Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 7

И. М. Парамонова

Симметрия в математике

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2000

УДК 512.54
П18
ББК 22.144

Аннотация

В брошюре рассказывается о том, что понимается под симметрией в современной математике и как идеи, связанные с симметрией, помогают решать самые разные задачи. В частности, объясняется, что такое группа преобразований и её инварианты.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 12 февраля 2000 года на Малом мехмате для школьников 9–11 классов.

ISBN 5–900916–56–1

Парамонова Ирина Михайловна

Симметрия в математике

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2000. — 16 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров.*

Выпускающий редактор *А. Б. Сосинский.*

Редакторы *Р. М. Кузнец*, *Е. Н. Осьмова.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД №01335 от 24/III 2000 г. Подписано к печати 3/V 2000 г.
Формат бумаги $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Физ. печ. л. 1,0. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,88.
Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Посвящается моему учителю
Александру Александровичу
Кириллову

Разговор о симметрии начнём с рассмотрения четырёх простых и достаточно известных задач. Задачи эти относятся к разным областям математики и на первый взгляд совершенно непохожи.

Задача 1 (игровая). Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём монеты не должны накрывать друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Иначе говоря, у какого из игроков есть выигрышная стратегия?)

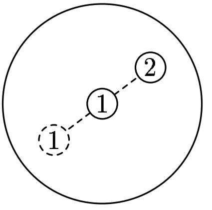

Рис. 1

Решение. При правильной игре выигрывает тот, кто начинает, — первый игрок. Вот его стратегия. Первым ходом он кладёт монету в центр стола. Затем после каждого хода второго первый кладёт монету симметрично монете, только что положенной вторым, относительно центра стола (рис. 1). Очевидно, если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, первый игрок побеждает.

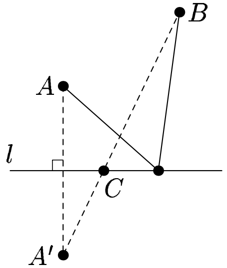

Рис. 2

Задача 2 (геометрическая). На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Нужно найти на прямой такую точку C, чтобы сумма длин отрезков AC и BC была минимальна.

Решение. Построим точку A', симметричную A относительно прямой l. Заметим, что для любой точки C, лежащей на прямой l, $AC = A'C$. Поэтому

$$AC + BC = A'C + BC.$$

В силу неравенства треугольника сумма $A'C + BC$ минимальна тогда и только тогда, когда точка C лежит на отрезке $A'B$ (рис. 2). Итак, $C = A'B \cap l$.

Задача 3 (векторная). На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$, точка O — его центр (рис. 3). Найти вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$.

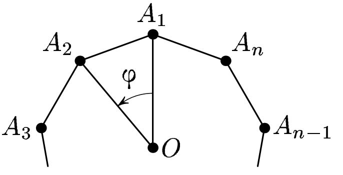

Рис. 3

Решение. Введём обозначения: $\varphi = \angle A_1OA_2$, R_φ — поворот на угол φ

с центром в точке O (т. е. $R_\varphi \vec{c}$ есть вектор, полученный из вектора $\vec{c}$ указанным поворотом). Тогда, поскольку многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ правильный,

$$R_\varphi\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}, \quad R_\varphi\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}, \quad \ldots, \quad R_\varphi\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1}.$$

Как известно, сложение векторов и поворот перестановочны: если сумму нескольких векторов повернуть на угол φ и, наоборот, каждый из векторов-слагаемых повернуть на тот же угол, а затем сложить, результат будет один и тот же. Кроме того, сумма векторов не зависит от их порядка. Поэтому

$$\begin{aligned} R_\varphi\vec{a} &= R_\varphi\overrightarrow{OA_1} + R_\varphi\overrightarrow{OA_2} + \ldots + R_\varphi\overrightarrow{OA_{n-1}} + R_\varphi\overrightarrow{OA_n} = \\ &= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1} = \vec{a}. \end{aligned}$$

Итак, вектор $\vec{a}$ не меняется при повороте на угол $0^\circ < \varphi < 360^\circ$. Значит, $\vec{a} = \vec{0}$.

