Решения задач из прошлых выпусков

7.7. Условие. W — бесконечное слово (сверхслово), $u \neq v$ — два его различных подслова. Докажите, что имеет место одна из трёх возможностей:

- Существуют такие s и t, что sut — подслово в W, а svt нет.
- Сверхслово W содержит сколь угодно большие участки, свободные от вхождения слова u.
- Некоторая комбинация букв в сверхслове W повторяется более 1000 раз подряд. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Первоначальные сведения по комбинаторике слов читатель может найти в замечательной книге [1].

Будем считать, что бесконечное вправо сверхслово U *подчинено сверхслову* W (обозначение: $U < W$), если все подслова конечной длины в U являются также подсловами сверхслова W. Если первая альтернатива задачи не выполняется, то замена любого вхождения u в такое сверхслово U на вхождение v приводит к появлению сверхслова $U' < W$. Рассмотрим теперь следующие случаи.

1) Слово u лексикографически меньше слова v (напомним, что если одно слово — начало другого, то слова лексикографически несравнимы). Тогда замена любого вхождения u на v приводит к лексикографическому увеличению бесконечного вправо сверхслова. Рассмотрим сверхслово U, лексикографически максимальное[1)] среди всех сверхслов, подчинённых W. Тогда в U слово u входить не может и, стало быть, в слове U есть сколь угодно длинные куски, свободные от вхождения u. Поскольку $U < W$, этим же свойством обладает и сверхслово W.

2) Слово u лексикографически больше слова v. Действуем аналогично предыдущему случаю, рассматривая лексикографически минимальное сверхслово $U < W$.

3) $v = ut$ и t — непустое слово. Пусть первая альтернатива задачи не выполняется. Возьмём произвольное n и в слове ut сделаем последовательно

[1)] В решении задачи 2.9 (см. [2]) содержится доказательство существования лексикографически минимального правого сверхслова. Оно без изменений проходит для множества сверхслов, подчинённых слову W, а также с заменой минимальности на максимальность.

n замен u на v. Получим слово $U' < W$, содержащее n-ю степень слова t. Но тогда и W тоже содержит n-ю степень слова t. Поскольку n произвольно, выполняется третья альтернатива задачи.

4) $u = vt$ и t — непустое слово. Если третья альтернатива не выполняется, то найдётся такое $n \geqslant 1$, что vt^n — подслово в W, а слово vt^{n+1} — нет. Поскольку W бесконечно, в него входит подслово $u' = ut^{n-1}t' = vt^nt'$, где t' и t имеют одинаковую длину и $t' \neq t$. При замене u на v возникает подслово $v' = vt^{n-1}t'$. Слова u' и v' имеют общее начало vt^{n-1}, а затем в слове u' стоит t, в слове v' стоит t', не равное t. Поскольку длины слов t и t' равны, эти слова лексикографически сравнимы, но тогда сравнимы v' и u'. Замена u на v приводит к замене u' на v', и мы приходим к первым двум случаям. Задача решена.

Упражнение. Если $uv = vu$, то для некоторого слова s выполняются равенства $u = s^n$, $v = s^m$, где m, n — натуральные числа.

Комментарий. Задача возникла из доказательства совпадения ниль-радикала и радикала Джекобсона для мономиальных алгебр (см. [3–5]).

Доказательство существования лексикографически минимального правого сверхслова использует идею *компактности*. (Подробнее см. [6]. Связь с понятием компактности в математическом анализе обсуждается в решении задачи 7.2, см. [7].) Ниже приведён ряд упражнений на эту идею.

1. Пусть $\{v_i\}$ — набор слов неограниченной длины над конечным алфавитом. Тогда найдётся сверхслово V, каждое подслово которого является подсловом одного из слов этого набора.

2. Известно, что человечество бессмертно, но каждый человек смертен и количество людей в каждом поколении конечно. Тогда найдётся бесконечная мужская цепочка, идущая от Адама.

3. Докажите, что хроматическое число графа, если оно конечно, равно максимуму хроматических чисел его конечных подграфов. (*Указание*: см. решение задачи 7.2 в [7].)

4. В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, чтобы у каждого парламентария было не более одного врага в своей палате. (Если A — враг B, то B — враг A.) Для конечного парламента решение см. в [8].

Список литературы

[1] *Саломаа А.* Жемчужины теории формальных языков. М.: Мир, 1986.

[2] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО. 2002. С. 145–147.

[3] *Belov A., Gateva-Ivanova T.* Radicals of monomial algebras // First International Tainan — Moscow Algebra Workshop (Tainan, 1994). Berlin: W. de Greyer, 1996. P. 159–169.

[4] *Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н.* Мономиальные алгебры // Алгебра-4. Итоги науки и техники. Соврем. матем. и её прил. Темат. обзор. М.: ВИНИТИ, 2002. Т. 26. С. 35–214.

[5] *Belov A. Ya., Borisenko V. V., Latyshev V. N.* Monomial algebras // J. Math. Sci. 1997. V. 87, № 3. P. 3463–3575.

[6] *Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Ященко И. В.* Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016. С. 30.

[7] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО. 2002. С. 259–260.

[8] *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2016. С. 59–60.

