В школе № 2. Геометрия (X класс)[1)]

Э. Б. Винберг

ЛЕКЦИЯ № 1

Примеры решения геометрических задач с помощью преобразований

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Путём сжатий и растяжений треугольник преобразуется в равносторонний.

2. Теорема Паскаля: точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

С помощью перспективного преобразования теорема приводится к следующей: если две пары противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника параллельны, то и третья пара параллельна.

3. Теорема Брианшона: диагонали описанного около окружности шестиугольника пересекаются в одной точке.

С помощью корреляции эта теорема приводится к теореме Паскаля.

Геометрия как изучение свойств фигур, не меняющихся при преобразованиях, принадлежащих заданной группе $\mathcal{O}$.

Группой преобразований множества M называется всякая совокупность $\mathcal{O}$ преобразований этого множества, обладающая следующими свойствами:

1) тождественное преобразование ε принадлежит $\mathcal{O}$,
2) вместе с каждым преобразованием γ в $\mathcal{O}$ содержится обратное преобразование γ^{-1},
3) вместе с любыми двумя преобразованиями γ_1, γ_2 в $\mathcal{O}$ содержится их произведение $\gamma_1\gamma_2$.

(Определение произведения преобразований: $(\gamma_1\gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2(x))$.)

[1)] Математическая школа. Лекции и задачи. XI. М.: МГУ, 1967. С. 3–31.

Фигуры $\Phi_1, \Phi_2 \subset M$ называются *равными* в геометрии группы $\mathcal{O}$ (запись: $\Phi_1 \underset{\mathcal{O}}{=} \Phi_2$), если существует преобразование $\gamma \in \mathcal{O}$, переводящее Φ_1 в Φ_2.

Благодаря условиям 1)–3) равенство фигур обладает обычными свойствами равенства (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Евклидова геометрия — это геометрия группы движений евклидова пространства. (Движением называется всякое преобразование, сохраняющее расстояние между точками.)

Аффинным преобразованием плоскости называется всякое преобразование, переводящее прямые в прямые и сохраняющее отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Такие преобразования образует группу. Геометрия этой группы — *аффинная геометрия*.

Задачи

1. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных им сторон со вписанной в треугольник окружностью, пересекаются в одной точке.
2. В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB взяты соответственно точки M, N, P, причём $BM : MC = AN : NC$; $AP = PB$. Доказать, что прямые AM, BN и CP пересекаются в одной точке.
3. Доказать, что всякое движение плоскости есть либо сдвиг, либо поворот, либо отражение в прямой, либо скользящее отражение (т. е. произведение отражения в прямой и сдвига в направлении той же прямой).
4. Образуют ли группу преобразований плоскости: а) все сдвиги; б) все повороты, в) все сдвиги и повороты?
5. Доказать, что отношение площадей сохраняется при аффинных преобразованиях.
6. Доказать, что в аффинной геометрии все треугольники равны.

ЛЕКЦИЯ № 2

Аффинные преобразования

Линейная часть $\overline{\gamma}$ аффинного преобразования γ определяется так:

$$\overline{\gamma}(\overline{AB}) = \overline{\gamma(A)\gamma(B)}.$$

Это обратимое линейное преобразование пространства свободных векторов.

Теорема 1. *Пусть O — какая-нибудь точка плоскости. Для любой точки O' и любого обратимого линейного преобразования C существует единственное аффинное преобразование γ, для которого $\gamma(O) = O'$, $\overline{\gamma} = C$.*

Запись аффинного преобразования в координатах:

$$\gamma\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования $\overline{\gamma}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ — координаты точки, в которую переходит начало координат.

Кривые 2-го порядка

Кривой 2-го порядка называется кривая, задающаяся уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Теорема 2. *Всякая кривая 2-го порядка, содержащая более одной точки и не являющаяся прямой или парой прямых, путём аффинного преобразования может быть переведена в одну из следующих кривых*:

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

$$xy = 1, \tag{2}$$

$$y = x^2. \tag{3}$$

Соответственно этим трём случаям данная кривая называется эллипсом, гиперболой или параболой.