Задача 4 (алгебраическая). При каких a и b система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Решение. Система, как видите, достаточно сложная, и решить её для всех значений a и b (чтобы потом выбрать из них те, при которых решение единственно) школьными методами невозможно. Но это и не нужно: найти требуемые значения a и b можно гораздо проще. Заметим, что вид нашей системы не изменится, как бы мы ни переставляли неизвестные x, y и z. Иными словами, если тройка чисел (x_0, y_0, z_0) — решение системы, то решениями будут и тройки, полученные из неё всевозможными перестановками: (x_0, z_0, y_0), (y_0, x_0, z_0), (y_0, z_0, x_0), (z_0, x_0, y_0), (z_0, y_0, x_0). Решение может быть единственным только в том случае, когда $x_0 = y_0 = z_0$. Из первого уравнения $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Подставляя эти значения x, y и z во второе и третье уравнения, получаем, что $a = b = 3$. Осталось только проверить, что при этих a и b у системы действительно нет других решений, кроме $(1, 1, 1)$.

Что же общего у этих четырёх задач? Важным моментом в решении каждой из них было наличие некоторого *преобразования*, *«сохраняющего» задачу* (в первой задаче это была центральная симметрия, во второй — осевая симметрия, в третьей — поворот, в четвёртой — перестановки неизвестных); относительно этого преобразования условие задачи было *симметрично*. Это и есть ключевая идея в современном представлении о симметрии: понятие симметрии начинается с понятия *группы преобразований*.

Группы преобразований

Множества и отображения

Пусть X и Y — произвольные множества. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие определённый элемент $y = f(x)$ множества Y, то говорят, что определено *отображение* f из X в Y (пишут $f\colon\ X \to Y$).

Если имеются три множества X, Y, Z и два отображения $f\colon\ X \to Y$ и $g\colon\ Y \to Z$, то определено «сквозное» отображение $g \circ f\colon\ X \to Z$, которое переводит элемент x множества X в элемент $z = g\big(f(x)\big)$ множества Z (рис. 4). Отображение $g \circ f$ называется *композицией* или *произведением* отображений f и g.

Рассмотрим *тождественное* отображение $e_X\colon\ X \to X$, которое «оставляет на месте» любой элемент $x \in X$, т. е. $e_X(x) = x$ для любого $x \in X$, и аналогичное отображение $e_Y\colon Y \to Y$. Отображение $f\colon\ X \to Y$ называется *обратимым* (*взаимно однозначным соответствием*), если существует такое отображение $g\colon\ Y \to X$, что

$$g \circ f = e_X, \quad f \circ g = e_Y,$$

иначе говоря $g\big(f(x)\big) = x$ для всех $x \in X$ и $f\big(g(y)\big) = y$ для всех $y \in Y$.

Такое отображение g называется *обратным* отображению f и обозначается f^{-1} (рис. 5).

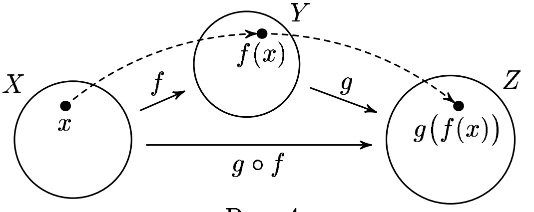

Рис. 4

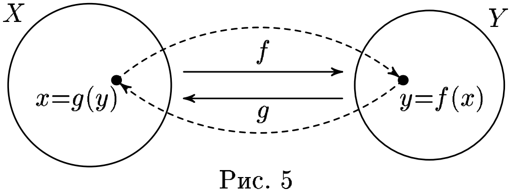

Рис. 5

Преобразования и их свойства

Преобразованием некоторого множества X называется обратимое отображение множества X на себя — $f\colon X \to X$.

Если f и g — два преобразования множества X, то их произведение $g \circ f$ также является преобразованием множества X. (Действительно, отображение $g \circ f$ переводит множество X в множество X, а обратным ему является отображение $f^{-1} \circ g^{-1}$.) Таким образом, на совокупности всех преобразований множества X определена операция умножения $\circ$.

