Заметки с Международного конгресса математиков

А. Ю. Окуньков

Летом 2018 года в Бразилии, в Рио-де-Жанейро, прошёл очередной, уже 28-й по счёту, Международный конгресс математиков (сокращённо МКМ, а по-английски ICM). Конгрессы математиков проводятся с 1897 года и являются не только важнейшими форумами в нашей математической профессии, но и старейшими научными мероприятиями подобного формата. Сейчас они проводятся под эгидой Международного математического союза (ММС). На МКМ вручаются медали Филдса и другие награды Международного математического союза, а именно премии Неванлинны, Гаусса и Лилавати, а также медаль Черна.

Костяк программы МКМ составляют пленарные и секционные доклады, которые предоставляют участникам МКМ уникальную возможность увидеть широчайшую панораму последних достижений во всех областях математики. Пленарные и секционные докладчики тщательно подбираются программным комитетом ММС и обычно очень добросовестно готовят свои доклады, вкладывая в них много мысли и души. На многочисленных формальных и неформальных площадках МКМ математики всего мира знакомятся друг с другом, делятся своими проблемами и опытом, учатся друг у друга, вдохновляют друг друга и т. д. Наконец, публичные лекции конгресса несут математическое знание в поистине широкие массы, которые помимо участников конгресса включают любителей математики, школьников и студентов.

Мне посчастливилось быть участником МКМ в Рио-де-Жанейро, и я бы хотел поделиться своими впечатлениями и мыслями с читателями «Математического просвещения» в этих заметках. Сразу оговорюсь, что современная математика настолько широка и глубока, что целиком вместить её в голову не под силу никому. Не могу утверждать даже, что в моей собственной относительно узкой специальности я детально понял все доклады. Поэтому математику от меня далёкую, а таковая составляет подавляющую часть, я могу пересказывать только очень крупными мазками. Единственная цель, которую подобный пересказ может преследовать, это быть своего рода красочной открыткой из далёкой манящей страны. Я очень надеюсь, что мой пересказ заинтересует читателя и даст ему стимул отправиться в неблизкое путешествие в ту самую манящую страну, а менее иносказательно — засесть за специализированную литературу.

Ключевым и с нетерпением ожидаемым моментом дня открытия конгресса является вручение медалей Филдса, которые считаются самой высокой наградой в математике. В 2018 году медалей Филдса были удостоены Каушер Биркар, Акшай Венкатеш, Алессио Фигалли и Петер Шольце. По традиции церемония включает небольшие лекции о заслугах лауреатов (в английском языке для них используется заимствованное из латыни слово laudatio, что может быть переведено как похвала или восхваление). О заслугах новоиспечённых лауреатов рассказали Кристофер Хэкон, Питер Сарнак, Луис Каффарелли и Михаэль Рапопорт соответственно. Опираясь на эти laudatio и на пленарные доклады самих лауреатов, я попробую рассказать о достижениях новых филдсовских медалистов.

Начать рассказ, видимо, правильно с *Петера Шольце*, ибо даже в такой звёздной компании он стоит особняком. Если имена других медалистов для кого-то вероятно были сюрпризом, то награждение Шольце предсказывали и ожидали все. Трудно не почувствовать восхищения, даже ошеломления, как от глубины, так и от количества открытий, сделанных Шольце, при том что на момент награждения ему было всего 30 лет. При этом работает он в области, которая мне лично представляется невероятно тяжёлой и технической, но вот как-то у него получается находить правильные точки зрения на вопросы, ставившие в тупик старшие поколения математиков.

Математический анализ и дифференциальная геометрия оперируют с вещественными (и комплексными) числами, которые получаются из поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (или поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ в случае комплексных чисел) с помощью процедуры пополнения относительно обычной нормы $|x|$. В теории чисел исключительно важно рассматривать p-адические нормирования, в которых число x тем меньше, чем на бо́льшую степень простого числа p оно делится. Это позволяет подходить к теоретико-числовым вопросам, таким как делимость, аналитически. Над полями, полными относительно p-адического нормирования, можно развивать аналог комплексной геометрии, и это даёт как бы геометрический подход ко многим ключевым проблемам теории чисел. Другое дело, что и в смысле геометрической интуиции, техники, да и объективного существа феноменов, p-адическая ситуация заметно хитрее комплексной.

Одной из первых ярких идей Шольце было понятие перфектоидного поля и перфектоидного пространства. От перфектоидного поля $\Bbbk$ требуется:

1) полнота относительно p-адического нормирования $|\cdot|$,
2) плотность образа отображения $|\cdot|\colon \Bbbk \to \mathbb{R}_{>0}$,
3) существование некоторых корней p-й степени.

Например, если мы к обычному p-адическому полю $\mathbb{Q}_p$ присоединим корни $\sqrt[p^n]{p}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и затем снова p-адически пополним, то получим перфектоидное поле характеристики 0. А если вместо этого мы рассмотрим формальные ряды с членами вида t^{1/p^n} и коэффициентами в конечном поле $\mathbb{F}_p$, то это будет пример перфектоидного поля характеристики p. Отталкиваясь от этого определения, Шольце вводит понятия перфектоидной алгебры и перфектоидного пространства. Несмотря на свою угрожающую ненётеровость, эти объекты сразу проявили себя как самое мощное техническое средство в p-адической геометрии. Многие казавшиеся совершенно неприступными гипотезы (выдвинутые такими математиками, как Делинь, Тейт, Хохстер и др.) были в течение нескольких лет или полностью, или в очень большой общности доказаны Шольце и другими (из которых, видимо, следует особенно выделить Баргава Бхатта и Ива Андре (Ives André)) с использованием техники перфектоидных пространств.