Некоторые свойства эллипса:

1) существует точка, называемая центром эллипса, в которой делятся пополам все проходящие через неё хорды;
2) около эллипса можно описать прямоугольник, стороны которого делятся в точках касания пополам; половины длин его сторон называются полуосями эллипса.

Теорема 3. *Всякое аффинное преобразование можно представить в виде произведения двух растяжений во взаимно-перпендикулярных направлениях и движения.*

Задачи

7. Доказать, что с помощью одной линейки (без делений) нельзя построить равностороннего треугольника.

8. Найти условие равенства двух четырёхугольников в аффинной геометрии.

9. Доказать, что $\overline{\gamma_1\gamma_2} = \overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2$ для любых аффинных преобразований γ_1 и γ_2 ($\overline{\gamma}$ обозначает линейную часть γ).

10. При помощи задачи 9 доказать, что произведение двух поворотов вокруг разных точек на противоположные углы есть сдвиг.

11. Найти условия на коэффициенты a_{ij}, b_i аффинного преобразования γ, необходимые и достаточные для того, чтобы γ было движением.

12. К какому типу принадлежат кривые 2-го порядка:

а) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$;
б) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x - y = 0$;
в) $x^2 + 4xy + 4y^2 + y + 1 = 0$;
г) $2x^2 - xy - y^2 - 3y + 2 = 0$.

13. Доказать, что гипербола, как и эллипс, имеет центр симметрии, а парабола — нет.

14. Доказать, что полуоси эллипса — это половины наибольшей и наименьшей хорд.

15. Доказать, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab.

16. Доказать, что любой диаметр эллипса делит пополам все хорды, параллельные касательной, проведённой через один из его концов, и что существует единственное не тождественное аффинное преобразование, переводящее эллипс в себя и оставляющее на месте все точки данного диаметра.

17. Найти все аффинные преобразования, переводящие в себя данную кривую 2-го порядка.

18. Доказать, что конические сечения являются кривыми 2-го порядка.

ЛЕКЦИЯ № 3

Проективные преобразования

Однородные и неоднородные координаты в проективной плоскости. Связь между ними:

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Проективное преобразование γ:

$$\gamma[a] = [\gamma(a)],$$

где $[a]$ — точка проективной плоскости, определяемая прямой a в трёхмерном пространстве R^3, проходящей через начало; γ в правой части — обратимое линейное преобразование пространства R^3.

При проективном преобразовании прямые переходят в прямые.

Лемма 1. *Любая прямая с помощью проективного преобразования может быть переведена в бесконечно удалённую.*

Запись проективного преобразования в координатах:
а) в однородных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{32}\zeta \\ a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta \end{pmatrix},$$

б) в неоднородных:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}x + a_{21}y + a_{31}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \\[2ex] \dfrac{a_{12}x + a_{22}y + a_{32}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Аффинное преобразование как частный случай проективного, когда $a_{13} = a_{23} = 0$, т. е. когда бесконечно удалённая прямая $\zeta = 0$ остаётся на месте.

Проективные преобразовании образуют группу.

Четвёрка точек $\{A, B, C, D\}$ называется четвёркой *общего положения*, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

Теорема 4[2)]. *Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ — четвёрки общего положения. Тогда существует единственное проективное преобразование γ, переводящее A_1 в A_2, B_1 в B_2, C_1 в C_2 и D_1 в D_2.*

Двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой:

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC}.$$

В частности,

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{AB}{BC}.$$

Лемма 2. *Пусть a, b, c, d — четыре прямые, проходящие через одну точку; l — прямая, пересекающая их в точках A, B, C, D соответственно. Двойное отношение (A, B, C, D) не зависит от положения l. (Оно называется двойным отношением четвёрки прямых a, b, c, d и обозначается (a, b, c, d).)*

Теорема 5. *При проективном преобразовании двойные отношения четвёрок точек сохраняются.*

---

2) Исправлена опечатка в нумерации теорем при первоначальной публикации. — *Прим. ред.*

Задачи

19. Какие линейные преобразования пространства R^3 определяют одно и то же проективное преобразование плоскости?

20. Доказать теорему Дезарга.

21. Доказать теорему Паппа.

