Преподавание математики

Как учить социологов математике

Н. С. Калинин

Всякий социолог подвергается обучению математике на первых курсах. Зачастую присутствует следующий поразительный консенсус между преподавателем и студентами. Преподаватель (иногда профессиональный математик) считает, что студенты-социологи ничего не понимают, но это не страшно, потому что математика им не нужна, максимум потребуется считать среднее и стандартное отклонение, да и то на компьютере. Студентам же предмет не только непонятен, но и безынтересен — кому вообще могут быть нужны эти матрицы и линейные уравнения с интегралами? Статистика поинтереснее, но так же непонятна. Обширная литература [5, 8, 12] про преподавание математики нематематикам так или иначе касается эмоционального отторжения математики студентами. На самом деле это преодолимо.

Анализ больших данных, в частности сетей в интернете, между тем открывает социологам сияющие перспективы [13]; всего лишь надо уметь программировать. Хорошо бы социологи ещё и понимали, как именно работают методы, а не просто нажимали кнопки. Тут уже без линейной алгебры и математического анализа не обойтись.

Желаемо, конечно, обсуждение, *что* преподавать, комиссией социологов и математиков — исследователей и преподавателей.

Ниже я описываю, что и *как* преподавал я. Классификация [9] концепций преподавания математики гуманитариям следующая: академическая (строго доказывать с примерами, якобы математика ум в порядок приводит), историческая (кто, что и когда придумал), прагматическая (что этим конкретным людям надо) и научно-популярная (просветительская). Будучи прагматиком, я изучил огромное количество текстов, где математика применялась в социологии. Преподавал я только базовую математику (теория вероятностей и статистика следуют за моим курсом) студентам первого года бакалавриата *Социология и социальная информатика* (ВШЭ, СПб).

Безусловно, даже взрослых социологов нужно убеждать в необходимости изучения математики. Я сошлюсь на многочисленные тексты об этом [11, 14, 17, 19, 21, 24]. С радостью включусь в дискуссию по обсуждаемым вопросам.

§ 1. Лучшие методики

Читателю-педагогу, вероятно, хотелось бы узнать, что же я делаю необычно. Методики следующие (в порядке убывания полезности).

- Каждому студенту-первокурснику велено прочесть некую главу из книги Introduction to mathematical sociology [15] или Matrices and society [16], пересказать её ассистенту-второкурснику, а потом кому-нибудь из однокурсников. Книги очень хорошо написаны и содержат социологические примеры. После введения такого задания вопросы о нужности математики почти никто не задавал, до — задавали часто.
- Обязательно индивидуальное домашнее задание по математическому анализу — взять производную, интеграл по частям, провести прямую, наилучшим образом приближающую три точки и др. На семинарах эти темы рассматриваются очень коротко, но студентам выдаются подсказки, где и как в интернете искать советы и рецепты. Все находят, справляются, первоначальный ужас при виде задания сменяется удовлетворением: всё не так уж сложно, хотя и разбираться пришлось.
- Невозможно понимание линейной алгебры и анализа без минимальной математической культуры. Значит, надо подоказывать хоть что-то. Ничего лучше текстовых задач на индукцию, простой теории графов, логических головоломок до сих пор не придумали. Этому посвящена треть курса. Формально для линейной алгебры это не надо, фактически же в математике важна последовательность этапов обучения [2].
- *Все* содержательные факты в лекциях именуются задачами и нумеруются. Иногда это выглядит странно, например: задача пять — дайте определение множества всех подмножеств, или: задача десять — сформулируйте и докажите теорему. Большинство задач, однако, — это просто примеры явлений, подменяющие собой общие теоремы. Теоретическая контрольная заключается в задачах, которые очень похожи или совпадают с задачами из лекций. Так решается психологическая проблема подготовки к курсу: понять все лекции тяжело, и неизвестно,

что именно важно. А тут всё промаркировано и разбито на маленькие кусочки. Хорошо, курс мне не понять, но ещё одну задачу я понять могу. Потом ещё одну.

- Матрица сама по себе — бессмысленный для социолога объект. А вот если она получена из линейного уравнения (пример), как движение плоскости (пример), как матрица смежности графа (пример), как матрица случайного блуждания (и всё это осознано), то гораздо проще изучать, приобретается смысл. Математика состоит в связях и понимании, потому преподавать алгоритмы (например, нахождения собственных чисел) вместо понимания и связей — плохо. Должны быть хотя бы примеры изучаемых сущностей.