Многие из подобных гипотез касаются когомологий p-адических пространств, и не будет преувеличением сказать, что Шольце и его соавторы научили математиков думать о них совсем по-новому и, как мне кажется, гораздо яснее и понятнее. В привычной геометрии группы когомологий являются, вероятно, самым основным алгебраическим объектом, который можно сопоставить комплексному многообразию, и много важной информации течёт по этому мосту между алгеброй и геометрией в обоих направлениях. К примеру, в задачах геометрической теории представлений само пространство представления часто реализуется как некоторая группа когомологий. В том же духе когомологии некоторых специальных p-адических пространств играют ключевую роль в программе Ленглендса, и результаты Шольце, среди прочего, помогают строить по ним представления Галуа в гораздо большей общности, чем было известно ранее.

Когомологии комплексного многообразия можно вычислять очень по-разному: можно сосчитать когомологии Чеха для подходящего открытого покрытия, а можно использовать теорию де Рама и дифференциальные формы (которые могут быть определены алгебраически для алгебраических многообразий). Согласованность этих конструкций очень неочевидна. С одной стороны, интегралы форм по циклам, которые тут участвуют, могут быть очень интересными трансцендентными числами, как, например, число π. С другой стороны, интегралы форм по циклам игнорируют кручение, т. е. элементы конечного порядка в когомологиях, а кручение часто несёт в себе очень важную информацию.

В алгебраической и теоретико-числовой ситуации вместо старых когомологий Чеха мы имеем этальные когомологии, и внимание большого числа специалистов было сосредоточено на сравнении их с когомологиями де Рама и другими теориями когомологий. Гротендик учил, что в основе их всех должна лежать одна универсальная теория, а именно теория мотивов. Завершение теории мотивов предполагает, однако, доказательство гипотез типа гипотез Ходжа и Тейта, к которым математики вот уже очень долгое время никак не могут подобрать ключей. Тем более замечательно, что Шольце вместе со своими соавторами Бхаттом и Морроу придумал некоторую теорию когомологий, которая зависит от дополнительных параметров и при определённом выборе их значений приводит и к этальным, и к де-рамовским, и к кристальным когомологиям, включая кручение. Ещё более замечательно, что в основе их построения лежит замечательная конкретная деформация комплекса де Рама для аффинного пространства, а именно его q-разностная деформация, столь любимая в теории специальных функций и теории представлений. Просто вместо частных производных мы берём

$$\nabla_{i,q} f(\ldots, x_i, \ldots) = \frac{f(\ldots, qx_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{(q-1)x_i}.$$

При $q \to 1$ это превращается в обычную производную, а лишний параметр q как раз и даёт теории Бхатта, Морроу и Шольце возможность включить многие теории как частные случаи.

Отсчитывающий свою историю с работ Гейне 1840-х годов, q-разностный анализ переживал периоды как высокого, так и среднего интереса со стороны других областей математики. Один подобный всплеск интереса был вызван открытием и исследованием квантовых групп в работах школы Фаддева, Дринфельда и Киотской школы. Другой всплеск приходится на наше время. С одной стороны, как показали Бхатт, Морроу и Шольце, q-разностная техника справляется со многими глубочайшими вопросами в теории чисел. С другой стороны, можно сказать, что квантовые группы и связанная с ними математическая физика шагнули в следующее измерение или даже в следующие измерения. Подробный рассказ об этом отвлёк бы нас слишком далеко, но хочу констатировать тот факт, что роль q-разностных уравнений в математической физике и связанной с ней алгебраической геометрии и теории представлений тоже внезапно выросла.

Каушер Биркар был удостоен медали Филдса за свои работы по многомерной комплексной алгебраической геометрии. Золотым стандартом в алгебраической геометрии является теория гладких алгебраических кривых или компактных римановых поверхностей. Важнейшим инвариантом кривой C является её род $g(C)$, который, в духе уже обсуждавшейся нами эквивалентности между различными построениями когомологий, можно определить или как число ручек у римановой поверхности C, или как число линейно независимых дифференциальных форм на C. Алгебраические, геометрические и теоретико-числовые свойства C исключительно сильно зависят от того, в какой из трёх следующих классов она попадает.

1) Имеется единственная гладкая полная кривая рода 0, это комплексная проективная прямая $C = \mathbb{P}^1$, или сфера Римана. На ней нет ненулевых всюду регулярных сечений расслоения Ω^1_C дифференциальных форм, которое в данном случае совпадает с каноническим линейным расслоением ω_C. Более того, двойственное касательное к C расслоение $\omega_C^{-1} = T_C$ обильно, т. е. имеет много сечений. Поэтому $C = \mathbb{P}^1$ есть простейший пример многообразия Фано. Напомним, что каноническое линейное расслоение для гладкого многообразия X определяется как $\omega_X = \Lambda^{\dim X}\Omega^1_X$, т. е. как старшая внешняя степень кокасательного расслоения X.

2) Для кривых рода $g > 1$, наоборот, некоторая степень ω_C обильна, тем самым они являются простейшим примером многообразий общего типа. Таких кривых много, их классы изоморфизма параметризуются некоторым комплексным многообразием размерности $3g-3 > 0$, к которому мы ещё вернёмся позже.