22. *Гомологией* называется проективное преобразование, оставляющее на месте все точки некоторой прямой l, называемой *осью* гомологии, и все прямые, проходящие через некоторую точку C, называемую *центром* гомологии. Доказать, что при заданных l и C гомология определяется образом A' какой-либо точки A, отличной от C и не лежащей на l, причём точка A' может быть задана произвольно, лишь бы она лежала на прямой CA. Указать способ построения гомологии при помощи одной линейки.

23. Построить с помощью одной линейки прямую, проходящую через данную точку и недоступную точку пересечения данных прямых.

24. Что такое гомология с бесконечно удалённой осью? с бесконечно удалённым центром? с бесконечно удалёнными осью и центром?

25. Доказать, что всякое проективное преобразование может быть представлено в виде произведения двух гомологий.

26. Что происходит с двойным отношением (A, B, C, D) при перестановке точек?

27. Доказать, что если проективное преобразование оставляет на месте три точки прямой l, то оно оставляет на месте все её точки.

28. Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ — две четвёрки точек, лежащих на одной прямой. Доказать, что если $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$, то существует проективное преобразование, переводящее первую четвёрку во вторую.

29. На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки M, N и P. Доказать теорему Чевы: для того, чтобы прямые AM, BN и CP пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

30. Доказать, что двойное отношение четвёрки прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, равно

$$\pm\frac{\sin\langle a, b\rangle}{\sin\langle b, c\rangle} : \frac{\sin\langle a, d\rangle}{\sin\langle d, c\rangle},$$

где через $\langle l, m\rangle$ обозначается угол между прямыми l и m.

31. Доказать, что двойное отношение четвёрки прямых сохраняется при проективном преобразовании.

32. Доказать, что всякое преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые и сохраняющее двойные отношения четвёрок точек, лежащих на одной прямой, является проективным.

33. Доказать, что центральное проектирование плоскости P на плоскость P_1 с последующим совмещением P_1 с P при помощи движения в трёхмерном пространстве является проективным преобразованием.

ЛЕКЦИЯ № 4

Кривые 2-го порядка в проективной геометрии

Кривая 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

в однородных координатах задаётся уравнением

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 = 0.$$

Бесконечно удалённые точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, присоединяются к кривой. Число бесконечно удалённых точек: у эллипса — 0, у параболы — 1, у гиперболы — 2.

При проективном преобразовании любая кривая 2-го порядка переходит в кривую 2-го порядка.

Теорема 6. *В проективной геометрии все невырожденные кривые 2-го порядка равны.*

Теорема 7. *Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — две тройки точек на невырожденной кривой 2-го порядка K. Существует единственное проективное преобразование, сохраняющее кривую K и переводящее точки A_1, B_1, C_1 в точки A_2, B_2, C_2 соответственно.*

Геометрия Лобачевского

Плоскость Лобачевского можно отождествить с кругом Λ (без границы); при этом группой движений плоскости Лобачевского будет группа проективных преобразований, оставляющих круг Λ на месте.

Прямыми плоскости Лобачевского называются хорды круга Λ.

Флагом на плоскости Лобачевского называется совокупность точки, луча, выходящего из этой точки, и одной из полуплоскостей, примыкающих к этому лучу.

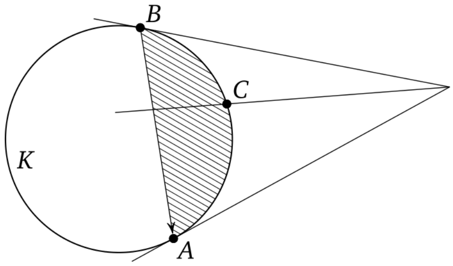


Рис. 1

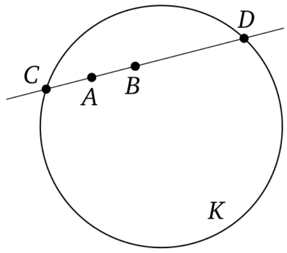


Рис. 2

Теорема 8. *Для любых двух флагов на плоскости Лобачевского существует единственное движение, переводящее первый флаг во второй.*

Доказательство основано на установлении взаимно-однозначного соответствия между флагами на плоскости Лобачевского Λ и тройками точек на окружности K, ограничивающей круг Λ (рис. 1).

Теорема 8 верна и для евклидовой плоскости.