Конечно, умножение преобразований устроено не так просто, как умножение действительных чисел. Например, для любых чисел a и b выполнено равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Однако далеко не всегда $f \circ g = g \circ f$.

Рассмотрим такой пример. Пусть множество X — это плоскость, преобразование f — поворот с центром в точке O на некоторый угол, g — симметрия относительно прямой l (рис. 6). Преобразование $f \circ g$ переводит точку A в точку $A' = f\big(g(A)\big)$, а преобразование $g \circ f$ — в точку $A'' = g\big(f(A)\big)$ (в первом случае мы сначала отразили, потом повернули, во втором — сначала повернули, потом отразили). А раз точки $(f \circ g)(A)$ и $(g \circ f)(A)$ не совпадают, то $f \circ g$ и $g \circ f$ — *разные* преобразования.

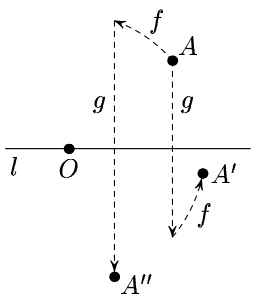

Рис. 6

Но умножение преобразований обладает и многими хорошими свойствами, которые сближают его с умножением чисел. Мы знаем, например, что $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых чисел a, b и c, т. е. что произведение трёх чисел не зависит от того, в каком порядке выполнять операции умножения. Такое же свойство выполняется и для преобразований: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Докажем это. По определению умножения преобразований, для любого элемента $x \in X$

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big),$$

$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

Таким образом, преобразования $(f \circ g) \circ h$ и $f \circ (g \circ h)$ переводят любой элемент $x \in X$ в элемент $f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$. Значит, эти преобразования совпадают.

Среди всех чисел выделяется число 1, обладающее следующим свойством: $a \cdot 1 = a$ для любого числа a. В множестве преобразований роль единицы выполняет тождественное преобразование $e = e_X$: очевидно, что $f \circ e = f = e \circ f$ для любого преобразования f. Каждому числу $a \neq 0$ соответствует число $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \cdot a^{-1} = 1$; говорят, что числа a и a^{-1} взаимно обратны. Каждому преобразованию f также соответствует обратное преобразование, т. е. такое f^{-1}, что $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$.

Группы преобразований и их инварианты

Обозначим через $\mathscr{A}$ некоторую совокупность интересующих нас свойств множества X, а через G — совокупность всех преобразований множества X, сохраняющих эти свойства $\mathscr{A}$.

Пример 1. Если X — это плоскость, $\mathscr{A}$ — расстояния между точками плоскости, то G состоит из движений плоскости: поворотов, параллельных переносов, симметрий, а также их всевозможных произведений (композиций).

Пример 2. (К задаче 3.) Пусть X — плоскость, а в качестве $\mathscr{A}$ возьмём расстояния между точками и данный правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Тогда G — совокупность движений плоскости, оставляющих на месте этот n-угольник, — состоит из n поворотов (включая поворот на нулевой угол, т. е. тождественное преобразование) и n осевых симметрий. (G называется *группой самосовмещений правильного n-угольника.*)

Пример 3. (К задаче 4.) Пусть $X = \{x, y, z\}$ — множество из трёх элементов — формальных символов, $\mathscr{A}$ — вид системы уравнений в условии задачи. Тогда, как мы уже выяснили, G — совокупность преобразований, сохраняющих вид системы, — состоит из перестановок элементов множества X.

Пример 4. Заменим систему уравнений в задаче 4 на такую:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b \end{cases}$$

(новую задачу обозначим 4′). Как видим, уже не все перестановки элементов множества X сохраняют вид новой системы: G состоит из перестановки $x \leftrightarrow y$ и тождественной перестановки.

Отметим некоторые общие свойства совокупности G.

1°. Если $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$, то $g_1 \circ g_2 \in G$.

2°. $e \in G$.