3) Промежуточное положение занимают кривые рода 1, для них расслоение ω_C тривиально, т. е. на них имеется единственный с точностью до множителя дифференциал, который нигде не вырожден. В большей размерности тривиальность ω_C означает существование всюду невырожденной формы старшей степени. Такие многообразия принято называть многообразиями Калаби — Яу.

Цель многомерной алгебраической геометрии — развить подобного рода понимание для алгебраических многообразий произвольной размерности. Ясно, что картина будет неизмеримо сложнее по целому ряду причин. Уже начиная с размерности 2 классификация с точностью до изоморфизма является слишком утончённой для большинства задач. Действительно, если у нас есть гладкая алгебраическая поверхность, то её можно раздуть в любой точке и получить новую, неизомофную, но очень близкородственную поверхность. Разумно поэтому расширить отношение эквивалентности до бирациональной эквивалентности, которая означает, что два многообразия имеют изоморфные открытые по Зарискому подмножества, или, что то же самое, изоморфные поля рациональных функций. Для гладких полных кривых бирациональная эквивалентность равносильна изоморфизму.

Далее, на произвольном алгебраическом многообразии X ни одно из линейных расслоений $\omega_X^{\pm 1}$ не обязано быть обильным, например, X может расслаиваться над базой общего типа со слоями, которые являются многообразиями Фано или Калаби — Яу. Задачей программы минимальных моделей является сведение произвольного X к такого рода структурам посредством некоторой контролируемой последовательности бирациональных преобразований. Это целая отрасль математики, в развитие которой внесли огромный вклад как зарубежные учёные, такие как Мори, Коллар, Хэкон и др., так и отечественная школа алгебраической геометрии, и в особенности В. А. Исковских и В. В. Шокуров.

Среди результатов *Биркара* можно, пожалуй, выделить два. Первый, полученный совместно с Хэконом, Маккернаном и Кассини, говорит о том, что так называемое каноническое кольцо, т. е. кольцо, образованное сечениями всех степеней ω_X, конечно порождено для гладкого проективного многообразия X над полем комплексных чисел. Таким образом, в частности, можно говорить о его проективном спектре X_{can}, что есть так называемая каноническая модель X. Эта теорема есть яркий заключительный аккорд в долгом развитии идей многих замечательных математиков. По моему скромному суждению, Хэкона стоило бы отметить медалью Филдса за это и другие его достижения, пока ему ещё не было сорока лет. Хоть жизнь и сложилась иначе, признание всё же нашло и Хэкона, и Маккернана в виде Премии за прорыв в математике (Breakthrough prize in mathematics), вручённой им в 2017 году.

Второй же, теперь уже сольный результат Биркара касается классификации многообразий Фано. В любой фиксированной размерности > 1 может существовать бесконечно много различных гладких многообразий Фано, например раздутия проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\leqslant 8$ точках. Однако все они ограничены в том смысле, что образуют конечное число семейств (параметризуемых положением точек раздутия в предыдущем примере). Ограниченность трёхмерных гладких многообразий Фано была доказана В. А. Исковских в 1970-х годах, а случай произвольной размерности был завершён Наделем, Кампаной, Колларом, Мори и Мияокой в начале 1990-х годов.

Простые примеры показывают, что если отказаться от гладкости, то ограниченность пропадает. Однако если сузить допустимый класс особенностей с помощью некоторой численной характеристики ε, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ так называемые ε-лог-терминальные многообразия Фано в любой заданной размерности снова ограничены. Это утверждение было высказано как гипотеза В. Алексеевым и братьями А. и Л. Борисовыми и стало известно как BAB-гипотеза. В своём laudatio Хэкон охарактеризовал эту гипотезу как самую важную гипотезу о многообразиях Фано. Частные случаи этой гипотезы были известны благодаря работам самих Алексеева и Борисовых, Каваматы, Хэкона, Маккернана и Шу. Биркару же удалось доказать эту гипотезу в самой полной общности. Этот его результат и принёс ему славу.

Как и в случае Петера Шольце, о работах *Акшая Венкатеша* на конгрессе рассказывал его бывший научный руководитель — Питер Сарнак. Его задача, полагаю, была столь же сложна, как и задача Михаэля Рапопорта, рассказывавшего о достижениях Петера Шольце. Спектр научных интересов самого Сарнака уже сам по себе практически необъятен, а его ученик Венкатеш способен генерировать свежие идеи и получать первоклассные результаты в столь разнообразных областях, что просто дух захватывает. Тут и динамические системы, и автоморфные формы, и масса других важнейших объектов современной теории чисел, которые все в его статьях живут в сложно переплетённом симбиозе.

Важная тема, подчёркнутая Сарнаком в его выступлении, — это цикл задач о равнораспределении, связанных с так называемыми субконвексными оценками на автоморфные L-функции. Задачи такого рода имеют длинную историю в теории чисел, но особенный прогресс в их анализе был достигнут замечательным отечественным математиком Ю. В. Линником и его последователями (сам Венкатеш в своих статьях постоянно подчёркивает влияние идей школы Линника). В простейшем примере речь идёт о целых точках на сфере или гиперболоиде размера $\sqrt{d}$, т. е. о множестве S_d решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = d, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3,$$

и о распределении соответствующих точек $|d|^{-1/2}(x_1, x_2, x_3)$ на единичной сфере или единичном гиперболоиде. В работах Линника и Скубенко было доказано, при некоторых предположениях на d, что точки $|d|^{-1/2}S_d$ становятся равнораспределены при $d \to \infty$ относительно естественных $G(\mathbb{R})$-инвариантных мер на сфере и гиперболоиде соответственно. Здесь G есть группа матриц, сохраняющих квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2$; она и её подгруппы играют очень важную роль в анализе данной задачи. Собственно, Линник и был первым, кто понял важность идей, связанных с действиями групп и эргодической теорией в данном контексте.