§ 2. Программа, оценка

Уместна книга с социологическими примерами, которую студенты должны читать параллельно курсу. Книги Introduction to mathematical sociology [15] и Matrices and society [16] представляются мне наилучшим выбором. Материалы к моему курсу и задачи с наших семинаров можно найти на `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach.html`

Имеются удивительные совпадения в методических предложениях между [26] и статьёй [12], которую я изучил уже после разработки курса. В (англоязычной) литературе я встречал и мнение, что не нужно мучить бакалавров-социологов математикой, они не за этим пришли, серьёзно учить её можно лишь в магистратуре (к тому времени человек должен определиться, чему учиться будет, а до этого курсы скорее завлекающие). Боюсь, что в российских реалиях это неприменимо. Моё представление о том, как надо преподавать социологам, в основном базируется на [2, 10, 20], а также на общении с математиками — именитыми и не очень.

2.1. Начало: доказательства, 5 лекций

Начать стоит с теории графов (мотивируется исследованиями социальных сетей), комбинаторики, логических задач. В качестве примера того, как устроены доказательства в математике, подходит тема индукции (с текстовыми, а не формульными задачами), формула включений-исключений (в общем виде — формулировка и доказательства ужасающие, много значков суммирования, зато через месяц, готовясь к теоретической контрольной, все привыкают к индексам и их уже не боятся). Чётность суммы степеней вершин в графе. Операции с множествами. На семинарах это сопровождается задачами из математических кружков для 5–6 классов. В конце темы я рассказываю алгоритм Гейла — Шепли для нахождения стабильных паросочетаний, это проходит у студентов на ура.

Приведу этот рассказ целиком. Есть компания из n мальчиков и n девочек. У каждого мальчика есть список, в котором девочки упорядочены, начиная с самой привлекательной и заканчивая самой непривлекательной (для этого мальчика). Такие списки есть у всех мальчиков, списки могут отличаться, могут совпадать, нет никаких ограничений. У девочек есть аналогичные мальчиков. Паросочетанием называется разбиение компании на n пар мальчик-девочка.

Стабильным паросочетанием называется паросочетание, в котором нет таких двух мальчиков M и m и двух девочек D и d, что M в паре с d, D в паре с m, но D предпочла бы мальчика M мальчику m, а мальчик M предпочёл бы девочке d девочку D.

Совершенно неочевидно, что стабильные паросочетания существуют. В самом деле, разобьём всех как-то на пары. Наверное, найдётся четыре человека как выше, M и D бросят своих нынешних партнёров и объединятся в пару. Что делать, объединим в пару m и d. Теперь, возможно, окажется, что d и какой-то другой мальчик m' предпочитают друг друга своим нынешним партнёрам, и снова разбиение на пары поменяется. Почему такой процесс когда-то остановится?

Вполне жизненная задача, и всем студентам ясно, что требуется доказательство, а лучше алгоритм нахождения стабильного паросочетания.

Алгоритм Гейла — Шепли (за различные обобщения которого Шепли получил Нобелевскую премию по экономике) выглядит так: пусть каждый мальчик пойдёт и предложит себя в качестве пары самой нравящейся девочке. После этого каждая девочка выберет самого лучшего из пришедших (если такие есть), а остальных прогонит. На каждом следующем шаге каждый мальчик без пары будет предлагаться следующей по его списку девочке, которая его ещё не отвергала, а каждая девочка будет выбирать лучшего среди тех, кто пришёл, и оставленного на предыдущем шаге, если таковой был; остальных пришедших (в том числе оставленного на предыдущем шаге, если пришёл кто-то получше) девочка прогоняет. Несложно показать, что алгоритм остановится за конечное число шагов, к каждой девочке хоть кто-нибудь однажды да придёт, в процессе работы алгоритма положение каждой девочки только улучшается. А если возникла нестабильная четвёрка M, m, D, d, это означает, что M уже предлагался в пару к D и был отвергнут, а значит, у D уже был кто-то лучше, но так как её положение не может ухудшиться, то и в конце будет кто-то не хуже M, а значит, это не мог быть m.

Это довольно сложное рассуждение, но при некотором умственном напряжении каждый студент его осилит. Заодно усвоит понятия доказательства и алгоритма, у коих нет понятных определений для человека «с улицы». Только в этом разделе доказательства строги и определённы. Материал нагляден, и никаких вычислений не требуется.

