Нам пишут

Замечания к задачнику «Математического просвещения»

С. Б. Гашков

К задаче 21.2 (выпуск 21, с. 271; решение см. выпуск 22, с. 249–251). В моей статье в соавторстве с Е. Т. Шавгулидзе [3] указано похожее тождество, но с меньшим числом слагаемых (2^{n-1} вместо $2^n - 1$), и доказано, что это число минимально. Отмечу, что эти результаты были получены в 80-е годы.

По упражнению 3 к задаче 17.3 (выпуск 22, с. 244; 57-я Московская математическая олимпиада, 1994 г.). На самом деле эта задача совпадает с задачей 2 на 13-й Международной математической олимпиаде (1971 г.)

К задаче 22.5 (выпуск 22, с. 232; решение задачи 22.5в см. с. 282–284). Решением задачи 22.5а является любой канторов многочлен, в частности, суперпозиция $c(x_1, c(x_2, \ldots, c(x_{n-1}, x_n)) \ldots)$, где

$$c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}.$$

Это написано во многих учебниках по теории алгоритмов и рекурсивных функций. Канторов многочлен $c(x_1, \ldots, x_n)$ по определению осуществляет нумерацию всех упорядоченных n-ок натуральных чисел (включая нуль). Функция $c(x_1, \ldots, x_n)$ имеет поэтому n обратных функций $c_i(x)$, таких, что справедливы тождества

$$c(c_1(x), \ldots, c_n(x)) = x, \quad c_i(c(x_1, \ldots, x_n)) = x_i.$$

Обратные функции — уже не многочлены, но в учебниках доказывается, что они, как и многочлены, примитивно рекурсивны.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 26, 2020 (259–262)

Степень указанного многочлена равна 2^{n-1} . Можно вместо данной суперпозиции взять любую другую бесповторную суперпозицию, так как любая такая суперпозиция канторовых многочленов будет канторовым многочленом (если в суперпозиции переменные могут совпадать, то такая суперпозиция даёт многочлен, инъективно отображающий $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$, но это отображение не биективно: например, многочлен $c(x, c(y, c(y, \ldots) \ldots)$ инъективен на $\mathbb{N}^2$, но не биективен). Если глубина суперпозиции равна d, то степень соответствующего многочлена равна 2^d и все его коэффициенты положительны (а значит, он монотонен по каждой переменной). Очевидно, что в случае n переменных имеем $\log_2 n \leqslant d \leqslant n-1$; в частности, при $n = 2^k$ можно взять суперпозицию глубины k и соответствующий канторов многочлен имеет степень n, а в общем случае его степень не меньше n.

В задаче 22.5б поставлен вопрос, какова возможная степень канторова многочлена (не обязательно построенного так, как выше). Ответ таков: минимальная степень равна n. В книге [5] близкий вопрос сформулирован так (гл. 2, § 3, задача 40): какую минимальную степень может иметь многочлен от n переменных с целыми коэффициентами, если он при разных наборах натуральных значений переменных принимает различные значения? (Задача С. В. Конягина.) Ответ здесь тоже n. Для доказательства верхней оценки достаточно рассмотреть многочлен

$$p_n(x_1, \ldots, x_n) = \binom{x_1 + \ldots + x_n + n - 1}{n} + \\ + \binom{x_1 + \ldots + x_{n-1} + n - 2}{n-1} + \ldots + \binom{x_1 + x_2 + 1}{2} + \binom{x_1}{1},$$

являющийся прямым обобщением многочлена Кантора

$$c(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \binom{x + y + 1}{2} + \binom{x}{1}.$$

Этот многочлен указан в решении задачи 41 того же параграфа (задачу 40 предложил я годом позже задачи 41). В тексте решения имеются очевидные опечатки. Без опечаток этот многочлен приведён в моей книге [2, § 1.8, задача 12]. Решение легко получить, используя следующий факт: любое натуральное число можно представить (и единственным образом) в виде

$$\binom{x_n}{n} + \binom{x_{n-1}}{n-1} + \ldots + \binom{x_n}{1}, \quad x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 \geqslant 0.$$

Для $n = 3$ доказательство этого утверждения приведено в книге [1] (задача 2.86 в издании 2009 г.). Его можно также найти в книге [4] (и, наверное, в других источниках).

Доказательство нижней оценки для задачи 40 в книге [5] не приведено. Идея этого доказательства такова. Пусть имеется многочлен $p(x_1, \ldots, x_n)$ степени $d < n$, инъективно отображающий $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим множество целых точек куба $[0, N]^n$. Так как их количество $(N+1)^n$, в силу условия инъективности и принципа Дирихле в одной из точек куба справедливо неравенство

$$|p(x_1, \ldots, x_n)| \geqslant \frac{(N+1)^n - 1}{2}.$$

Так как число одночленов в многочлене p не больше $(d+1)^{n+1}$, для любой точки указанного куба имеем

$$|p(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant (d+1)^{n+1} N^d C,$$

где C — максимум модулей коэффициентов многочлена p. Устремляя N к бесконечности, получаем противоречие.

Но задачу 22.5б можно понять и так: найти все возможные значения степени канторова многочлена от n переменных. Используя указанную конструкцию канторова многочлена и произвольные бесповторные суперпозиции, легко получить примеры монотонных канторовых многочленов n переменных, у которых степень будет составным числом из отрезка $[n+1; 2^{n-1}]$. Например, при $n = 5$ имеем канторовы многочлены

$$p_5(x_1, \ldots, x_5), \quad p_3(x_1, p_2(x_2, x_3), p_2(x_4, x_5)),$$
$$p_2(p_2(p_2(x_1, x_2), p_2(x_3, x_4)), x_5), \quad p_3(x_1, x_2, p_3(x_3, x_4, x_5)),$$
$$p_3(x_1, x_2, p_2(x_3, p_2(x_4, x_5)), \quad p_2(x_1, p_2(x_2, p_2(x_3, p_2(x_4, x_5))))$$

степеней 5,6,8,9,12,16 (но многочлены степеней 7,10,11,13,14,15 таким образом получить не удаётся). Существуют ли канторовы многочлены других типов и других степеней — не ясно. Если в определении канторова многочлена ослабить условие биективности до условия инъективности, то монотонные многочлены $p_m(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_n)$, $m \geqslant n$, от n переменных имеют все возможные степени, начиная с n.

При составных n существует несколько разных канторовых многочленов степени n от n переменных (например, при $n = 6$ это p_6, $p_3(p_2, p_2, p_2)$, $p_2(p_3, p_3)$). Неизвестно, верно ли это при простых n.

Неизвестно, есть ли немонотонные канторовы многочлены.

Неизвестно, есть ли канторовы многочлены с целыми коэффициентами.

По поводу задачи 22.5в[1] мне не ясно, существуют ли вообще канторовы многочлены, осуществляющие биекцию $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{Z}$ или хотя бы инъекцию.

[1] См. ниже, с. 282–284.

Список литературы

[1] *Алфутова Н. Б.*, *Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2009.

[2] *Гашков С. Б.* Современная элементарная алгебра. М.: МЦНМО, 2017. § 1.8, задача 12.

[3] *Гашков С. Б.*, *Шавгулидзе Е. Т.* О представлении произведений в виде суммы степеней линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. 2014. № 2. С. 9–14.

[4] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Том 1. М.: Мир. 1976.

[5] *Садовничий В. А.*, *Григорьян А. А.*, *Конягин С. В.* Задачи студенческих олимпиад. М.: МГУ, 1987.

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ

sbgashkov@gmail.com