то $r_0 \neq 0$, так что полюс в точке $-n/m$ действительно имеется. Формула (13.13) записывается теперь в виде

$$N(t) \sim \frac{1}{n} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x, \xi)\, d\xi' \cdot t^{n/m}. \tag{13.15}$$

Мы преобразуем сейчас правую часть (13.15) к более естественному виду. Для этого введем функцию

$$V(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{a_m(x,\xi)<t} dx\, d\xi. \tag{13.16}$$

Отметим, что она имеет инвариантный смысл: это умноженный на $(2\pi)^{-n}$ объем в T^*M множества тех (x, ξ), где $a_m(x, \xi) < t$, причем объем берется по мере на T^*M, индуцированной кононической симплектической структурой (см. Арнольд [1]).

Л е м м а 13.1. *Имеет место формула*

$$V(t) = \frac{1}{n} \int\limits_M dx \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x, \xi)\, d\xi' \cdot t^{n/m}, \tag{13.17}$$

и, таким образом, вместо (13.15) *можно написать*

$$N(t) \sim V(t). \tag{13.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что в силу однородности a_m условие $a_m(x, \xi) < t$ равносильно условию $a_m(x, t^{-1/m}\xi) < 1$, и делая в (13.16) замену $\eta = t^{-1/m}\xi$, мы получим

$$V(t) = \int\limits_{a_m(x,\eta)<1} dx\, d\eta \cdot t^{n/m}.$$

Дальнейшие рассуждения будут идти при фиксированном x, и мы будем писать $a_m(\xi)$ вместо $a_m(x, \xi)$. Необходимо доказать, что

$$\int\limits_{a_m(\xi)<1} d\xi = \frac{1}{n} \int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(\xi')\, d\xi'. \tag{13.19}$$

Пусть $|\xi'|=1$ и $d(\xi') = \sup\limits_{t>0}\{t\colon a_m(t\xi') \leqslant 1\}$ (рис. 4), т. е. $d(\xi')$ — расстояние от точки 0 до поверхности $a_m(\xi)=1$ по направлению ξ'. Рассмотрим бесконечно малый конус с вершиной в точке 0 и высотой $d(\xi')\cdot\xi'$, высекающий на сфере $|\xi'|=1$ площадь $d\xi'$.

Тогда его объем будет равен $\dfrac{1}{n}\,(d(\xi'))^n \cdot d\xi'$. Поэтому

$$\int\limits_{a_m(\xi)<1} d\xi = \frac{1}{n} \int\limits_{|\xi'|=1} (d(\xi'))^n\, d\xi'. \tag{13.20}$$

Но ввиду однородности $a_m(\xi)$

$$a_m = a_m\Big(|\xi|\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\Big) = |\xi|^m a_m\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big),$$

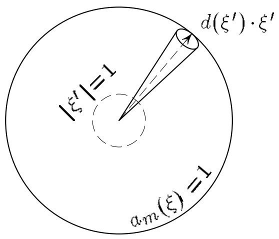

Рис. 4.

так что если $a_m(\xi)=1$, то $a_m\Big(\dfrac{\xi}{|\xi|}\Big) = |\xi|^{-m}$, откуда $d(\xi') = |\xi| = a_m(\xi')^{-1/m}$. Подставляя это выражение $d(\xi')$ в (13.20), мы получаем (13.19). ■

13.4. Асимптотика собственного числа. Мы укажем сейчас асимптотическую формулу для λ_k при $k\to+\infty$, эквивалентную асимптотической формуле для $N(t)$ ((13.13), (13.15) или (13.18)) и вытекающую из того, что, по существу, $N(t)$, как функция t, и λ_k, как функция k, являются взаимно обратными функциями.

Обозначим через V_1 коэффициент при $t^{n/m}$ в формуле (13.17), так что $V_1 = V(1)$. Тогда искомая формула имеет вид

$$\lambda_k \sim V_1^{-m/n}\cdot k^{m/n} \quad \text{при} \quad k\to+\infty. \tag{13.21}$$

Предложение 13.1. *Асимптотические формулы* (13.21) *и* (13.18) *эквивалентны (т. е. вытекают одна из другой).*

Доказательство. 1. Пусть верна формула (13.18), т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $t_0>0$, что

$$1-\varepsilon \leqslant N(t)\,V_1^{-1}t^{-n/m} \leqslant 1+\varepsilon \tag{13.22}$$

при $t>t_0$. Выберем теперь такое целое $k_0>0$, что $\lambda_{k_0}>t_0$ и $\lambda_{k_0+1}>\lambda_{k_0}$. Покажем, что тогда

$$1-\varepsilon\leqslant kV_1^{-1}\lambda_k^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon \tag{13.23}$$