Может, надо давать больше доказательств? Доказательства вообще сложны для преподавания; почему это так, читатель может узнать в [18]. Даже сами математики не могут в простых с виду случаях решить, что является доказательством, а что нет — читайте об этом в блестяще написанной брошюре [7]. Даже инженеров по-настоящему не учат отличать доказательства от правдоподобных рассуждений, что уж говорить про социологов. Привлекательна, конечно, идея, что философы (и социологи за компанию) будут знать математику, станут давать строгие определения и «научно» мыслить [3, 9]. Надо только иметь в виду, сколько времени на это понадобится: математику с доказательствами худо-бедно могут освоить выпускники физматшкол, отучившиеся на математических отделениях. Проще сказать: математики не умеют учить доказательствам сами, но умеют за 5–10 лет отсеивать тех, кто так и не научился, глядя на то, как это делают уже умеющие люди. Впрочем, студентам нужно рекомендовать популярную литературу о математике, которую читали советские школьники. Имеющие математические способности или, что почти то же самое, интерес, смогут всё необходимое освоить.

2.2. Середина: визуализация, 5 лекций

Наступает черёд линейной алгебры. Мотивация для социологов такая: *собственные числа* нужны, чтобы определять *центральность* в графах (мы ищем такую меру значимости членов некоторой сети, что значимость человека пропорциональна сумме значимостей его друзей, это приводит к понятию собственного числа матрицы смежности графа). И с самого начала изучения линейной алгебры можно сказать, что матрицы нужны, чтобы хранить данные, а сингулярное разложение (SVD разложение) матрицы, которое, возможно, будет объяснено в конце курса, используется в *рекомендательных системах* (когда вам рекомендуют фильм на основе ваших оценок уже просмотренных фильмов). Опыт говорит, что про алгоритм PageRank и SVD-разложение стоит рассказывать на отдельной паре вечером для желающих, большинству это слишком сложно, но позвать стоит всех.

В этой части курса рисуется много картинок, ключевое рассуждение таково: *определитель матрицы — это объём, поэтому если линейная оболочка трёх векторов двумерна* (*ранг соответствующей матрицы равен* *двум), то определитель матрицы равен нулю и не любая линейная система с этой матрицей имеет решение.* Вокруг этого рассуждения и крутятся все изучаемые примеры, вычисления и лекции на манер вавилонской математики (в изложении Фейнмана). Некоторая логичность изложения сохраняется, из одних утверждений выводятся другие, но основной метод аргументации — примеры и картинки. Порочный круг (из А выводится Б, а из Б выводится А) должен быть обозначен, чтобы студенты понимали, что это не доказательства, а мнемонический способ запомнить материал и связать его в единую картину.

Иногда от курса математики требуют фундаментальности, см. [3, 9]. Можно ли что-то осмысленное рассказать в курсе линейной алгебры социологам, чтобы получилось в некоем смысле стройное здание строгих определений и рассуждений? Я думаю, что нет, простейший учебник — это [6], и он (или часть его) может быть прочтён социологам, но только в рамках необязательного курса для магистров.

2.3. Окончание: примеры и рецепты, 5 лекций

Теперь на сцену выходит математический анализ, где можно на примерах показать, как считать то-то и то-то, ничего не доказывая, но объяснив, что производная — это про касательную, а интеграл — про площадь. Мне не известно успешного опыта объяснения ε-δ-языка экономистам или социологам. Нужно ли рассказывать, что бывают непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции? Рассказывайте, конечно, но даже заподозрить понимание (кроме чисто текстуального: *странное бывает*) у вас вряд ли получится. Важным элементом этой части курса является анализ графиков, нахождение экстремумов функций. В качестве примера я честно вывожу формулу для линейной регрессии (уравнение прямой на плоскости, лучше всего приближающей данный набор точек). Предусмотрено индивидуальное домашнее задание: каждому студенту на неделю выдаётся список задач, в которых нужно найти ответ, причём любым способом (например, посчитать в системе статистического анализа данных R), подсчёт сложных производных и интегралов, SVD-разложения матрицы и т. д. Задание призвано показать студентам, что всё это можно посчитать за несколько секунд, если уметь пользоваться поисковиком.

2.4. Какой должна быть программа

По традиции курсы математического анализа и линейной алгебры отделены от курсов теории вероятностей и статистики. А также социологам можно читать теорию игр, ср. [25].

Интересно изучить зарубежный опыт обучения социологов математике, см., например, [4]. Некоторое время назад Университет Замбии предлагал бакалаврскую программу Sociology with Mathematics, где читались три курса по математике: сначала курс общей математики, затем курс аналитической геометрии и анализа, потом на выбор линейная алгебра или продвинутый анализ. На третьем курсе университета Висконсина читают курс [27], где социологи пишут на Matlab социологические модели.