3°. Если $g \in G$, то $g^{-1} \in G$.

Дадим теперь важное определение.

Группой преобразований называется совокупность G преобразований множества X, удовлетворяющая условиям 1°–3°.

В приведённых выше примерах по свойствам $\mathscr{A}$ мы находили группу преобразований, сохраняющих эти свойства. Часто встречается и обратная задача: дана группа преобразований, и нужно найти $\mathscr{A}$ — определить, какие свойства множества X не меняются под действием группы. Такие свойства называются *инвариантами* группы преобразований.

Задачи, связанные с нахождением инвариантов, довольно часто встречаются на математических кружках и олимпиадах.

Задача. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидят 44 весёлых чижа, по одному на каждом дереве. Время от времени один из чижей перелетает на соседнее дерево и одновременно с ним какой-нибудь другой чиж перелетает на соседнее дерево в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Решение. Занумеруем деревья по порядку числами от 0 до 43. В дальнейшем нам будет удобно считать, что это не целые числа, а остатки от деления на 44 или *вычеты по модулю* 44 (так, например, $44 \equiv 0 \pmod{44}$, $43 + 5 \equiv 4 \pmod{44}$, $1 - 3 \equiv 42 \pmod{44}$). Каждому вычету i ($i = 0, \ldots, 43$) сопоставим число n_i, равное количеству чижей на i-м дереве (числа n_i тоже суть вычеты по модулю 44). В результате мы получаем функцию $f(i) = n_i$ на множестве вычетов со значениями в множестве вычетов. Множество всех таких функций обозначим через X.

Например, когда все чижи сидят на одном дереве (с номером i), получается функция

$$f_0(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i, \\ 44 \equiv 0 \pmod{44}, & \text{если } k = i, \end{cases}$$

т. е. $f_0 = 0$. Начальному расположению чижей отвечает функция $f_{\text{нач}} = 1$. А ситуации, когда есть всего один чиж, сидящий на i-м дереве, отвечает функция

$$\delta_i(k) = \begin{cases} 1, \text{ если } k = i, \\ 0, \text{ если } k \neq i. \end{cases}$$

Пусть в какой-то момент времени чиж перелетает с i-го дерева на $(i + 1)$-е, и одновременно с ним другой чиж перелетает с j-го дерева на $(j - 1)$-е. Сопоставим этим перелётам чижей преобразование $g_{ij} : X \to X$,

$$(g_{ij} f)(k) = f(k) + \delta_{i+1}(k) - \delta_i(k) - \delta_j(k) + \delta_{j-1}(k).$$

Контрольный вопрос: как действует g_{ji}? Запишите формулу для этого преобразования и выясните, какие перемещения чижей ему соответствуют.

Преобразования g_{ij} — это *элементарные* преобразования. Всевозможные композиции элементарных преобразований образуют некоторую группу G преобразований множества X.

Контрольные вопросы: **1.** Что такое g_{ij}^{-1}? **2.** Что такое $(g_{ij} \circ g_{kl})^{-1}$? **3.** Как действует преобразование $g_{i,j-1} \circ g_{i-1,j}$?

А теперь вычислим для каждой функции $f \in X$ число (а точнее вычет) $S(f)$:

$$S(f) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + \ldots + 43 \cdot f(43).$$

Легко видеть, что $S(f)$ — инвариант группы G. Действительно, любое элементарное преобразование функции f не меняет $S(f)$:

$$S(g_{ij} f) = S(f) + (i + 1) - i - j + (j - 1) = S(f).$$

Но тогда и любое преобразование $g \in G$, как композиция элементарных преобразований, не меняет значения $S(f)$.

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} S(f_{\text{нач}}) &= 0 + 1 + 2 + \ldots + 43 = \frac{43 \cdot 44}{2} = 946 \equiv \\ &\equiv 22 \pmod{44}, \\ S(f_0) &\equiv 0 \pmod{44}. \end{aligned}$$

Следовательно, никаким элементом группы G нельзя перевести функцию $f_{\text{нач}}$ в функцию f_0. Это означает, что все 44 чижа не могут собраться на одном дереве.