при $k\geqslant k_0$. В самом деле, для любого $k\geqslant k_0$ существуют такие целые числа k_1, k_2, что $k_0\leqslant k_1<k\leqslant k_2$ и $\lambda_{k_1}<\lambda_{k_1+1}=\lambda_{k_2}<\lambda_{k_2+1}$. В частности, мы имеем $N(\lambda_{k_1})=k_1$ и $N(\lambda_{k_2})=k_2$, так что из (13.22) следует, что

$$1-\varepsilon\leqslant k_1V_1^{-1}\lambda_{k_1}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon, \tag{13.24}$$

$$1-\varepsilon\leqslant k_2V_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon. \tag{13.25}$$

Более того, $N(t)=k_1$ при $\lambda_{k_1}\leqslant t<\lambda_{k_2}$, так что при этих t

$$1-\varepsilon\leqslant k_1V_1^{-1}t^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon$$

и по непрерывности

$$1-\varepsilon\leqslant k_1V_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon. \tag{13.26}$$

Из (13.25) и (13.26) следует, что

$$1-\varepsilon\leqslant kV_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon, \tag{13.27}$$

и остается заметить, что $\lambda_k=\lambda_{k_2}$. Итак, соотношение (13.23) доказано. Но из него вытекает, что

$$(1+\varepsilon)^{-m/n}V_1^{-m/n}k^{m/n}\leqslant\lambda_k\leqslant(1-\varepsilon)^{-m/n}V_1^{-m/n}k^{m/n}, \tag{13.28}$$

откуда и следует (13.21).

2. Пусть выполнено (13.21). Выберем $\varepsilon>0$, и пусть целое число k_0 таково, что при целом $k>k_0$ справедливы неравенства (13.28).

Пусть $\lambda_{k_1}\leqslant t<\lambda_{k_2}$, где k_1, k_2 такие же, как и в п. 1. Из (13.28) следует, в частности, что

$$1-\varepsilon\leqslant k_1V_1^{-1}\lambda_{k_1}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon, \tag{13.29}$$

$$1-\varepsilon\leqslant (k_1+1)V_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+\varepsilon, \tag{13.30}$$

поскольку $\lambda_{k_1+1}=\lambda_{k_2}$. Выберем число k_0 столь большим, что $V_1^{-1}\lambda_k^{-n/m}\leqslant\varepsilon$ при $k\geqslant k_0$. Тогда из (13.30) получается, что

$$1-2\varepsilon\leqslant k_1V_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+2\varepsilon. \tag{13.31}$$

Но $N(t)=k_1$, поэтому из (13.29) и (13.31) мы получаем, что

$$1-2\varepsilon\leqslant N(t)V_1^{-1}\lambda_{k_1}^{-n/m}\leqslant 1+2\varepsilon,$$

$$1-2\varepsilon\leqslant N(t)V_1^{-1}\lambda_{k_2}^{-n/m}\leqslant 1+2\varepsilon,$$

откуда ввиду того, что $\lambda_{k_1} \leqslant t < \lambda_{k_2}$, следует

$$1 - 2\varepsilon \leqslant N(t) V_1^{-1} t^{-n/m} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

что и требовалось. ■

13.5. Задачи.

Задача 13.1. Найти полюсы, вычеты и значения в неотрицательных целых точках для ζ-функции оператора $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Выразить классическую ζ-функцию Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{13.32}$$

через $\zeta_A(z)$ и найти все полюсы и вычеты $\zeta(z)$ и ее значения при $z = 0, -2, -4, \ldots$

Задача 13.2. На торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ рассмотреть оператор Шредингера $A = -\Delta + q(x)$, где $q(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, и написать выражение $\zeta_A(0)$ через $q(x)$.

Задача 13.3. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор, действующий из $C^\infty(M, E)$ в $C^\infty(M, F)$, где E, F — гладкие векторные расслоения над M. Пусть на M дана гладкая плотность, а в E и F — эрмитовы структуры (эрмитова метрика в каждом слое). Доказать, что

$$\operatorname{index} A = \zeta_{I+A^*A}(z) - \zeta_{I+AA^*}(z), \tag{13.33}$$

где правая часть не зависит от z. Эта формула позволяет в принципе выписать выражение index A через символ оператора A, используя теорему 13.1, дающую возможность вычислять значение $\zeta_B(0)$ при $B = I + A^*A$ или $B = I + AA^*$.

Указание. Все ненулевые собственные значения операторов AA^* и A^*A имеют одинаковую кратность, поскольку оператор A отображает собственное подпространство оператора A^*A в собственное подпространство оператора AA^*, а оператор A^* — наоборот.