На мой взгляд, должно быть всё вперемежку. *Первый семестр*: начала теории вероятностей проходятся вместе с комбинаторикой и теорией графов. Тут же можно рассказать о задаче поиска сообществ в графах (community detection) и о случайных графах, иначе единственным примером останутся казуистические задачи типа испытаний Бернулли.

Второй семестр: на примере каких-то жизненных задач, где используется статистика, она изучается, и тут же выясняется, что нужны производные и интеграл — тут-то они и проходятся. Идея, что нужно пройти производные и интеграл, а потом через год их начать применять, когда все их уже забыли, мне кажется странной. Нет ничего удивительного, что на *математических* специальностях матанализ проходят отдельно от статистики — оба курса огромны, и везде лекторов и студентов интересуют прежде всего доказательства фактов и стройность здания математики. Нематематиков же интересуют приложения, поэтому естественнее было бы начинать именно с них, описывая в начале семестра круг проблем, которые хочется научиться решать, а затем долгим и тернистым путём продвигаться к их решению, узнавая по пути необходимый теоретический и практический материал.

Цель курса *научиться искать максимумы функций и площади подграфиков* не вдохновит даже и чистых математиков, не говоря о социологах. Перед тем как рассказывать о частных производных, можно рассказать о равновесии по Нэшу, а потом ввести частные производные, чтобы его искать. *Третий семестр* можно устроить так: теория игр, плавно переходящая в экономику и обратно, и там же поиски максимумов и минимумов с помощью частных производных (где бы найти преподавателей, которые могут и хотят читать такой курс?).

Траектории студентов могут отличаться. Некоторым никакой больше математики не понадобится. Тем же, кто хочет заниматься анализом данных, нужна линейная алгебра.

Четвёртый семестр: линейная алгебра вместо с чем-то ещё — машинным обучением, или анализом данных, или эконометрикой.

Всё это должно тестироваться и обсуждаться как профессиональными математиками, так и социологами. Не каждый захочет этим заниматься —

на изучение книг и статей в журнале Mathematical Sociology, которые я рекомендую студентам в качестве мотивирующего и домашнего чтения, у меня ушло много часов. Какая статистика нужна социологам, я не имею ни малейшего понятия. О математике, которая нужна социологам, можно узнать из учебника математики [22] для социологов-аспирантов.

2.5. Методы представления материала

Я предпочитаю систему, где всё, что должны уметь обучаемые, содержится в задачах. На экзамене — только задачи. Спрашивание на экзамене формулировок приводит к начётничеству, а доказательства социологи даже если и способны понять, то воспроизвести — вряд ли. Определения с примерами и контрпримерами, напротив, заучить стоит — например, можно устроить по ним устный зачёт, который будут принимать ассистенты.

Понять (и запомнить) идеи доказательств способна лишь часть аудитории. Имеет смысл это требовать, но не следует отчислять тех, кто не может эти идеи связно изложить. В курсе должны быть части, которые понятны и интересны многим, но в экзамены и зачёты не попадают.

Сложных незнакомых задач социологи на экзамене не решат. С самого начала курса известно, что на экзамене даются задачи, максимально приближённые к тем, что были в течение семестра на семинарах. Тогда, во-первых, список задач известен заранее, кто не сможет его выучить — должен быть отчислен. Во-вторых, удаётся пройти гораздо более широкий класс тем. Обычно на семинарах решаются более или менее однотипные задачи, чтобы на контрольной студент мог решить похожую задачу. При моём подходе каждый тип задач достаточно проиллюстрировать одной-двумя задачами. Если кто не понял — перечитывайте конспект дома, читайте дополнительную литературу, учите к экзамену.

Лекции предлагается также разбить на задачи. Все примеры, леммы и т. д., которые можно назвать задачами, называются именно так. И на второй (из трёх) контрольных нужно решить две задачи, максимально похожие на задачи из лекций. Примеры можно посмотреть в [26].

Таким образом, достигается несколько целей.

а) Курс разбит на маленькие кусочки, несложные для переваривания. Одно дело — понять «всё» про матанализ, готовясь к контрольной, другое дело — понять решение одной конкретной задачи. Студент видит перед собой не необъятную глыбу материала, а последовательность небольших кусочков, пригодных к освоению.