В восьмидесятых годах, т. е. через тридцать лет после работ Линника, его результаты были усилены Дюком следующим образом. Предположим для простоты, что речь идёт о сфере. Асимптотическая равнораспределённость конечных наборов точек S_d означает слабую сходимость соответствующих дискретных вероятностных мер $\frac{1}{|S_d|}\sum_{x\in S_d}\delta_x$ к заданной мере μ, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$\langle f\rangle_d = \frac{1}{|S_d|}\sum_{x\in S_d} f(x) \to 0 \tag{1}$$

для плотного множества таких тестовых функций, что $\int f d\mu = 0$. Уже Линник использовал результаты Б. А. Венкова, из которых следует связь между S_d и группой классов идеалов в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Развивая эту связь, можно получить, для правильно подобранных f, точное выражение для $\langle f\rangle_d$ через специальные значения L-функций. Напомним, что L-функции — это очень глубокие по своим свойствам функции комплексной переменной s, представляющие собой далеко идущие обобщения ζ-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n>0}\frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

впервые рассмотренной Эйлером в Санкт-Петербурге в 1740 году. Гораздо более общие L-функции могут быть построены, например, по автоморфному представлению редуктивной группы над некоторым полем. Утверждение (1) тогда является следствием некоторой так называемой субконвексной оценки для L-функций, которая для $\zeta(s)$ превращается в оценку $\zeta(1/2+it) \ll (1+|t|)^\varepsilon$ на критической линии $\operatorname{Re} s = 1/2$, где $\varepsilon < 1/4$.

Если бы мы доказали гипотезу Римана (а ещё лучше — обобщённую гипотезу Римана для всех L-функций!), то из неё следовала бы подобная оценка с любым $\varepsilon > 0$, а также много других замечательных следствий, однако это, видимо, дело далёкого будущего. Пока специалисты по автоморфным формам доказывают субконвексные оценки в разных специальных случаях, и это целая большая область современной теории чисел. В частности, Венкатеш внёс в неё важный вклад, завершив, совместно с Мишелем, доказательство общей субконвексной оценки $L(\pi, s)$ для всех автоморфных представлений π группы $\mathrm{GL}(2)$ над числовым полем.

Следующий после сфер и гиперболоидов случай связан с кубическими полями и может быть интерпретирован в терминах асимптотической равнораспределённости замкнутых орбит для действия группы диагональных матриц $H \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ на пространстве $X_3 = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. На каждой такой замкнутой орбите живёт конечная H-инвариантная мера, и теорема Айнзидлера, Венкатеша, Линденштраусса и Мишеля утверждает, что некоторые пакеты таких орбит асимптотически равнораспределены в X_3. Прямая оценка общих средних типа $\langle f\rangle_d$ потребовала бы тут новых труднодостижимых субконвексных оценок. Вместо этого авторы резко сужают запас необходимых f, используя мощные структурные результаты о всех вообще возможных конечных H-инвариантных мерах, полученные Айнзидлером, Катком и Линденштрауссом. После этого всё равно остаётся много работы, прежде чем эта замечательная мозаика из эргодической теории, гармонического анализа и теории чисел принимает свою окончательную форму.

Интересно заметить, что другое направление исследований Венкатеша, которому был посвящён его собственный доклад на конгрессе, опять связано с кручением в когомологиях, хоть и не совсем с той же стороны, что и работы Шольце. Можно, наверное, сказать, что 2018-й был хорошим годом для кручения в когомологиях. А если серьёзно, то речь тут идёт вот о чём. Пусть G обозначает вещественную полупростую группу Ли, например $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, а $K\subset G$ обозначает максимальную компактную подгруппу в ней. В $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ это будет $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения. Многообразие G/K обладает замечательной G-инвариантной римановой метрикой, для $n=2$ в нашем примере получится плоскость Лобачевского. Пусть теперь $\Gamma\subset G$ есть арифметическая подгруппа, например $\Gamma=\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\subset\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Многообразие (или, в общем случае, орбифолд) двойных классов смежности $X=\Gamma\backslash G/K$ является одним из главных геометрических объектов современной теории чисел. В частности, его когомологии играют важную роль и перерабатываются, согласно ви́дению Ленглендса, вместе с действующими на них соответствиями Гекке в некоторые представления Галуа. Когомологии X особенно хорошо изучены, когда G/K является эрмитовым симметрическим пространством, что в нашем примере отвечает случаю $n=2$. Если обозначить через δ так называемый дефект, т. е. разницу между рангами G и K, то эрмитов случай отвечает $\delta=0$.