Задача 13.4. Показать, что оператор e^{At} из задачи 10.1 имеет ядро $K(t, x, y)$, бесконечно дифференцируемое по t, x, y при $t > 0$ и при всех $x \in M$, $y \in M$. При этом $t \to +0$ имеют место следующие асимптотические свойства $K(t, x, y)$.

а) Если $x \neq y$, то $K(t, x, y) = O(t^N)$ при любом $N > 0$.

б) $K(t, x, x)$ при $t \to +0$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$K(t, x, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x)\, t^{\frac{j-n}{m}}, \tag{13.34}$$

где $\alpha_j(x) \in C^\infty(M)$. Выразить $\alpha_j(x)$ через $\gamma_j(x)$ и $\varkappa_l(x)$ (см. теорему 12.1) и написать выражение $\alpha_j(x)$ через символ оператора A.

Проверить, что если $A^* = A$, то

$$K(t,\, x,\, y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)} \tag{13.35}$$

и θ-функция

$$\theta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int\limits_M K(t,\, x,\, x)\, dx \tag{13.36}$$

имеет асимптотическое разложение

$$\theta(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^{\frac{j-n}{m}}. \tag{13.37}$$

Выразить index A через θ-функции операторов A^*A и AA^*.

Задача 13.5. Пусть E — эрмитово расслоение на замкнутом многообразии M с гладкой положительной плотностью, A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор из $C^\infty(M,\, E)$ в $C^\infty(M,\, E)$ (не обязательно полуограниченный).

Рассмотрим функцию

$$\eta_A(z) = \sum_{\lambda} (\operatorname{sign} \lambda) \cdot |\lambda|^z, \tag{13.38}$$

где сумма берется по всем собственным значениям оператора A. Доказать, что ряд (13.38) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z < -n/m$ и определяемая им функция $\eta_A(z)$ мероморфно продолжается во всю комплексную z-плоскость с простыми полюсами в точках $z_j = \dfrac{j-n}{m}$, $j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ Выразить вычеты этих полюсов через символ оператора A.

Указание. Выразить $\eta_A(z)$ через $\zeta'_A(z)$ и $\zeta''_A(z)$ — две ζ-функции оператора A, полученные с помощью различных выборов ветви λ^z с разрезами по верхней и нижней полуосям мнимой оси.

§ 14. Тауберова теорема Икехара

14.1. Формулировка. Тауберова теорема Икехара позволяет вывести из мероморфности ζ-функции асимптотические формулы для $N(t)$ при $t \to +\infty$ или для λ_k при $k \to +\infty$ (см. § 13). Приведем ее точную формулировку.

Теорема 14.1. *Пусть $N(t)$ — неубывающая функция, равная 0 при $t \leqslant 1$ и такая, что интеграл*

$$\zeta(z) = \int_1^\infty t^z \, dN(t) \tag{14.1}$$

сходится при $\operatorname{Re} z < -k_0$, *где* $k_0 > 0$, *причем функция* $\zeta(z) + \dfrac{A}{z + k_0}$ *непрерывно продолжается в замкнутую полуплоскость* $\operatorname{Re} z \leqslant -k_0$. *Тогда при* $t \to +\infty$

$$N(t) \sim \frac{A}{k_0} t^{k_0} \tag{14.2}$$

(*напомним, что запись* $f_1(t) \sim f_2(t)$ *при* $t \to +\infty$ *означает, что* $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t)/f_2(t) = 1$).

Следствие 14.1. *Пусть функция* $\zeta(z)$, *определенная при* $\operatorname{Re} z < -k_0$ *интегралом* (14.1), *мероморфно продолжается в более широкую полуплоскость* $\operatorname{Re} z < -k_0 + \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$, *причем на прямой* $\operatorname{Re} z = -k_0$ *имеется единственный и притом простой полюс в точке* $-k_0$ *с вычетом* $-A$. *Тогда верна асимптотическая формула* (14.2).

14.2. Начало доказательства теоремы 14.1: редукции.

1-я редукция. Удобно вместо $\zeta(z)$ рассмотреть $f(z) = \zeta(-z)$. Тогда мы получаем

$$f(z) = \int_1^\infty t^{-z} \, dN(t), \tag{14.3}$$

причем интеграл сходится при $\operatorname{Re} z \geqslant k_0$, а функция $f(z) - \dfrac{A}{z - k_0}$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant k_0$.