Длина отрезка $|AB|$ должна обладать следующими свойствами:

($D1$) инвариантность относительно движений;

($D2$) аддитивность вдоль прямой, т. е. если A, B, C лежат на одной прямой, причём B лежит между A и C, то $|AC| = |AB| + |BC|$.

На плоскости Лобачевского длина отрезка может быть определена по формуле $|AB| = k \ln(A, D, B, C)$, где k — «масштабный множитель», C и D — точки окружности K, изображённые на рис. 2.

Мера угла должна обладать свойствами:

($Y1$) инвариантность относительно движений;

($Y2$) аддитивность для углов с общей вершиной, т. е. если луч OB лежит между OA и OC, то $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$;

($Y3$) мера полного угла равна 2π (при градусном измерении — $360°$).

На плоскости Лобачевского Λ углы с вершиной в центре круга Λ измеряются как евклидовы, а для измерения произвольного угла его переводят путём движения в угол с вершиной в центре круга Λ.

Других способов определения длины отрезка и меры угла на плоскости Лобачевского не существует.

Следующие теоремы евклидовой геометрии вместе с их доказательствами безо всяких изменений переносятся в геометрию Лобачевского.

1. В равнобедренном треугольнике: углы при основании равны; биссектриса угла при вершине перпендикулярна основанию и делит его пополам.
2. Три признака равенства треугольников.

3. Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.
4. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.
5. Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Задачи

34. Записать в неоднородных координатах какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$:

а) в параболу $y = x^2$;

б) в гиперболу $xy = 1$.

35. Пусть A, B, C, D — точки, лежащие на невырожденной кривой 2-го порядка K. Доказать, что кривая K есть геометрическое место точек X, для которых двойное отношение четвёрки прямых XA, XB, XC, XD равно некоторому числу k.

36. Пусть A_1, A_2 — точки на окружности K, B_1, B_2 — точки внутри неё. Доказать, что существует ровно два проективных преобразования, сохраняющих K и переводящих A_1 в A_2, а B_1 — в B_2.

37. Записать в неоднородных координатах какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в себя, а точку $(0, 0)$ — в точку $(1/2, 0)$.

38. Доказать, что нельзя с помощью одной линейки найти центр данной окружности.

39. Пусть K — окружность, l — её секущая. Доказать, что существует проективное преобразование, оставляющее на месте все точки прямой l, переводящее окружность K в себя и меняющее местами дуги, на которые она разбивается прямой l.

40. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, описанный около окружности K, причём P, Q, R, S — точки касания, лежащие на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что прямые PR и QS и диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке и что точка пересечения прямых PQ и RS лежит на прямой AC.

41. В обозначениях задачи 40, доказать, что в смысле геометрии Лобачевского внутри окружности K диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами углов, образованных прямыми PR и QS.

42. Доказать, что на плоскости Лобачевского через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой.

43. Доказать, что на плоскости Лобачевского геометрическое место точек, равноудалённых от прямых l_1 и l_2, есть объединение биссектрис углов, образованных прямыми l_1 и l_2, если эти прямые пересекаются, и одна прямая — если они не пересекаются.

44. Доказать, что всякое утверждение относительно углов с общей вершиной, верное в евклидовой геометрии, верно и в геометрии Лобачевского.

45. Доказать, что в любом треугольнике на плоскости Лобачевского:

а) биссектрисы пересекаются в одной точке;
б) перпендикуляры, проведённые к сторонам через их середины, либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке;
в) высоты либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке (указание: поместить одну из вершин треугольника в центр круга Λ);
г)* медианы пересекаются в одной точке.

46. Проверить непосредственной выкладкой, что длина отрезка на плоскости Лобачевского, определённая по формуле (1), аддитивна вдоль прямой.

47. Доказать, что прямая на плоскости Лобачевского изометрична прямой на евклидовой плоскости.

ЛЕКЦИЯ № 5

Сумма углов многоугольника на плоскости Лобачевского

Аксиома о параллельных прямых не выполняется в геометрии Лобачевского, поэтому не проходит обычное доказательство теоремы о сумме углов многоугольника. Более того, имеет место

Теорема 9. *Сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского меньше π.*

Для любого многоугольника M на плоскости Лобачевского угловым дефектом $\Delta(M)$ называется разность между суммой внешних углов и 2π.