Если взять убывающую последовательность нормальных подгрупп

$$\Gamma_1\supset\Gamma_2\supset\ldots\supset\Gamma_N\supset\ldots,\quad \bigcap\Gamma_i=\{1\},$$

то размерность $H^k(X_N,\mathbb{C})$ растёт пропорционально объёму X_N в случае $\delta=0$ и средних когомологий, а в остальных случаях медленнее. Это показали де Джордж и Воллах ещё в конце 1970-х годов. Венкатеш и Бержерон установили аналогичный результат для кручения в $H^k(X_N,\mathbb{Z})$. В этом случае естественно делить логарифм порядка подгруппы кручения на объём X_N, и этот предел оказывается ненулевым только при $\delta=1$ и $k=\frac{\dim}{2}+1$. Чтобы лучше понять это огромное кручение, Венкатеш вводит дополнительные операторы типа Гекке, которые рождают новые классы кручения из имеющихся, что также помогает прояснить, хотя бы гипотетически, как себя проявляют эти классы кручения на стороне представлений Галуа.

Наконец, четвёртый лауреат, *Алессио Фигалли*, — это уже чистый аналитик, главные работы которого посвящены кругу задач типа задачи Монжа — Канторовича, также известной как задача об оптимальной транспортировке. В задаче Монжа ищется отображение $f\colon X \to Y$, переводящее заданную меру μ_X в заданную меру μ_Y и минимизирующее функционал вида

$$C(f) = \int\limits_X c(x, f(x))\, d\mu_X,$$

обычно называемый функцией стоимости. В хозяйственной интерпретации функция $c(x, f(x))$ может быть стоимостью перевозки единицы некоторого продукта из точки x в точку $f(x)$. Если из каждой точки $x \in X$ разрешить везти не в одну заданную точку $f(x) \in Y$, а распределить имеющийся в x продукт по Y согласно некоторой мере ϕ на $X \times Y$, то получится задача Канторовича. От ϕ требуется иметь заданные проекции μ_X и μ_Y и минимизировать стоимость $\int_{X\times Y} c(x, y)\, d\phi$. Задача Канторовича есть задача линейного программирования, поэтому она проще. Но по смыслу и сути она очень близка к задаче Монжа и очень помогает в анализе последней. Много ярких результатов в общем круге задач Монжа — Канторовича были получены отечественной школой, в том числе А. Д. Александровым, А. М. Вершиком, Н. В. Крыловым, В. А. Рохлиным, А. В. Погореловым, Р. Л. Добрушиным, Ю. В. Прохоровым и многими другими, а среди зарубежных учёных нельзя не упомянуть Л. Амброзио, Я. Бренье, С. Виллани, Э. Калаби, Л. Каффарелли, Р. Маккэна, Ш. Яу, и этот список тоже можно долго продолжать.

При всей, казалось бы, утилитарности транспортной задачи, она относится не к периферии, а к самому центру математики. Одну из ролей оптимальной транспортировки можно, вероятно, сравнить с ролью конформных отображений в анализе на плоскости. Если, например, для доказательства какой-то оценки надо сравнить два множества X и Y (или две меры на них), то очень полезно рассмотреть соответствующее отображение f и исследовать его свойства. Конкретный пример мы увидим позже, а со множеством других примеров можно познакомиться в относительно недавнем обзоре В. И. Богачева и А. В. Колесникова[1)].

Ключевому вопросу о регулярности отображения f были посвящены фундаментальные работы многих перечисленных и неперечисленных математиков. Важной вехой в его решении стали работы Л. Каффарелли, который и выступал с laudatio работ Алессио Фигалли. В своём докладе

[1)] *Богачев В. И., Колесников А. В.* Задача Монжа — Канторовича: достижения, связи и перспективы // УМН. 2012. Т. 67, вып. 5(407). С. 3–110.

Каффарелли особенно подчеркнул важность соболевской регулярности $f \in W^{2,1}$, доказанной Фигалли совместно с де Филипписом. В другой статье той же серии де Филиппис и Фигалли доказывают стабильность, т. е. непрерывную зависимость f от условий задачи в соответствующих пространствах Соболева. Поскольку, как отмечалось выше, рассмотрение f полезно в доказательстве многих неравенств, из этого выводится стабильность соответствующих оценок.

Хотелось бы упомянуть одно приложение оптимальной транспортировки к задачам теории вероятности из совместной работы Фигалли и Алисы Гионе. Классический вопрос теории вероятности состоит в том, как будет себя вести маленький фрагмент большой случайной системы. Например, можно рассмотреть столь малый объём газа или другой большой системы взаимодействующих частиц, что ожидаемое число частиц в нём конечно, и изучать полученную меру на конфигурациях частиц. В качестве взаимодействующих частиц могут выступать, например, собственные числа случайной эрмитовой матрицы (по некоторым историческим причинам этот случай пользуется особой популярностью). Естественное предположение состоит в том, что наблюдаемое в малом объёме зависит не от всех деталей поведения большой системы, а от конечного набора макроскопических параметров типа плотности и температуры. В системах с локальным или достаточно быстро убывающим взаимодействием этот феномен можно описывать в формализме мер Гиббса, развитом Р. Л. Добрушиным и его школой. Хотя взаимодействие собственных чисел случайной матрицы и очень нелокально, тем не менее детали поведения всей большой системы стираются также и для случайных матриц, и для многих аналогичных систем. Люди, занимающиеся случайными матрицами, называют этот феномен универсальностью, и много работ посвящено его доказательству при различных предположениях. Идея, я смею предположить, выдвинутая Гионе, состояла в том, что можно случайный набор частиц перевести в модельный набор с помощью некоторой оптимальной транспортировки f, а затем уже исследовать поведение f при стремлении размера системы к бесконечности. Таким образом, Гионе и Фигалли очень красиво доказывают универсальность для широкого класса систем типа собственных значений случайных матриц.