Как правило, задача типа: «Можно ли сделать ⟨что-нибудь⟩?» — либо задача на построение примера, если это сделать можно, либо задача на нахождение инвариантов, которые показывают, что это сделать нельзя.

Таким образом, мы рассмотрели два объекта: группы преобразований и их инварианты. Существуют, как мы видели, два класса задач: по имеющимся инвариантам определить группу преобразований и, наоборот, по данной группе преобразований найти инварианты. В некотором смысле группа преобразований и её инварианты — *двойственные понятия*.

Общее понятие группы

Пусть G — некоторая группа преобразований, состоящая из конечного числа элементов: $G = \{e, g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Поскольку произведение любых двух элементов группы тоже элемент группы, можно составить *таблицу умножения*, или *таблицу Кэли* (табл. 1, на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент $g_i \circ g_j$).

Пример 1. (К задаче 1.) В этой задаче множество X — расположение монет на столе, а группа преобразований состоит всего из двух элементов: $G = \{e, g\}$, где e, как обычно, тождественное преобразование, g — преобразование симметрии относительно центра стола. Таблица Кэли для этой группы выглядит очень просто (табл. 2). Понятно, что $g \circ g = e$, так как дважды применённая центральная симметрия даёт тождественное преобразование.

	$e \quad g_1 \quad \dots$	g_j	$\dots \quad g_n$
e g_1 $\vdots$	$e \quad g_1 \quad \dots$ $g_1 \quad \ddots$ $\vdots$	$\vdots$	$\dots \quad \vdots$
g_i	$\dots\dots\dots$	$g_i \circ g_j$	$\dots\dots$
$\vdots$ g_n	$\vdots$ $\dots\dots\dots$	$\vdots$	$\vdots$ $\dots\dots$

Таблица 1

	e	g
e	e	g
g	g	e

Таблица 2

Пример 2. (К задаче 2.) Здесь множество X состоит из пар точек (A, B), а группа преобразований — из тождественного преобразования e и преобразования g, которое пару (A, B) переводит в пару (A', B), где A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l. Легко видеть, что таблица Кэли этой группы выглядит точно так же, как в предыдущем примере.

Пример 3. (К задаче 4′.) В этой задаче, как мы уже знаем, $G = \{e,\ g = (x \leftrightarrow y)\}$. У этой группы такая же таблица Кэли, как и у групп в двух предыдущих примерах.

Таким образом, в совершенно разных ситуациях, при совершенно разных множествах X и совершенно разном действии преобразований возникают группы преобразований с одинаковыми таблицами умножения. Это наблюдение приводит нас к понятию *абстрактной группы.*

Абстрактная группа возникает в тот момент, когда мы забываем о множестве X, о том, как именно действуют преобразования, и рассматриваем только множество G, на котором определено умножение.

Определение группы

Пусть задано некоторое множество G произвольной природы, на котором определена операция умножения, т. е. закон, сопоставляющий любой паре a, b элементов G некоторый элемент множества G, называемый *произведением* a и b и обозначаемый через $a \cdot b$. Предположим, что эта операция умножения удовлетворяет следующим условиям:

I. (Условие ассоциативности.) Для любых трёх элементов a, b и c множества G справедливо соотношение

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

II. (Условие существования нейтрального элемента.) В множестве G существует элемент, называемый *нейтральным* элементом и обозначаемый символом e, такой что

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

для любого элемента a множества G.

III. (Условие существования обратного элемента к каждому элементу.) Для любого элемента a множества G существует такой элемент b множества G, что

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

Элемент b называется *обратным* к элементу a и обозначается a^{-1}.

Множество G с операцией умножения, удовлетворяющей этим трём условиям, называется *группой*, а сами эти условия — *аксиомами группы*.

Зачем нужно общее понятие группы? Почему бы не ограничиться изучением конкретных групп преобразований? Можно ответить вопросом на вопрос: а зачем нужны абстрактные числа, а не отдельные числа для подсчёта яблок, отдельные — для подсчёта калош? Группы преобразований с одинаковой таблицей Кэли и проявляют себя одинаково, хотя и действуют на разные множества.