Теорема 10. *Функция $\Delta(M)$ обладает следующими свойствами*:

1) $\Delta(M) \geqslant 0$ *для любого* M;
2) *если* $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$, *где* M_i — *попарно не перекрывающиеся многоугольники, то* $\Delta(M) = \Delta(M_1) + \ldots + \Delta(M_k)$.

Теорема 11 (4-й признак равенства треугольников). *Если все углы одного треугольника на плоскости Лобачевского равны соответствующим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Корреляции

Обозначим через P_1 множество точек проективной плоскости и через P_2 — множество её прямых. Пусть $P = P_1 \cup P_2$.

Для элементов $x, y \in P$ определим инцидентность: $x \sim y$, если $x \in P_1$, $y \in P_2$ и $x \in y$ или $y \in P_1$, $x \in P_2$ и $y \in x$.

Если $x_1, x_2, x_3, x_4 \sim y$, то определено двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x_4).

Взаимно однозначное отображение φ множества P на себя называется *корреляцией*, если

1) $\varphi(P_1) = P_2$, $\varphi(P_2) = P_1$;

2) $x \sim y \iff \varphi(x) \sim \varphi(y)$;

3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4))$.

(Для проективного преобразования вместо 1) выполняется условие $\varphi(P_1) = P_1$, $\varphi(P_2) = P_2$.)

Произведение корреляции и проективного преобразования (в любом порядке) есть корреляция; произведение двух корреляций есть проективное преобразование.

Теорема 12. *Корреляции существуют.*

Из теоремы 12 вытекает *принцип двойственности* в проективной геометрии: если в любой теореме о точках и прямых проективной плоскости, формулируемой в терминах инцидентности и двойного отношения, заменить слова «точка» и «прямая» на «прямая» и «точка» соответственно, то получится верная теорема.

Пример. Из теоремы Паппа получается теорема: если стороны шестиугольника (или их продолжения) проходят поочерёдно через точки A и B, то его диагонали пересекаются в одной точке.

Задачи

48. Доказать, что если $M' \subset M$, то $\Delta(M') \leqslant \Delta(M)$.

49. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого треугольника на плоскости Лобачевского, лежащего в круге радиуса δ, угловой дефект меньше ε.

50.* То же, что в задаче 49, для любого многоугольника (число сторон заранее не задано).

51.* Доказать, что если в формуле длины отрезка на плоскости Лобачевского взять $k = 1/2$, то

а) длина окружности радиуса r равна $2\pi \operatorname{sh} r$;

б) площадь круга радиуса r равна $2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$.

52. Доказать, что если определить метрику на плоскости Лобачевского как в задаче 51, то угловой дефект любого многоугольника будет равен его площади.

53. Доказать, что для треугольника со сторонами a, b, c на плоскости Лобачевского имеет место «неравенство косинусов»:

$$c^2 \geqslant a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где γ — угол против стороны C.

54. Доказать, что если γ — такое преобразование плоскости Лобачевского, при котором длина любого отрезка умножается на постоянное число $k \neq 0$, то $k = 1$ и γ — движение в смысле определения, данного в лекциях.

55. Какая теорема двойственна: а) теореме Лезарга; б) теореме Чевы?

56. Доказать, что если φ_0 — какая-нибудь корреляция, то любая корреляция φ представляется в виде $\varphi = \gamma\varphi_0$, где γ — проективное преобразование.

57. Доказать, что если φ — корреляция, переводящая вершины некоторого треугольника в противоположные стороны, то $\varphi^2 = \varepsilon$.

ЛЕКЦИЯ № 6

Корреляции (продолжение)

Теорема 13. *Для каждой невырожденной кривой 2-го порядка K существует единственная корреляция φ, обладающая следующими свойствами*:

1) *если A — точка кривой K, то $\varphi(A)$ — касательная к K в точке A*;
2) *если l — касательная к K, то $\varphi(l)$ — точка касания K и l.*

Эта корреляция удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и называется *полярным преобразованием* относительно K.