2-я редукция. Сведем дело к случаю $k_0 = 1$. Именно, введем функцию $f_1(z) = f(k_0 z)$. Тогда мы получим

$$f_1(z) = \int_1^\infty t^{-k_0 z} \, dN(t) = \int_1^\infty \tau^{-z} \, dN_1(\tau),$$

где $N_1(\tau) = N(\tau^{1/k_0})$. Поскольку

$$f(k_0 z) - \frac{A}{k_0 z - k_0} = f_1(z) - \frac{A}{k_0} \cdot \frac{1}{z - 1}$$

и асимптотика $N(t) \sim \dfrac{A}{k_0} t^{k_0}$ эквивалентна асимптотике $N_1(\tau) \sim \dfrac{A}{k_0} \tau$, то теорема 14.1 сводится к следующему утверждению:

Пусть $N(t)$ — неубывающая функция и интеграл

$$f(z) = \int_1^\infty t^{-z}\, dN(t) \tag{14.4}$$

сходится при $\mathrm{Re}\, z > 1$, причем функция $f(z) - \dfrac{A}{z-1}$ непрерывна при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 1$. Тогда при $t \to +\infty$

$$N(t) \sim At. \tag{14.5}$$

Отметим, что из условия непрерывности $f(z) - \dfrac{A}{z-1}$ при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 1$ и того, что $f(z) \geqslant 0$ при вещественном $z \geqslant 1$, вытекает, что $A > 0$. Заменяя $N(t)$ на $A^{-1}N(t)$, что приводит к замене $f(z)$ на $A^{-1}f(z)$, мы видим, что утверждение достаточно доказывать при $A = 1$.

3-я редукция. Перейдем от преобразования Меллина к преобразованию Лапласа, т. е. сделаем замену переменной $t = e^x$. Положим $N(e^x) = \varphi(x)$. Тогда мы получим, что $\varphi(x)$ — неубывaщая функция, равная 0 при $x < 0$, причем интеграл

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\, d\varphi(x) \tag{14.6}$$

сходится при $\mathrm{Re}\, z > 1$, причем функция $f(z) - \dfrac{1}{z-1}$ непрерывна при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 1$. Надо доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\varphi(x) = 1. \tag{14.7}$$

4-я редукция. Обозначим $H(x) = e^{-x}\varphi(x)$. Условие монотонности $\varphi(x)$ принимает вид

$$H(y) \geqslant H(x)\, e^{x-y} \quad \text{при} \quad y \geqslant x. \tag{14.8}$$

Интегрируя по частям в (14.6), мы получаем при $\mathrm{Re}\, z > 1$

$$f(z) = z \int_0^\infty e^{-zx}\varphi(x)\, dx = z \int_0^\infty e^{-(z-1)x} H(x)\, dx. \tag{14.9}$$

Мы положим теперь $z = 1 + \varepsilon + it$, где $\varepsilon > 0$ и t вещественно. Заметим, что $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(z-1)x}\, dx = \frac{1}{z-1}$, поэтому из (14.9) следует $\dfrac{f(z)}{z} - \dfrac{1}{z-1} =$

$= \int\limits_0^\infty e^{-(z-1)x}(H(x)-1)\,dx$. Поскольку $\dfrac{f(z)}{z} - \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z}\Big(f(z) - \dfrac{1}{z-1} - 1\Big)$,

то, полагая
$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{z}\Big(f(z) - \frac{1}{z-1} - 1\Big)\Big|_{z=1+\varepsilon+it}, \tag{14.10}$$
мы получаем
$$h_\varepsilon(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon x - itx}(H(x)-1)\,dx. \tag{14.11}$$

Мы можем теперь дать следующую переформулировку теоремы 14.1.

Т е о р е м а 14.1$'$. *Пусть $H(x)$ — функция, равная 0 при $x<0$ и удовлетворяющая при всех вещественных x и y условию* (14.8). *Пусть интеграл* (14.11) *абсолютно сходится при любом $\varepsilon>0$ и определяемая им функция $h_\varepsilon(t)$ такова, что предел*
$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t) = h(t) \tag{14.12}$$
существует и равномерен на любом конечном отрезке $|t|\leqslant 2\lambda$. Тогда
$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1. \tag{14.13}$$

З а м е ч а н и е. Если функция $H(x)$ стремится к 1 достаточно быстро (например, если $H(x)-1\in L^1([0,+\infty)))$, то (14.12) получается из (14.13) предельным переходом под знаком интеграла, который можно выполнить в силу теоремы Лебега (функция $h(t)$ равна тогда преобразованию Фурье от $\theta(x)\,(H(x)-1)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда). Тауберово условие (14.8) позволяет в некотором смысле обратить это утверждение.