С этой точки зрения, группы, рассмотренные в предыдущих трёх примерах, — это одна и та же абстрактная группа. У этой группы есть традиционное обозначение — $\mathbb{Z}_2$.

Задача. Докажите, что группа перестановок из трёх элементов (которая появилась в задаче 4) и группа самосовмещений правильного треугольника (частный случай группы самосовмещений правильного n-угольника) имеют одинаковые таблицы Кэли, т. е. это одна и та же абстрактная группа.

Чётные и нечётные функции

Рассмотрим ещё одну реализацию группы $\mathbb{Z}_2$. Пусть $X = \mathbb{R}$ — множество действительных чисел, преобразование g — центральная симметрия относительно нуля — $g\colon\ x \mapsto -x$ (g и тождественное преобразование числовой прямой образуют группу $G = \mathbb{Z}_2$). Множество функций, определённых на $\mathbb{R}$, обозначим через $F(\mathbb{R})$. Заметим, что действие группы G продолжается и на $F(\mathbb{R})$: если на функцию $\varphi \in F(\mathbb{R})$ подействовать элементом g, то получится функция $g\varphi$ такого вида:

$$(g\varphi)(x) = \varphi(-x) = \varphi(gx)$$

(как действует тождественное преобразование, объяснять, наверное, не нужно).

Среди всех функций на прямой выделяются функции, обладающие некоторой симметрией: чётные функции (такие функции φ, для которых выполнено условие $\varphi(x) = \varphi(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, или, в наших обозначениях, $g\varphi = \varphi$) и нечётные (для которых $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, т. е. $g\varphi = -\varphi$). С любой функцией $\varphi(x)$ связаны две функции:

$$\varphi_{\text{ч}}(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{\varphi(x) + (g\varphi)(x)}{2} \quad \text{и}$$

$$\varphi_{\text{н}}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} = \frac{\varphi(x) - (g\varphi)(x)}{2}.$$

Легко видеть, что $\varphi_{\text{ч}}(x)$ — чётная функция, а $\varphi_{\text{н}}(x)$ — нечётная, причём

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{ч}}(x) + \varphi_{\text{н}}(x).$$

Аналогичное утверждение верно и для произвольного множества X (не обязательно $\mathbb{R}$), на котором действует группа преобразований $\mathbb{Z}_2$: каждая функция $\varphi \in F(X)$, $\varphi\colon\ X \to \mathbb{R}$, может быть представлена в виде суммы чётной и нечётной функций. Действительно, если из предыдущего абзаца изъять все формулы, использующие конкретный вид преобразования g, то проведённое рассуждение становится верным и в случае произвольного множества.

Задача о кубе

Важные идеи применения симметрии в современной математике и физике можно продемонстрировать на примере следующей шуточной задачи.

Задача. В лаборатории одного института лежит модель куба. Первого апреля сотрудник Петя написал на гранях куба числа от 1 до 6. На следующий день сотрудник Вася заменил число на каждой грани средним арифметическим чисел, написанных Петей на четырёх соседних с ней гранях. Третьего апреля Петя заметил действия Васи и ответил ему тем же и т. д. Что будет написано на гранях куба через месяц?

Сформулируем эту задачу на математическом языке. X — это множество граней куба: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. То, что на гранях куба написаны числа, означает, что на множестве X задана функция φ, которая каждой грани куба ставит в соответствие некоторое число. Множество всех функций на X обозначим через $F(X)$. Сотрудники, изменяя написанные на гранях числа, строят по функции φ другую функцию. Тем самым, на множестве функций $F(X)$ задан оператор*) $L\colon F(X) \to F(X)$, определяемый следующей формулой:

$$(L\varphi)(x) = \frac{1}{4}\sum \varphi(y), \qquad (\star)$$

где суммирование ведётся по всем граням y, соседним с гранью x. Нужно узнать, что получится, если 30 раз применить оператор L:

$$\underbrace{L\Bigl(L\bigl(\ldots(L}_{30\ \text{раз}}\varphi)\ldots\bigr)\Bigr) = \underbrace{L\circ\ldots\circ L}_{30\ \text{раз}}\,\varphi = L^{30}\varphi = ?$$

(Заметим, что мы не знаем точного вида исходной функции φ; нам известен только набор её значений.)

