Памяти
Эрнеста Борисовича Винберга

12 мая 2020 года скончался доктор физико-математических наук, профессор МГУ Эрнест Борисович Винберг. Он был членом редколлегии всех выпусков третьей серии «Математического просвещения», а с 2006 по 2019 год — его главным редактором. Кроме исследовательской деятельности и преподавания на мехмате МГУ, Эрнест Борисович внёс большой вклад в популяризацию математики, работу с одарёнными школьниками, методические вопросы преподавания математики. Об этом вкладе можно судить по двум научно-популярным статьям Эрнеста Борисовича и материалам его преподавания в московской Второй школе, которые публикуются в настоящем сборнике. Публикуем также две статьи, посвящённые математическим проблемам, интересовавшим Эрнеста Борисовича.

К понятию действительного числа[1)]

Э. Б. Винберг

Действительное число мыслится как результат бесконечной последовательности измерений со всё возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости материи. Но даже если бы этой трудности не было, всё равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше «определение» действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова «измерение». Назовём действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{1}$$

всё меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же ещё сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа m найдётся такое n_0, что при $n_1, n_2 > n_0$

$$|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{1}{m}.$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию, называется фундаментальной.

Действительное число, определённое последовательностью (1), следует считать равным действительному числу

$$r_1', r_2', \ldots, r_n', \ldots,$$

если $r_n - r_n'$ стремится к нулю при увеличении n, т. е. для любого натурального числа m существует такое n_0, что при $n > n_0$

$$|r_n - r_n'| < \frac{1}{m}.$$

[1)] Математическая школа. Лекции и задачи. II. М.: МГУ. 1967. С. 25–30.

Что же это: игра ума или закреплённый в математическом определении результат познания природы? (Заметим, что к такому определению пришли далеко не сразу, оно выстрадано несколькими поколениями математиков. Но, может быть, это объясняется тем, что правила игры были очень запутанными?)

На этот вопрос не ответишь, если копаться в определении и пытаться физически истолковать каждый его пункт. Надо посмотреть, что можно с этим определением сделать. А сделать, оказывается, можно дифференциальное и интегральное исчисление. А с помощью этого исчисления можно решить разные физические задачи, например, рассчитать прочность какого-нибудь сооружения или орбиту планеты. Это и есть решение нашего вопроса. Ведь если бы определение действительного числа было лишь игрой нашего ума, то ничего, кроме продолжения игры, из него не могло бы проистекать.

Правда, понятие действительного числа является идеализацией, оно лишь приблизительно отражает свойства реального мира. Но так всегда бывает в любой науке. Без идеализации ничего не сделаешь. Почитайте по этому поводу прекрасное рассуждение «Что есть сила?» в первом томе «Фейнмановских лекций по физике».

Рассмотрим теперь вопрос: какие задачи надо решать в математике? В этом отношении очень поучителен следующий пример из истории математики. Раньше очень интересовались получением формул для решения алгебраических уравнений

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{2}$$

вроде известной формулы для решения квадратного уравнения. Такие формулы для уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянцами в XVI в. Уравнения более высоких степеней не поддавались. В 1824 г. Абель окончательно доказал, что для общих уравнений степени 5 и выше невозможно получить желанные формулы. Чтобы точно понять смысл этого результата, надо знать, что в данном случае означает слово «формула». Имеется в виду определённая последовательность арифметических операций и извлечений корней (любых степеней), которые надо произвести над числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определёнными целыми числами (например, в формулу для квадратного уравнения входит число 2). Абель доказал, что при $n \geqslant 5$ не существует формулы, которая при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ давала бы точное решение уравнения (1).

Оставалась возможность, что для каждого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует своя формула. Через несколько лет после работы Абеля французский математик Эварист Галуа нашёл необходимые и достаточные условия для того, чтобы такая формула существовала, и доказал, что для каждого $n \geqslant 5$ можно указать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых эти условия не выполняются.

В ходе своих исследований Галуа ввёл новые понятия и придумал новые методы, которые имели решающее значение для создания так называемой «теории групп». Начиная с конца XIX в. теория групп получает различные применения в физике. Кроме того, она оказала плодотворное влияние на развитие других разделов математики.