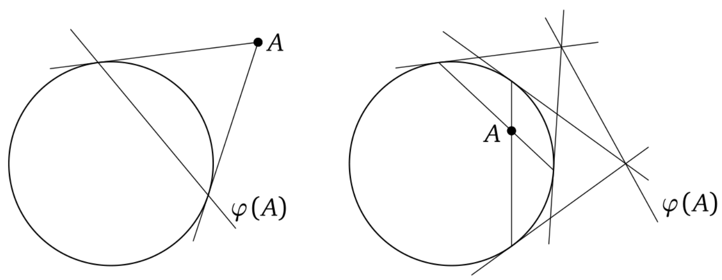


Рис. 3

Образ точки при этом преобразовании называется её *полярой*, образ прямой — её *полюсом*.

Способ построении поляр — см. рис. 3.

Теорема 13 позволяет применять принцип двойственности к таким теоремам, в формулировке которых участвует кривая 2-го порядка.

Примеры: теоремы, двойственные к теореме Паскаля и к теореме о том, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

Конформные преобразования

К комплексной плоскости добавляется точка ∞. На расширенной таким образом плоскости рассматриваются преобразования:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \quad (ad-bc \neq 0).$$

Они называются конформными преобразованиями 1-го и 2-го рода соответственно. Эти преобразования образуют группу, геометрия которой называется конформной геометрией.

Теорема 14. *При конформных преобразованиях сохраняются углы между кривыми.*

Доказательство основано на формуле

$$\left(\frac{az(t)+b}{cz(t)+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz(t)+d)^2} z'(t).$$

Теорема 15. *При конформных преобразованиях прямые и окружности переходят в прямые и окружности (но прямые не обязательно в прямые, а окружности — не обязательно в окружности!).*

Для доказательства используется

Лемма. *Общее уравнение прямой или окружности на комплексной плоскости имеет вид $Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$, где A, C вещественны, $|B|^2>AC$. (При $A=0$ получается прямая, при $A\neq 0$ — окружность.)*

Инверсия в окружности радиуса r с центром в точке O — преобразование, переводящее точку A в точку A', лежащую на луче OA и удовлетворяющую условию

$$OA' \cdot OA = r^2.$$

Точки O и ∞ меняются местами.

Инверсия является конформным преобразованием. Так, инверсия в единичной окружности с центром в O — это преобразование $z \to 1/z$.

Конформные преобразования, оставляющее на месте ∞, характеризуются тем, что $C = 0$. Это — произведения движений на подобия.

Теорема 16. *Для любых двух троек точек $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ существует ровно два конформных преобразования, переводящих A_1 в A_2, B_1 в B_2 и C_1 в C_2.*

Пример на применение конформного преобразования для решения задачи на построение: построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых или окружностей.

ЛЕКЦИЯ № 7

Конформная модель геометрии Лобачевского

Рассматриваются конформные преобразования, отображающие круг Λ на себя. Они образуют группу. По теореме 16 для любых двух троек точек, лежащих на границе круга K, существует единственное преобразование из этой группы, переводящее первую тройку во вторую.

Так как круг с помощью конформного преобразования можно отобразить на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, мы получим ту же геометрию, если вместо круга будем рассматривать полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а вместо конформных преобразований, отображающих круг на себя, — конформные преобразования, отображающие полуплоскость на себя.

Определение. Геометрии $\{M_1, G_1\}$ и $\{M_2, G_2\}$ называются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества M_1 на M_2, что $\theta G_1 \theta^{-1} = G_2$.

Теорема 17. *Построенная выше геометрия изоморфна геометрии Лобачевского в проективной модели.*

Доказательство. Пусть M_1 — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, G_1 — группа конформных преобразований, отображающих M_1 на себя. Это преобразование вида

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},$$

где a, b, c, d вещественны, $ad - bc > 0$ в первом случае и $ad - bc < 0$ — во втором случае.