Из других наград Международного математического союза я бы выделил медаль Черна, вручённую на конгрессе *Масаки Кашиваре*. Профессор Кашивара хорошо знаком российским математикам, и его работы по теории D-модулей, соответствию Римана — Гильберта, теории Каждана —

Люстига, квантовым группам, кристальным базисам и т. д. очень ценят, читают и развивают в нашей стране. Уверен, что очень многие присоединятся к моим самым сердечным поздравлениям Кашиваре с получением медали Черна.

Разумеется, получить награду ММС — это большая честь, и все лауреаты заслуживают самых тёплых поздравлений. Особенно эмоциональным получилось вручение премии Лилавати, которой в 2018 году был удостоен турецкий математик *Али Несин*. Премия Лилавати вручается с 2010 года и отмечает выдающиеся вклады в популяризацию математики и в укрепление роли математики в обществе.

После аспирантуры Йельского университета Али Несин преподавал математику в университетах США, но вернулся в Турцию после смерти своего отца, известного турецкого писателя и драматурга Азиза Несина (1915–1995). Азиз Несин основал в 1973 году специальный фонд с целью помочь получить образование тем детям, которые лишены такой возможности. Али возглавил работу этого фонда, преподавал математику в одном из университетов Стамбула и был вовлечён во множество проектов, самым заметным из которых было создание «Математической деревни» в одном из удалённых уголков Эгейского побережья Турции. Хотя эта деревня построена на чистом энтузиазме и в бытовом смысле довольно аскетична, она стала местом проведения летних математических лагерей для школьников, конференций и других мероприятий. Успех этой деревни, а также гражданское мужество, проявленное организаторами при её создании, были особенно отмечены в laudatio.

Думается, что и в философии математического образования, и в преданности своему делу, и в плане духа подвижничества, у Али Несина есть огромное количество единомышленников и ничуть не менее опытных коллег в нашей стране. Невозможно очертить парой фраз весь российский опыт организации летних школ для школьников, но как не упомянуть знаменитую дубнинскую «Современную математику», которая соберётся этим летом уже в 19-й раз! Теперь уже, увы, без своего главного вдохновителя Виталия Арнольда. В умении довольствоваться малым и при этом создавать всемирно известные математические центры нам тоже опыта не занимать, взять хотя бы знаменитый дачный семинар, организуемый Валерием Лунцем. Поэтому, поздравляя Али Несина и его соратника Севана Нишаняна с этой замечательной наградой, я также обращаю слова глубочайшей благодарности и признательности всем тем, кто вложил столь же большую часть своей жизни в дело математического образования и математического просвещения в нашей стране.

Из пленарных докладов, не связанных (увы!) с наградами, мне особенно запомнились доклады Джорджа Вильямсона и Рахула Пандхарипанде. Начнём с Вильямсона. Краеугольным фактом теории конечномерных комплексных представлений полупростых групп и алгебр Ли является установленная Германом Вейлем полупростота: каждое представление есть прямая сумма неприводимых представлений (которые, в свою очередь, описываются своими старшими весами и характеры которых даются элегантной формулой того же Германа Вейля). В бесконечномерной ситуации категория модулей со старшим весом над полупростой алгеброй Ли уже не является полупростой и характеры неприводимых представлений устроены гораздо хитрее. Изучение этой важной категории, начатое в работах И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда и С. И. Гельфанда, вышло на новую орбиту в работах Каждана и Люстига. Каждан и Люстиг предложили гипотетическую формулу для разложения простейших, так называемых стандартных модулей на неприводимые, а тем самым и формулу для характеров неприводимых модулей. Ингредиенты в гипотезе Каждана — Люстига могут быть описаны как геометрически, в терминах особенностей многообразий Шуберта, так и комбинаторно, в терминах алгебры Гекке группы Вейля алгебры Ли. Доказательство гипотезы КЛ, вскоре найденное Бейлинсоном и Бернштейном и, независимо, Брылинским и Кашиварой следует, без сомнения, отнести к важнейшим достижениям теории представлений второй половины XX века. Дальнейшее переосмысление этого круга вопросов было достигнуто Бейлинсоном, Гинзбургом, Зёргелем (учеником которого был Вильямсон) и другими.

Большинство работ Вильямсона посвящено аналогичным вопросам для представлений над полем характеристики p. Хорошо известно, что теория представлений в характеристике p напоминает бесконечномерную теорию представлений в характеристике 0, в которой дополнительно возникает некоторая периодичность по модулю p. В частности, вместо зеркал $\alpha(x) = 0$, где α пробегает множество корней группы Вейля, в характеристике p следует рассматривать зеркала $\alpha(x) \in p\mathbb{Z}$, отражения в которых порождают аффинную группу Вейля (и соответствующую аффинную алгебру Гекке). Гипотетический аналог формулы для характеров неприводимых представлений был в такой постановке предложен Люстигом и даже доказан для всех очень больших p в работе Андерсена, Янцена и Зёргеля (с использованием важных результатов Кашивары и Танисаки и других). Более прямые доказательства, опять же для очень больших p, были предложены Безрукавниковым и его соавторами (Архиповым и Гинзбургом, в одном варианте, и Мирковичем и Рюминым — в другом).