Выходит, что Галуа старался не зря! Но вернёмся к его задаче и посмотрим, что она представляет собой с наивной физической точки зрения. Любую величину можно с достаточной степенью точности выразить рациональным числом, т. е. представить как отношение целых чисел. В частности, это относится к решению уравнения (1), и задача Галуа при таком подходе становится бессмысленной! Она приобретает смысл только при абстрактном математическом толковании. Могло бы показаться, что этой задачей заниматься не стоит, однако мы видели, что это не верно.

Итак, не всякое математическое понятие и не всякая теорема имеет ощутимый физический смысл, но из этого не следует, что математика — это плод нашего воображения. Если представить реальный «физический» мир в виде почвы, на которой растёт дерево математики, а математические теории — как ветви этого дерева (идущие как от ствола, так и от других ветвей), то математика будет похожа на дерево баньян, некоторые ветви которого пускают корни в почву. К этому нужно ещё добавить, что ветви переплетаются между собой (не знаю, как обстоит дело с настоящим баньяном). Это убеждает нас в том, что каждая содержательная математическая теория, пусть даже очень абстрактная, отражает какие-то свойства материального мира и не может остаться бесполезной.

Задачи

1. Найти все фундаментальные последовательности, составленные из целых чисел.

2. Являются ли фундаментальными следующие последовательности рациональных чисел:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$ б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}1}{n}, \ldots;$

в) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots;$ г) $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \ldots;$

д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots;$ е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots;$

ж) $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{n^2}{3n+1}, \ldots$; з) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2+1}, \ldots$;

и) $1, 1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, \ldots$; к) $0; 0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \ldots$;

л)$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}, 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}, \ldots$;

м) последовательность, определённая равенствами

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

3. Какие из фундаментальных последовательностей задачи 2 задают одно и то же действительное число?

4. Доказать, что если последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

фундаментальные, то последовательности

$$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_n+b_n,\ \ldots,$$
$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots$$

также фундаментальные.

5. Как следует определять действия над действительными числами?

6. Можно ли рассматривать рациональные числа как частный случай действительных? Если да, то какие к тому основания и какие фундаментальные последовательности следует считать отвечающими рациональным числам?

7. Как следует определять неравенства между действительными числами?

8. Доказать, что между любыми двумя (различными) действительными числами найдётся рациональное число.

9. Доказать, что если последовательность фундаментальная, то всякая её подпоследовательность также фундаментальна и определяет то же действительное число.

10. Что такое $\sqrt{2}$?

11. Доказать, что последовательности л) и м) из задачи 2 определяют $\sqrt{2}$. Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001, используя последовательность м).

12. Пусть дана бесконечная десятичная дробь $c_0{,}c_1c_2\ldots$ (c_0 обозначает целую часть, $c_1, c_2, \ldots$ — какие-то цифры). Рассмотрим последовательность, n-й член которой равен c_0,$c_1 c_2 \dots c_n$. Доказать, что эта последовательность всегда фундаментальна.

13. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными десятичными дробями, равны?

14. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью.

15. Пусть $c_0, c_1, c_2, \dots$ — целые числа, причём $c_1, c_2, \dots$ — положительны. Доказать, что последовательность подходящих дробей бесконечной цепной дроби $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \dots}}$ всегда фундаментальна.

16. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными цепными дробями, равны?

17. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной цепной дробью.

18. Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число r, что все её члены не превосходят r. Есть ли среди последовательностей задачи 2 неограниченные?

19. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

20. Доказать, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность фундаментальна.

21. Доказать, что последовательность, n-й член которой равен $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, фундаментальна. (Действительное число, определяемое этой последовательностью, обозначается через e.)

22. Доказать, что последовательность и) задачи 2 определяет число e. Вычислить его с точностью до 0,001.

Подробные сведения о построении системы действительных чисел можно найти в первом томе «Энциклопедии элементарной математики» (в статье И. В. Проскурякова) или, в другом изложении, в книге Э. Ландау «Основы анализа», Госиноиздат, 1947.