14.3. Основная лемма. Ясно, что для доказательства теоремы 14.1$'$ нужно каким-то образом выразить $H(x)-1$ через $h(t)$, что, формально говоря, делается с помощью обращения преобразования Фурье. Поскольку, однако, мы ничего не знаем о поведении $h(t)$ при $t\to+\infty$ и о характере сходимости $h_\varepsilon(t)$ к $h(t)$ на всей прямой, нужно вначале умножить предельное равенство (14.12) на финитную срезающую функцию $\tilde\rho(t)$. Соображения, связанные с удобством обращения с положительными ядрами (типа ядер Фейера), показывают, что удобно считать функцию $\tilde\rho(t)$ преобразованием Фурье неотрицательной функции $\rho(v)\in L^1(\mathbb{R}^1)$:
$$\tilde\rho(t) = \int e^{-itv}\rho(v)\,dv. \tag{14.14}$$

Мы будем считать, что $\tilde{\rho}(t)$ — такая финитная непрерывная функция, что $\tilde{\rho}(0)=1$ и $\rho(v)\geqslant 0$, причем $\rho(v)\in L^1(\mathbb{R}^1)$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v)\,dv = 1. \tag{14.15}$$

Существование функции $\tilde{\rho}(t)$ описанного типа может быть доказано так же, как в п. 6.3 (в начале доказательства теоремы 6.3 была построена функция $\tilde{\rho}(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющая всем требуемым условиям). Кроме того, можно выбрать $\tilde{\rho}(t)$ явно, полагая

$$\tilde{\rho}(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{2} & \text{при} \quad |\,t\,|\leqslant 2,\\ 0 & \text{при} \quad |\,t\,|>2. \end{cases}$$

В самом деле, тогда при фиксированном $v\neq 0$ имеем

$$\rho(v)=\int_{-2}^{2} e^{itv}\Big(1-\frac{|t|}{2}\Big)\,dt = -\int_{-2}^{2} \frac{e^{itv}}{iv}\,d\Big(1-\frac{|t|}{2}\Big)+\frac{e^{itv}}{2\pi iv}\;\Big(1-\frac{|t|}{2}\Big)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$=\int_{-2}^{2} \frac{e^{itv}}{2iv}\;\operatorname{sign} t\,dt = -\frac{e^{itv}}{4\pi v^2}\Big|_0^2 - \frac{e^{itv}}{4\pi v^2}\Big|_0^{-2} = \frac{1-\cos 2v}{2\pi v^2}=\frac{1}{\pi}\;\frac{\sin^2 v}{v^2},$$

откуда очевидны все необходимые свойства $\rho(v)$.

Лемма 14.1. *Для любого фиксированного* $\lambda>0$

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = 1. \tag{14.16}$$

Доказательство. 1. Положим $\tilde{\rho}_\lambda(t)=\tilde{\rho}(t/\lambda)$ и $\rho_\lambda(v)=\lambda\rho(\lambda v)$, так что $\tilde{\rho}_\lambda(t)$ — преобразование Фурье функции $\rho_\lambda(v)$. Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} H(y-v)\,\rho_\lambda(v)\,dv, \tag{14.17}$$

и поскольку функция $\rho_\lambda(v)$ обладает теми же свойствами, что и $\rho(v)$, то достаточно доказать (14.16) при $\lambda=1$.

2. Полагая $F_\varepsilon(t)=\tilde{\rho}(t)\,h_\varepsilon(t)$, вычислим обратное преобразование Фурье от финитной функции $F_\varepsilon(t)$, учитывая, что $\tilde{\rho}(t)$ и $h_\varepsilon(t)$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций $\rho(v)$ и

$\theta(v)\,(H(v)-1)\,e^{-\varepsilon v}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} F_\varepsilon(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\tilde\rho(t)\left[\int\limits_0^\infty (H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x - itx}\,dx\right]dt =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} (H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde\rho(t)\,e^{it(y-x)}\,dt\right]dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} (H(x)-1)\,e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx. \quad (14.18)$$

В итоге, как и следовало ожидать, получилась свертка, но при этом мы удостоверились, что формула (14.18) имеет место всюду и в обычном смысле (перестановка интегрирований законна по теореме Фубини).