Вильямсон добился замечательного прогресса в вопросе о том, когда и как формулы типа гипотезы Люстига модифицируются при не очень большом p. Как и многие исследователи до него, он строит геометрические модели кратностей с помощью конструктивных пучков и теорем типа теоремы о разложении Бейлинсона, Бернштейна и Делиня. Сложность в том, что теорема ББД не верна с коэффициентами в поле характеристики p, но Вильямсон и его соавторы придумали некоторую правильную её замену с использованием введённых ими так называемых пучков чётности. Вычисления с этими пучками чётности хоть и гораздо сложнее, чем вычисления в классической теории Каждана — Люстига, но всё же не безнадёжны и доводимы до ответа. В частности, вычисления Вильямсона показывают, что простые числа p, для которых гипотеза Люстига не выполняется для $\mathrm{SL}(n)$, могут расти экспоненциально с n. Это, конечно, совершенно поразило воображение всех специалистов, которые ожидали условия типа $p > n$ для справедливости формулы Люстига.

По моему скромному суждению, вся эта область математики наполнена необычайной красотой, и пожалуй, заслуги перечисленных мной математиков могли бы быть отмечены бóльшим числом наград Международного математического союза, чем одна медаль Черна, вручённая Кашиваре. Хотя, конечно, всегда полезно помнить, что подлинная цель занятий математикой лежит гораздо выше и что она же и есть наша главная награда.

Главной темой в докладе моего старого друга Рахула Пандхарипанде было пространство модулей кривых рода g, о которых мы уже говорили ранее. Как пространство модулей гладких кривых рода g, так и его компактификация стабильными кривыми, предложенная Делинем и Мамфордом, играют исключительно важную роль в алгебраической геометрии и математической физике. Это как бы старший, нелинейный брат многообразий Грассмана и других многообразий, параметризующих объекты линейной алгебры. Подобно тому как многообразия Грассмана и их когомологии объясняют геометрию векторных расслоений (иными словами, геометрию семейств векторных пространств), пространства модулей кривых объясняют геометрию семейств алгебраических кривых. В частности, они нужны повсюду, где изучается исчислительная геометрия кривых, т. е. при ответе на каждый вопрос типа: сколько кривых заданной степени и заданного рода в каком-то алгебраическом многообразии X удовлетворяют тем или иным условиям (например, пересекают заданные циклы в X). Исчислительные вопросы такого рода составляют современный аналог исчисления Шуберта. Они возникают не только в алгебраической геометрии, но и в математической физике, в частности в математических аспектах теории струн.

Полные кольца когомологий пространств модулей кривых устроены очень сложно. К счастью, в исчислительных задачах можно ограничиться только их малой частью, порождённой понятными геометрическими классами. Это так называемое тавтологическое кольцо, и поскольку образующие этого кольца можно предъявить явно, главный вопрос о тавтологическом кольце — это вопрос о соотношениях между этими образующими. Долгое время эта область находилась под влиянием гипотез, высказанных Карелом Фабером и утверждавших, среди прочего, что тавтологическое кольцо горенштейново, подобно кольцу когомологий гладкого полного многообразия некоторой размерности (а именно размерности $g-2$ для пространства модулей $\mathscr{M}_g$ гладких кривых рода g). Это было проверено для $g \leqslant 23$, но, видимо, неверно начиная с рода $g=24$. Дело в том, что в последние годы Пандхарипанде, его учеником Пикстоном и их соавторами, был достигнут замечательный прогресс в доказательстве и анализе соотношений в тавтологическом кольце. Всё указывает на то, что все соотношения уже найдены и это есть окончательный, негоренштейнов ответ. Не удивлюсь, кстати, если окажется, что $g = 24$ здесь связано с решёткой Лича, о которой пойдёт речь ниже.

Стоит сказать пару слов об одном важном ингредиенте анализа когомологий пространств модулей кривых. Обозначим через $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$ пространство модулей стабильных кривых рода g с n отмеченными точками. Напомним, что стабильным кривым разрешается иметь простые двойные особые точки вида $xy=0$, если только они не отмечены. Рассоединяя две ветви в такой особой точке, мы получаем отображения

$$\overline{\mathscr{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathscr{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathscr{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2} \quad \text{и} \quad \overline{\mathscr{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathscr{M}}_{g+1,n}\,.$$

Набор классов когомологий $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$ для всех g и n называется когомологической теорией поля (название, пришедшее из математической физики), если он согласован с этими отображениями. Замечательным фактом о такого рода объектах является гипотеза А. Гивенталя, доказанная К. Телеманом. Она утверждает, что все такие теории, удовлетворяющие некоторому условию невырожденности, можно некоторым калибровочным преобразованием перевести в тривиальный набор из единичных классов когомологий. Эта теорема упаковывает всю априори неограниченную сложность многих когомологических теорий поля в одну матрицу, зависящую от параметра, что делает возможными многие ранее неприступные вычисления.

Из докладов на конгрессе нового поколения математиков не могу оставить без внимания доклад Е. Малинниковой и А. Логунова, а также доклад Марины Вязовской. Замечу, что все они недавно были удостоены престижной премии Клэя и мне бы очень хотелось видеть и Марину, и Сашу в числе лауреатов новых премий ММС в 2022 году. Женя Малинникова уже не может получить Филдсовскую медаль по возрасту, но несомненно, что широкое признание её заслуг ждёт её в какой-то другой форме. Всех, кто читает по-английски, я призываю прочитать статью Генри Кона о Марине Вязовской в Известиях Американского математического общества[2]. В ней рассказывается, как Кон и Элкис много лет тому назад придумали стратегию для доказательства оптимальности упаковок шаров, отвечающих решёткам E_8 и решётке Лича в размерностях 8 и 24 соответственно. И никто не мог подобрать к этой стратегии один магический ключ, одну магическую функцию до того, как Марина предъявила подобную функцию явно. Саша и Женя аналогично прославились простым красивым решением очень старой и хорошо известной задачи, а именно задачи об оценке меры множества нулей собственной функции оператора Лапласа.