Для решения этой задачи необходимо понять, какими свойствами обладает L.

Свойства оператора L

Свойство 1. Умножить функцию φ на число c (т. е. умножить на c все числа, написанные на гранях куба), а затем применить оператор L — то же самое, что сначала применить к φ оператор L, а потом умножить на c:

$$L(c\varphi) = cL\varphi.$$

Далее, применить L к сумме двух функций $\varphi_1 + \varphi_2$ — то же самое, что применить L к каждой из функций-слагаемых, а затем результаты сложить:

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L\varphi_1 + L\varphi_2.$$

Эти два соотношения вместе называются свойством *линейности* оператора L. Их доказательство не составляет труда: достаточно подставить выражения для $c\varphi$ и для $\varphi_1 + \varphi_2$ в формулу $(\star)$; в первом случае нужно

*) Слово «оператор» (так же как и слова «функция», «преобразование») является синонимом слова «отображение».

вынести за скобки множитель c, а во втором — раскрыть скобки и перегруппировать слагаемые.

Свойство 2. Рассмотрим группу G симметрий (самосовмещений) куба, т. е. совокупность всех преобразований, которые переводят куб в себя. Действие каждого преобразования $g \in G$ на множестве X порождает соответствующее действие на $F(X)$. Поскольку оператор L описывается в терминах соседства граней, а преобразование g сохраняет отношение соседства, то всё равно, в каком порядке применять g и L: они перестановочны, $g \circ L = L \circ g$. Это очень важное свойство L: мы видели, что такое равенство выполняется далеко не всегда.

Свойства 1 и 2 оператора L и дают ключ к решению задачи. Идея состоит в следующем: *поскольку оператор L линеен на $F(X)$ и перестановочен с группой симметрий X, нужно искать такие элементы множества $F(X)$, на которые группа симметрий действует наиболее просто.* Тогда и L на этих элементах будет действовать просто. Затем нужно попытаться представить любую функцию φ в виде суммы таких «простых» функций, и мы сможем легко понять, как «устроен» оператор L.

Для начала выделим в группе G подгруппу $G_{\text{ц}}$, состоящую из тождественного преобразования куба и его центральной симметрии: $G_{\text{ц}} = \{e, g_{\text{ц}}\}$. Группа $G_{\text{ц}}$ представляет собой уже знакомую нам группу $\mathbb{Z}_2$, и, как мы выяснили в предыдущем разделе, любую функцию φ, заданную на кубе, мы можем представить в виде суммы чётной и нечётной функции:

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{ч}}(x) + \varphi_{\text{н}}(x).$$

Функция на кубе является чётной относительно его центральной симметрии, если она не меняется под действием $g_{\text{ц}}$; это значит, что на противоположных гранях куба ($g_{\text{ц}}$ переводит эти грани друг в друга) она принимает одинаковые значения. И наоборот, функция на кубе нечётна, если её значения на противоположных гранях отличаются знаком.

Легко видеть, что любую нечётную функцию оператор L переводит в нулевую функцию (значения которой на всех гранях равны нулю). Действительно, четыре грани, соседние с данной, образуют две пары противоположных граней, при этом числа на противоположных гранях отличаются знаком. Поэтому после применения L к нечётной функции на всех гранях будут написаны нули. Итак,

$$(L\varphi_{\text{н}})(x) = 0, \quad L\varphi = L(\varphi_{\text{ч}} + \varphi_{\text{н}}) = L\varphi_{\text{ч}}.$$

После первого же применения оператора L нечётная часть исчезает!

Итак, мы нашли класс функций, на которые группа симметрий куба действует просто: любая симметрия куба (не только центральная) переводит нечётную функцию в нечётную. Как видим, и оператор L действует на эти функции просто: он их обнуляет.