Перепишем теперь (14.18) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} F_\varepsilon(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx = \int\limits_0^\infty H(x)\,e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)\,dx \quad (14.19)$$

и совершим здесь предельный переход при $\varepsilon \to +0$. Поскольку $\operatorname{supp} F_\varepsilon(t) \subset \operatorname{supp}\tilde\rho(t)$ и $F_\varepsilon(t) \to F(t)$ равномерно по $t \in \operatorname{supp}\tilde\rho(t)$ (здесь $F(t) = \tilde\rho(t)\,h(t)$), то 1-й интеграл в левой части имеет предел при $\varepsilon \to +0$ и при любом y. То же верно (например, по теореме Лебега) и для 2-го интеграла. Поэтому интеграл в правой части (14.19) имеет при любом y предел при $\varepsilon \to +0$. Поскольку $H(x)e^{-\varepsilon x}\rho(y-x)$ монотонно сходится при $\varepsilon \to +0$ к пределу $H(x)\rho(y-x)$, то мы получаем теперь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} F(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \rho(y-x)\,dx = \int\limits_0^\infty H(x)\,\rho(y-x)\,dx. \quad (14.20)$$

Устремим теперь y к $+\infty$. По лемме Римана

$$\lim_{y\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} F(t)\,dt = 0.$$

Кроме того, ясно, что $\lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_0^\infty \rho(y-x)\,dx = 1$. Поэтому из (14.20) следует, что

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=1. \tag{14.21}$$

Но

$$\int_0^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\rho(y-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} H(y-v)\,\rho(v)\,dv,$$

так что (14.21) означает утверждение леммы. ■

14.4. Доказательство теоремы 14.1′. 1. Докажем вначале, что

$$\varlimsup_{y\to+\infty} H(y)\leqslant 1. \tag{14.22}$$

Поскольку

$$\int_{-a}^{a} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv$$

при любом $a>0$, то из леммы 14.1 следует, что

$$\varlimsup_{y\to+\infty}\int_{-a}^{a} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv\leqslant 1. \tag{14.23}$$

Но в силу тауберова условия (14.8) мы имеем

$$H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\geqslant H\Big(y-\frac{a}{\lambda}\Big)\,e^{-\frac{2a}{\lambda}}\quad\text{при}\quad v\in[-a,\,a].$$

Из (14.23) теперь следует, что

$$\varlimsup_{y\to+\infty} H\Big(y-\frac{a}{\lambda}\Big)e^{-\frac{2a}{\lambda}}\int_{-a}^{a}\rho(v)\,dv\leqslant 1,$$

или

$$\varlimsup_{y\to+\infty} H(y)\leqslant e^{\frac{2a}{\lambda}}\left(\int_{-a}^{a}\rho(v)\,dv\right)^{-1}. \tag{14.24}$$

Неравенство (14.24) верно для любых $a>0$ и $\lambda>0$. Пусть в нем $a\to+\infty$ и $\lambda\to+\infty$, причем $a/\lambda\to 0$. Тогда из (14.24) получается требуемая оценка (14.22).

2. Докажем теперь, что

$$\varliminf_{y\to+\infty} H(y) \geqslant 1. \tag{14.25}$$

Заметим прежде всего, что из (14.22) вытекает ограниченность $H(y)$:

$$|H(y)| \leqslant M, \quad y \in \mathbb{R}^1, \tag{14.26}$$

в силу которой

$$\int\limits_{|v|\geqslant b} H\Big(y - \frac{v}{\lambda}\Big)\rho(v)\,dv \leqslant \alpha(b), \tag{14.27}$$

где $\alpha(b)\to 0$ при $b\to+\infty$ (это означает, в частности, что интеграл в левой части (14.27) стремится к 0 при $b\to+\infty$ равномерно по y и λ).

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv = \int\limits_{-b}^{b}\ldots + \int\limits_{|v|\geqslant b}\ldots,$$

то в силу (14.27) и леммы 14.1 мы получаем при любом $b>0$

$$\varliminf_{y\to+\infty}\int\limits_{|v|\leqslant b} H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)\,\rho(v)\,dv \geqslant 1-\alpha(b). \tag{14.28}$$

Теперь опять воспользуемся условием (14.8). Имеем

$$H\Big(y+\frac{b}{\lambda}\Big) \geqslant H\Big(y-\frac{v}{\lambda}\Big)e^{-\frac{2b}{\lambda}} \quad \text{при} \quad v\in[-b,\,b],$$

откуда в силу (14.28)

$$\varliminf_{y\to+\infty} H\Big(y+\frac{b}{\lambda}\Big)\,e^{\frac{2b}{\lambda}}\int\limits_{-b}^{b}\rho(v)\,dv \geqslant 1-\alpha(b),$$

или

$$\varliminf_{y\to+\infty} H(y) \geqslant (1-\alpha(b))\,e^{-\frac{2b}{\lambda}}\Bigg(\int\limits_{-b}^{b}\rho(v)\,dv\Bigg)^{-1}. \tag{14.29}$$

Пусть теперь $b\to+\infty$ и $\lambda\to+\infty$, причем $b/\lambda\to 0$. Тогда из (14.29) получается требуемое неравенство (14.25). ■