б) Так как студентам заранее известно, что будет на экзамене и на второй контрольной, появляется мотивация слушать и задавать вопросы:

пока лектор вещает что-то, «размахивая руками», это слушать не обязательно, а если непонятно, то можно сильно не расстраиваться. Как только лектор сказал заветное слово «задача», нужно просыпаться и задавать вопросы — потому что именно эта задача может попасться на контрольной.

2.6. Оценка

Первая контрольная состоит из трёх задач: перемножить две матрицы, решить линейную систему из трёх уравнений, нарисовать диаграмму Эйлера — Венна (для четырёх множеств). На второй контрольной, как сказано выше, нужно решить две задачи, максимально похожие на задачи из лекций. Третья контрольная состоит снова из трёх задач: посчитать производную, посчитать интеграл, нарисовать график функции с заданными свойствами (выпуклость, монотонность, разрывы и т. д.) на разных интервалах.

Часть окончательной оценки приходит из активности студента на семинарах: нужно получить два плюсика (за семестр), рассказав у доски решения двух задач, которые выдаются на дом. Или поработать у доски с подсказками преподавателя, получив за каждую такую задачу часть плюсика.

Ещё одна часть оценки ставится за индивидуальную домашнюю работу. Необходимо выполнить письменную работу (каждый студент получает индивидуальный список задач на вычисление производных и интегралов и т. д., причём разрешается считать это на компьютере, в интернете — как угодно). Необходимо также прочитать главу из одной из книг Introduction to mathematical sociology, Matrices and society, The complexity of cooperation (все есть в списке литературы) и потом пересказать её кому-либо из ассистентов (шесть студентов второго курса, получивших хорошие оценки в прошлом году). Указанные книги хороши, потому что там социологи видят, как именно применяется в социологии то, чему их учат на занятиях по математике. На лекциях, конечно, нет времени рассказывать всё то, что хорошо написано в книге. Так решается и задача приучения студентов к чтению математических текстов на английском языке. Как показывает опыт, студенты способны усвоить из этих книг понятие марковской цепи, даже до изучения статистики или теории вероятностей.

Максимальная оценка равна $1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 4 = 10$, где первые три числа — максимальные баллы за контрольные, следующие два — максимальные баллы за домашнее задание и активность у доски, и 4 — максимальная оценка за окончательный экзамен, где на 80 минут даются восемь задач, похожие на задачи с семинаров. Оценки меньше 4 округляются вниз. Чтобы студента не отчислили, нужно получить 4:

это значит сделать домашнее задание (1,2), выйти два раза к доске (1,2) и написать хотя бы треть задач из контрольных и экзамена (2,6). Итого 5, т. е. даже с запасом. Если хочется стипендию, нужно набрать хотя бы 6 — значит, надо сделать примерно половину задач из контрольных и экзамена. Кто претендует быть отличником (часто это выпускники физматшкол или отчисленные с матмеха или политеха), тем нужно решить почти всё на контрольных и экзамене.

Можно выдать сложные теоремы в качестве бонусов, например:

— полбалла к финальной оценке за доказательство леммы Холла;
— полтора балла за доказательство того, что $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

С теми смельчаками, которые приходят, ведутся беседы, в ходе которых те лучше понимают, что такое доказательство, а лектор может оценить уровень студентов. Оказывается, студент, боясь быть отчисленным, может читать учебники по линейной алгебре для математиков (в надежде получить бонус) и много там понимать. Бонус, впрочем, получают единицы. С точки зрения обратной связи, это общение чуть-чуть компенсирует отсутствие устного экзамена.

2.7. Заключение

Составление программ мне кажется бессмысленным: плохому преподавателю они не помогут, хорошему — помешают. Однако итогом конструктивного обсуждения[1] того, как и какой математике нужно учить социологов, могла бы быть брошюра, содержащая рекомендованный список чтения мотивированному студенту и список конкретных задач (по анализу, комбинаторике, линейной алгебре, теории вероятностей, статистике, теории игр), которые студент должен уметь решать. В точности как рекомендовал В. И. Арнольд в [1]. Компетентно-деятельностный подход при обучении математике, как мне кажется, разделяют только чиновники, только так можно объяснить повсеместное указание «уметь применять методы математики к прикладным задачам». На это, в адекватном понимании требования, необходим целый курс, например, по книге [23]. Список задач гораздо лучше списка тем — про которые не ясно, насколько глубоко их нужно проходить. Пример задачи фиксирует необходимую глубину знаний.