Однако на чётные функции L всё ещё действует замысловато. Значит, нужно продолжить исследование и выделить ещё более простые составляющие чётной функции. Пока из всех самосовмещений куба мы рассмотрели только центральную симметрию. Но преобразований, сохраняющих куб, очень много, это и повороты, и плоскостные симметрии... Существуют ли функции, которые не меняются под действием *всей* группы G (инварианты группы)? Очевидно, если на всех гранях куба написано одно и то же число (функция постоянна), то любое преобразование из группы G эту функцию переводит в себя. Заметим, что сумма всех чисел, написанных на гранях куба,

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi(x_i)$$

также является инвариантом группы G. Поэтому функцию $\varphi_\text{ч}$ удобно представить в виде суммы двух функций: постоянной функции φ_const и чётной функции с нулевой суммой значений $\varphi_\text{ч}^0$.

Значение функции φ_const на каждой грани куба положим равным

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \varphi(x_i).$$

Сумма её значений равна сумме значений исходной функции φ (и сумме значений функции $\varphi_\text{ч}$, поскольку сумма значений нечётной функции равна нулю). Функцию $\varphi_\text{ч}^0$ определим просто:

$$\varphi_\text{ч}^0 = \varphi_\text{ч} - \varphi_\text{const}.$$

Эта функция чётна, как разность чётных функций, и имеет нулевую сумму значений, как разность функций с одинаковой суммой.

Итак, по исходной функции φ мы построили три новые функции: $\varphi_\text{н}$, φ_const и $\varphi_\text{ч}^0$. При этом

$$\varphi(x) = \varphi_\text{н}(x) + \varphi_\text{const}(x) + \varphi_\text{ч}^0(x),$$

и благодаря линейности оператора L достаточно понять, как он действует на каждое из слагаемых. Мы уже знаем, что

$$L\varphi_\text{н} = 0.$$

Ясно, что

$$L\varphi_\text{const} = \varphi_\text{const}.$$

Поскольку $\varphi_{\text{ч}}^0$ — чётная функция, то её значения на противоположных гранях одинаковы. Пусть, например, на верхней и нижней гранях её значение равно a, на правой и левой — b, на передней и задней — c, причём $a+b+c=0$. После применения оператора L к функции $\varphi_{\text{ч}}^0$ на верхней грани должно быть написано число

$$\frac{1}{4}(b+c+b+c) = -\frac{1}{2}a.$$

Для остальных граней рассуждения аналогичны. Итак, действие L на $\varphi_{\text{ч}}^0$ тоже выглядит просто: значение на каждой грани умножается на $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Мы получаем, что

$$L\varphi = L\varphi_{\text{н}} + L\varphi_{\text{const}} + L\varphi_{\text{ч}}^0 = \varphi_{\text{const}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\varphi_{\text{ч}}^0.$$

Следовательно,

$$L^{30}\varphi = \varphi_{\text{const}} + \frac{1}{2^{30}}\varphi_{\text{ч}}^0.$$

Осталось заметить, что число $\frac{1}{2^{30}}$ настолько мало, что «добавка» $\frac{1}{2^{30}}\varphi_{\text{ч}}^0$ почти незаметна ($2^{10} = 1024 > 10^3$, $2^{30} > 10^9$). Поэтому

$$L^{30}\varphi \approx \varphi_{\text{const}},$$

и через месяц на всех гранях будет написано приблизительно 3,5. Если же сотрудники будут не месяц, а целый год так развлекаться, то числа, написанные на кубе, уже совершенно невозможно будет отличить от 3,5.

Как видим, считать «в лоб» в этой задаче было невозможно: мы даже не знали, как выглядит функция φ. Но разложение функции на составляющие позволило нам провести вычисления. Эта, казалось бы, простая идея оказывается очень эффективной в самых разных ситуациях.

В качестве самостоятельного упражнения читателю предлагается решить аналогичную задачу на октаэдре, а тот, кто справится с октаэдром, может перейти и к додекаэдру.