З а д а ч а 14.1. Пусть $N(t)$ — неубывающая функция, равная 0 при $t\leqslant 1$, и пусть интеграл (14.1) сходится при $\operatorname{Re} z < -k_0$, где $k_0>0$. Пусть функция $\zeta(z)$, определенная формулой (14.1), мероморфно продолжается в более широкую полуплоскость $\operatorname{Re} z < -k_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, причем на прямой $\operatorname{Re} z = -k_0$ имеется единственный полюс в точке $-k_0$ с главным членом разложения Лорана, равным $A(z+k_0)^{-l}$ (здесь l — натуральное число, равное порядку полюса в точке $-k_0$). Доказать, что тогда

$$N(t) \sim \frac{(-1)^{l-1} A}{(l-1)!} \cdot t^{k_0} (\ln\, t)^{l-1}$$

при $t \to +\infty$.

Задача 14.2. Доказать тауберову теорему Карамата:

Пусть $N(t)$ — неубывающая функция от $t \in \mathbb{R}^1$, равная 0 при $t < 1$ и такая, что интеграл

$$\theta(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dN(t) \tag{14.30}$$

сходится при всех $z > 0$, причем

$$\theta(z) \sim A z^{-\alpha} \quad \text{при} \quad z \to +0 \tag{14.31}$$

(здесь $A > 0$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные).

Тогда

$$N(t) \sim \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\, t^{\alpha} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{14.32}$$

§ 15. Асимптотика спектральной функции и собственных значений (грубые теоремы)

15.1. Спектральная функция и ее асимптотика на диагонали. Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, на котором задана гладкая положительная плотность, A — самосопряженный эллиптический оператор на M, причем

$$a_m(x, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0. \tag{15.1}$$

Тогда оператор A полуограничен, и мы обозначим через λ_j его собственные значения, занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности):

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots,$$

а через $\varphi_j(x)$ — соответствующие собственные функции, образующие ортонормированную систему.

Пусть E_t — спектральный проектор оператора A (ортогональный проектор на линейную оболочку всех собственных векторов с собственными значениями, не превосходящими t). Ясно, что

$$E_t u = \sum_{\lambda_j \leqslant t} (u, \varphi_j)\, \varphi_j. \tag{15.2}$$

Определение 15.1. *Спектральной функцией* оператора A называется ядро (в смысле Л. Шварца) оператора E_t.

Учитывая имеющееся на M соответствие между функциями и плотностями, мы можем считать спектральную функцию не плотностью, а функцией. Из (15.2) ясно, что эта функция $e(x,\,y,\,t)$ задается формулой

$$e(x,\,y,\,t)=\sum_{\lambda_j\leqslant t}\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j(y)}. \tag{15.3}$$

и, в частности, принадлежит $C^\infty(M\times M)$ при каждом фиксированном t. Отметим сразу же следующие свойства $e(x,\,y,\,t)$:

1) $e(x,\,x,\,t)$ — неубывающая функция от t при каждом фиксированном $x\in M$;

2) функция $N(t)$, введенная в п. 13.3, выражается через $e(x,\,x,\,t)$ по формуле

$$N(t)=\int_M e(x,\,x,\,t)\,dx, \tag{15.4}$$

где dx — фиксированная плотность на M.

Будем теперь считать, что локальные координаты в окрестности точки x выбраны так, что плотность dx совпадает с мерой Лебега локальных координат, и положим тогда

$$V_x(t)=\int_{a_m(x,\xi)<t}d\xi. \tag{15.5}$$

Теорема 15.1. *При $t\to+\infty$ и при любом $x\in M$ имеет место асимптотика*

$$e(x,\,x,\,t)\sim V_x(t). \tag{15.6}$$

Доказательство. 1. Заметим прежде всего, что без ущерба для общности можно считать, что $\lambda_1\geqslant 1$. В самом деле, такому условию удовлетворяет оператор $A_1=A+MI$ при достаточно большом M. Но если $e_1(x,\,y,\,t)$ — спектральная функция оператора A_1, то $e(x,\,y,\,t)=$ $=e_1(x,\,y,\,t+M)$. Поэтому из асимптотики $e_1(x,\,x,\,t)\sim V_x(t)$ вытекает асимптотика $e_1(x,\,x,\,t)\sim V_x(t+M)$. Но

$$V_x(t+M)=V_x(1)\,(t+M)^{n/m}=V_x(1)\,t^{n/m}(1+O(t^{-1}))\sim V_x(1)\,t^{n/m}=V_x(t),$$

откуда и следует (15.6).