К слову, о следующем математическом конгрессе: он пройдёт в нашей стране в 2022 году, в Санкт-Петербурге. Такое решение было принято на Генеральной ассамблее Международного математического союза, которая собиралась в бразильском городе Сан-Паулу прямо перед началом конгресса в Рио. Автор этих строк был там в составе делегации, представлявшей заявку Санкт-Петербурга. Наша заявка опередила при голосовании заявку, поданную городом Парижем, в очень сложной и драматичной борьбе, о которой можно почитать в репортаже Натальи Дёминой, написанном по свежим следам событий[3].

Конечно, подобное международное признание заслуг отечественной математической школы не может не окрылять. (Заметьте, сколько имён петербургских математиков мы упомянули!) Но также следует помнить, что организация и успешное проведение конгресса — это огромный труд и огромная ответственность, тем более что обещали мы его провести на самом высоком уровне.

При всех успехах организаторов конгресса в Рио очень хотелось бы, чтобы у нас некоторые вещи получились лучше. К примеру, участие в конгрессе собственно бразильских и вообще южноамериканских математиков не было столь массовым, как хотелось бы. Очень хочется надеяться, что конгресс в Санкт-Петербурге будет очень притягательным событием для математиков из России и всех соседних государств.

---

[2] *Cohn H.* A conceptual breakthrough in sphere packing // Notices Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 64, № 2. P. 102–115.

[3] `https://trv-science.ru/2018/07/29/mezhdunarodnyj-kongress-matematikov-projdet-v-2022-v-sankt-peterburge/`

Традиционно программу конгресса дополняют сателлитные конференции по множеству более специальных тем, и мы надеемся, что организация подобных мероприятий будет замечательным поводом укрепить дружбу и сотрудничество между российскими математиками, нашими соседями и всем мировым математическим сообществом.

Мы, организаторы конгресса в Санкт-Петербурге, очень надеемся, что студенты и аспиранты математических специальностей откликнутся на призыв стать волонтёрами конгресса. С одной стороны, присутствие на конгрессе в качестве волонтёра даёт уникальный шанс окунуться в самую гущу современной математики. С другой стороны, успех и само проведение конгресса невозможно без труда множества энтузиастов математики, в том числе, разумеется, организаторов конгресса и его волонтёров.

Отдельно хочется обратиться к читающим по-русски математикам за рубежом, нашим коллегам, которые или причисляют себя к воспитанникам некогда единой математической школы, или как-то по-иному с ней связаны. Очень ждём вас всех в Санкт-Петербурге! Хотя пленарные и секционные доклады конгресса всегда делаются на английском языке, мы планируем включить в программу ряд мероприятий на русском языке, в том числе некоторые из публичных лекций.

Хочется обратить внимание всех молодых математиков и всех математиков из развивающихся стран на то, что положения заявки предполагают полную поддержку для 1000 участников из развивающихся стран и оплату расходов в Санкт-Петербурге для 1300 молодых математиков. Эта поддержка будет предоставляться в соответствии с рекомендациями Международного математического союза и в партнёрстве с зарубежными математическими обществами и агентствами, финансирующими науку.

Среди важных решений Генеральной ассамблеи в Сан-Паулу было создание специального структурного комитета ММС. В задачу этого комитета входит разработка структуры программы конгрессов, в то время как программный комитет, который раньше полностью отвечал за программу, будет теперь подбирать конкретных докладчиков под заданную структурным комитетом матрицу. Конечно, мы с большим интересом ждём решений и рекомендаций структурного комитета, тем более что конгресс в Санкт-Петербурге будет первой пробой нового механизма составления программы. Всех, у кого есть на этот счёт соображения и пожелания, призываю обращаться прямо в структурный комитет через его председателя Теренса Тао.

Что касается публичных лекций, выставок, фестивалей, культурных и прочих мероприятий за рамками полномочий структурного и программного комитетов, то за это отвечает организационный комитет, и мы с радостью услышим любые пожелания и идеи по поводу этой части программы.

Наконец, в связи с проведением Международного конгресса математиков ожидается, что 2022 год будет объявлен в Российской Федерации годом математики. Мне видится, что год математики в стране мог бы быть наполнен массой мероприятий для детей, школьников, студентов, просто любителей математики, мероприятий очень разных как по теме, формату, так и по месту проведения. Что-то будет происходить в школах и других учебных заведениях, что-то в различных математических центрах, на страницах печати, на телевидении, в интернете и т. д. Было бы замечательно дать простор и дополнительный импульс тому интересу и склонности к математике, которые определённо есть у многих жителей нашей страны. Для масштабного и успешного проведения года математики потребуется участие не только значительной части математиков, работающих в нашей стране, но и нашей математической диаспоры. Я очень надеюсь, что читатели «Математического просвещения» примут самое активное участие в подготовке и проведении столь масштабного мероприятия.

Андрей Юрьевич Окуньков, Колумбийский университет (Нью-Йорк, США), Сколтех (Москва), НИУ ВШЭ
okounkov@math.columbia.edu