Пусть M_2 — внутренность параболы $y > x^2$, G_2 — группа проективных преобразований, отображающих M_2 на себя. Для каждого $z \in M_1$ рассмотрим приведённый квадратный трёхчлен, корнем которого является z,

$$(t-z)(t-\bar{z}) = t^2 - (z+\bar{z})t + z\bar{z}.$$

Полагаем

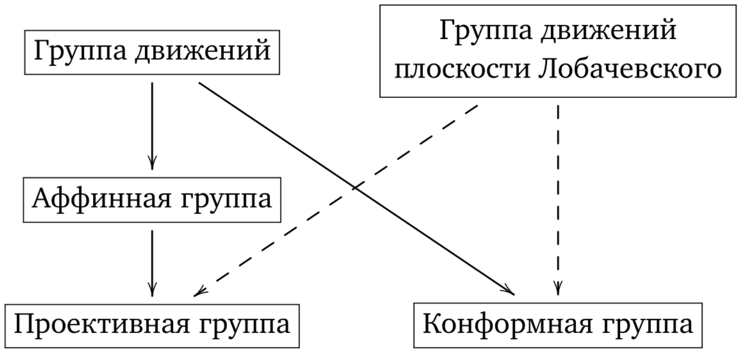
$$\theta(z) = \binom{x}{y}, \quad \text{где} \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = z\bar{z}.$$

Отображение θ взаимно однозначно отображает M_1 на M_2. Непосредственно проверяется, что $\theta G_1 \theta^{-1} \subset G_2$. Совпадение $\theta G_1 \theta^{-1}$ с G_2 следует из того, что преобразованием из $\theta G_1 \theta^{-1}$ любую тройку точек на границе можно перевести в любую другую. □

В конформной модели плоскости Лобачевского углы измеряются как евклидовы, а прямыми являются дуги окружностей и части прямых, перпендикулярные к границе.

Пользуясь этой моделью, легче доказать теорему о том, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π.

Сводка основных групп преобразований на плоскости



(Стрелка означает включение; пунктир означает, что включение зависит от модели.)

Задачи

58. Найти геометрическое место точек пересечения карательных к данной окружности, проведённых через концы хорды, проходящей через данную точку внутри окружности.

59. Сформулировать теорему, двойственную:

а) утверждению задачи 35;

б) теореме о том, что сумма двух сторон треугольника на плоскости Лобачевского больше третьей.

60.* Доказать, что если корреляция φ удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и существует такая точка A, что $A \in \varphi(A)$, то φ — полярное преобразование относительно некоторой невырожденной кривой 2-го порядка.

61*. Доказать, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми и переводит окружности на сфере в прямые и окружности на плоскости.

62. Доказать, что конформное преобразование, не оставляющее на месте ∞, однозначно представляется в виде произведения движения и инверсии.

63. Найти все конформные преобразования γ, удовлетворяющие условиям:

а) $\gamma(1) = 0$, $\gamma(i) = 1$, $\gamma(-i) = \infty$;
б) $\gamma(1) = i$, $\gamma(1+i) = 1$, $\gamma(i) = 0$.

64. Записать через операции над комплексными числами инверсию в окружности радиуса r с центром в точке C.

65. Доказать, что если δ — инверсия, а γ — любое конформное преобразование, то $\gamma\delta\gamma^{-1}$ — либо инверсия, либо отражение в прямой.

66. Доказать, что не существует аддитивной меры дуги окружности, инвариантной относительно всех конформных преобразований.

67. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.

68. Доказать, что если конформное преобразование 2-го рода переводит прямую l в себя, а точки $A, B \in l$ меняет местами, то любую окружность, проходящую через эти точки, оно оставляет на месте.

69. В данную окружность C вписать многоугольник $A_1A_2, \ldots, A_n$, стороны A_iA_{i+1} которого проходят через данные точки O_i или параллельны данным прямым l_i.

Указание. Рассмотреть конформные преобразования 2-го рода γ_i, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma_i(A_i) = A_{i+1}, \quad \gamma_i(A_{i+1}) = A_i, \quad \gamma_i(O_i) = O_i \quad \text{или} \quad \gamma_i(l_i) = l_i.$$

Точка A_1 будет неподвижной точкой преобразования $\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_2\gamma_1$.

70. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводило круг $|z| < 1$ в себя.

71*. Как измеряется длина отрезка на плоскости Лобачевского в конформной модели?

Контрольные задачи для зачёта

№№ 3–6, 8–12, 19, 20, 22–24, 26–28, 30–34, 37, 38, 42, 44, 46–48, 55а, 56, 58, 59, 62–64, 67, 70.