2. Итак, пусть $\lambda_1\geqslant 1$. Тогда мы можем определить комплексные степени A^z оператора A по схеме § 10. Используя формулу (13.5), мы можем при $x=y$ выразить ядро $A_z(x,\,y)$ оператора A^z через спектральную

функцию формулой

$$A_z(x,\,x)=\int\limits_0^\infty t^z\,de(x,\,x,\,t), \tag{15.7}$$

где d означает дифференциал по t (при фиксированном x здесь написан просто интеграл Стильтьеса). В силу теорем 12.1 и 14.1 мы получаем теперь для $e(x,\,x,\,t)$ асимптотическую формулу

$$e(x,\,x,\,t)\sim\left[\frac{1}{n}\int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x,\,\xi')\,d\xi'\right]\cdot t^{n/m}. \tag{15.8}$$

Элементарное преобразование правой части этой формулы, сделанное в доказательстве леммы 13.1, показывает, что правая часть (15.8) равна $V_x(t)$, что и доказывает (15.6). ■

15.2. Асимптотика собственных значений.

Теорема 15.2. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям, описанным в начале этого параграфа. Тогда имеют место асимптотические соотношения*

$$N(t)\sim V(t),\qquad t\to+\infty, \tag{15.9}$$

$$\lambda_k\sim V(1)^{-m/n}k^{m/n},\quad k\to+\infty, \tag{15.10}$$

где функция $V(t)$ определяется формулой (13.16).

Доказательство. В § 13 была доказана эквивалентность (15.9) и (15.10) (предложение 13.1). Мы будем доказывать (15.9). Это делается на основе тауберовой теоремы Икехара аналогично доказательству теоремы 15.1.

Именно, опять-таки можно считать, что $\lambda_1\geqslant1$. Тогда очевидно, что при $\mathrm{Re}\;z<-n/m$ имеет место формула

$$\zeta_A(z)=\int\limits_1^\infty t^z\,dN(t). \tag{15.11}$$

Остается воспользоваться теоремами 13.1, 14.1 и леммой 13.1. ■

Замечание. Формулу (15.9) можно получить из (15.6) интегрированием по x. Однако для обоснования этого интегрирования нужно уметь доказывать равномерность по x асимптотики (15.6), что требует в ряде мест (в частности, в доказательстве теоремы Икехара) проверки равномерности по параметру. Чтобы избежать этой громоздкой проверки, мы предпочли дать независимое доказательство.

15.3. Задачи.

З а д а ч а 15.1. Доказать в ситуации этого параграфа оценку

$$|e(x, y, t)| \leqslant C t^{n/m},$$

где $x, y \in M$, а постоянная $C > 0$ не зависит от x, y и t $(t \geqslant 1)$.

З а д а ч а 15.2. Пусть на замкнутом многообразии M с гладкой положительной плотностью дан эллиптический оператор A, и пусть A нормален, т. е.

$$A^* A = A A^*. \tag{15.12}$$

а) Доказать, что A имеет ортонормированный базис из собственных функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, с собственными значениями $\lambda_j \in \mathbb{C}$ такими, что

$$|\lambda_j| \to +\infty \quad \text{при} \quad j \to +\infty. \tag{15.13}$$

б) Доказать, что если $N(t)$ означает количество таких λ_j, что $|\lambda_j| \leqslant t$, а $V(t)$ определяется формулой

$$V(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|a_m(x,\xi)|<t} dx\, d\xi, \tag{15.14}$$

то при $t \to +\infty$ имеет место асимптотика

$$N(t) \sim V(t). \tag{15.15}$$

З а д а ч а 15.3. Вывести теоремы 15.1 и 15.2 из результатов задачи 13.4 и тауберовой теоремы Карамата (задача 14.2).

З а д а ч а 15.4. Пусть M — замкнутое многообразие, A—такой эллиптический дифференциальный оператор на M, что $a_m(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть λ_j — его собственные значения, $N_1(t)$ — число таких собственных значений, что $\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant t$ (при этом кратностью собственного значения λ_0 мы считаем размерность корневого подпространства E_{λ_0} — см. теорему 8.4), $N_2(t)$ — число таких собственных значений, что $|\lambda_j| \leqslant t$. Доказать, что при $t \to +\infty$

$$N_1(t) \sim N_2(t) \sim V(t), \tag{15.16}$$

где $V(t)$ определяется также, как и выше. Доказать, что

$$\lambda_k \sim V(1)^{-m/n} k^{m/n}, \quad k \to +\infty \tag{15.17}$$

(это означает, в частности, что $\operatorname{Im} \lambda_k$ имеет меньший порядок роста, чем $\operatorname{Re} \lambda_k$).