Как математику, мне очень важен эстетический аспект преподавания. Это означает, что задачи должны быть интересны учащимся, а их решения должны быть красивыми. В этом случае студент, решивший задачу,

[1] Кем? Профессиональными математиками, профессиональными преподавателями и профессиональными социологами.

испытает ни с чем не сравнимое удовольствие, но и не решивший, но послушавший решение, тоже уйдёт вдохновлённым.

Невозможно обучение, если подавляющее большинство задач вызывает отвращение. Пример красивой задачи:

В тюрьме два узника, они могут общаться. Начальник тюрьмы предложил игру: *завтра они отправятся в разные комнаты, и каждому будет указан цвет, чёрный или белый. Дальше каждый из них должен назвать цвет. Если хотя бы один из них назвал цвет, указанный другому, то их отпускают, а если нет — обоих убивают. Следует ли им согласиться на игру*? *Если да, то какова их стратегия*?

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Математический тривиум // УМН. 1991. Т. 46, вып. 1(277). С. 225–232.

[2] *Белов А. Я.*, *Явич Р.* Проблемы одарённости и стадийность математического обучения // Математическое образование. 2010. Вып. (1)53. С. 2–5.

[3] *Булгаков Д. Н.* Проблемы математической подготовки студентов-психологов // Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 193–200.

[4] *Давыдов А. А.* Математическая социология: обзор зарубежного опыта // Социологические исследования. 2008. Вып. 4. С. 105–111.

[5] *Епархина О. В.* Математическая подготовка социологов: проблемы и пути решения // `https://www.ssa-rss.ru/index.php`, с. 164.

[6] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2018.

[7] *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967.

[8] *Масюкова О. Н.*, *Мазепа Е. А.*, *Солодков С. А.* Особенности методики преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика» для направления подготовки бакалавриата «Социология» // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 6: Университетское образование. 2013. Вып. 14. С. 111–116.

[9] *Розов Н. Х.* Мысли о преподавании математики гуманитариям, возникшие при чтении одного учебного пособия // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 57–66.

[10] *Рохлин В. А.* Лекция о преподавании математики нематематикам // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 21–36.

[11] *Толстова Ю. Н.* Математические методы — факторы связи естественных и социально-гуманитарных наук (социологии) // Социологические исследования. 2015. Вып. 10. С. 12–21.

[12] *Толстова Ю. Н.* Преподавание математики студентам-социологам // Социологические исследования. 2002. Вып. 2. С. 111–120.

[13] *Толстова Ю. Н.* Социология и компьютерные технологии // Социологические исследования. 2015. Вып. 8. С. 3–13.

[14] *Axelrod R.* The complexity of cooperation: agent-based models of competition and collaboration. Princeton University Press, 1997.

[15] *Bonacich P., Lu P.* Introduction to mathematical sociology. Princeton University Press, 2012.

[16] *Bradley I., Meek R. L.* Matrices and Society: Matrix Algebra and Its Applications in the Social Sciences. Princeton University Press. 2014.

[17] *Coxon A. P.* Mathematical applications in sociology: measurement and relations // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1970. Vol. 1, iss. 2. P. 159–174.

[18] *Dreyfus T.* Why Johnny can't prove // Educational studies in mathematics. 1999. Vol. 38, iss. 1–3. P. 85–109.

[19] *Edling C. R.* Mathematics in sociology // Annual review of sociology. 2002. Vol. 28, № 1. P. 197–220.

[20] *Elton L. R. B.* Aims and objectives in the teaching of mathematics to non-mathematicians // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1971. Vol. 2, № 1. P. 75–81.

[21] *Fararo T. J.* Reflections on mathematical sociology // Sociological Forum. 1997. Vol. 12, iss. 1. P. 73–102.

[22] *Fox J.* A mathematical primer for social statistics. Quantitave Applications in the Social Sciences. № 159. Sage, 2009.

[23] *Lave C. A., March J. G.* An introduction to models in the social sciences. Lanham: University Press of America, 1993.

[24] *Macy M. W., Willer R.* From factors to actors: computational sociology and agent-based modeling // Annual review of sociology. 2002. Vol. 28. P. 143–166.

[25] *Swedberg R.* Sociology and game theory: Contemporary and historical perspectives // Theory and Society. 2001. Vol. 30, № 3. P. 301–335.

[26] `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach/socmathbook.pdf`

[27] `https://ssc.wisc.edu/~jmontgom/soc%20375%20-%20syllabus%20-%20fall%202014.pdf`

Никита Сергеевич Калинин, СПбГУ, НИУ ВШЭ (Санкт-Петербург)

nikaanspb@gmail.com