(*А. Я. Канель-Белов*)

11.9. Условие. Можно ли множество рациональных точек единичной сферы раскрасить в два цвета (чёрный и белый) так, что если три точки отвечают концам трёх ортогональных векторов, то одна из них будет чёрной, а две другие — белыми? (*Д. Муштари*)

Решение. Рассмотрим решение уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в рациональных числах. Пусть q есть наименьшее общее кратное их знаменателей. Тогда числа $x' = xq$, $y' = yq$, $z' = zq$ взаимно просты в совокупности и среди них ровно одно нечётное и два чётных. (Рассмотрите остатки по модулю 4.) Следовательно, два вектора (x_1', y_1', z_1') и (x_2', y_2', z_2') могут быть ортогональны, только если разные координаты нечётные, а тройка таких векторов может оказаться попарно ортогональной, только если в одном нечётна координата x', в другом — координата y', в третьем — z'. Красим целочисленные точки с нечётной x'- или y'-координатой в чёрный цвет, а целочисленные точки с нечётной z'-координатой — в белый. Рациональную точку (x, y, z) красим так же, как соответствующую точку (x', y', z'). Получаем искомую раскраску.

Замечание. Отметим, что таким образом раскрасить *все* (а не только рациональные) точки единичной сферы невозможно. См. задачу 10.8.

(*А. Я. Канель-Белов*)

13.5. Условие. Известно, что в любом треугольнике расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей выражается через их радиусы R и r с помощью *формулы Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью ℓ, то $R^2\ell^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2)$.

(*А. А. Заславский*)

Решение 1 обобщает доказательство формулы Эйлера для окружности.

Лемма 1. *Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса, ℓ — длина его малой оси, D_1, D_2 — основания перпендикуляров, опущенных из F_1, F_2 на касательную к эллипсу. Тогда $4D_1F_1 \cdot D_2F_2 = \ell^2$.*

Доказательство. Пусть T — точка касания, a — длина большой полуоси, I — центр эллипса, f — расстояние от фокуса до центра эллипса (таким образом, $\ell^2/4 = a^2 - f^2$), F_1' — точка, симметричная F_1 относительно касательной, см. рис. 1. Тогда $F_1'F_2 = 2a$ по оптическому свойству эллипса [1, с. 13] и ID_1 — средняя линия треугольника $F_1F_2F_1'$. Таким образом, точка D_1 (и аналогично D_2) лежит на окружности с центром I и радиусом a. Поэтому утверждение леммы эквивалентно равенству $D_1F_1 \cdot D_2F_2 = ID_1^2 - IF_1^2$.

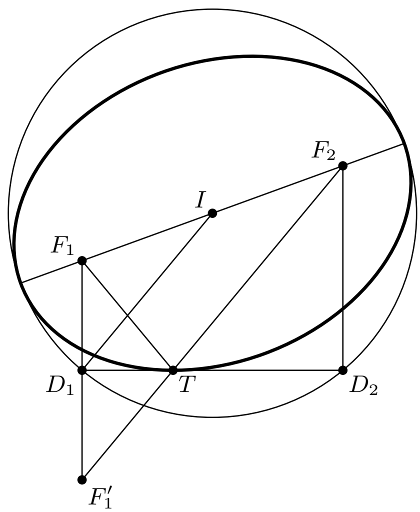

Рис. 1

Пусть теперь I' — проекция точки I на D_1F_1. Тогда

$$ID_1^2 - IF_1^2 = I'D_1^2 - I'F_1^2 = (I'D_1 + I'F_1)(I'D_1 - I'F_1).$$

Множители правой части равны (в том или другом порядке) D_1F_1 и D_2F_2, что и требовалось. □

Лемма 2 (обобщение леммы о трезубце). *Пусть в треугольник ABC вписан эллипс с фокусами F_1, F_2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, L_1, L_2 — точки её пересечения с лучами AF_1, AF_2* (см. рис. 2)*. Тогда $F_1L_1 \cdot F_2L_2 = BL_1 \cdot BL_2$.*

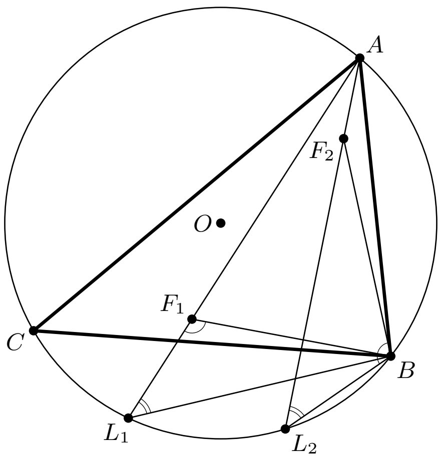

Рис. 2

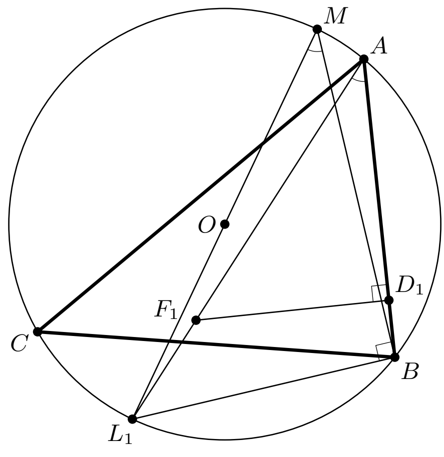

Рис. 3

Доказательство. С учётом изогонального свойства эллипса [1, с. 15],

$$\angle BF_1L_1 = \angle BAF_1 + \angle ABF_1 = \\ = \angle CAF_2 + \angle CBF_2 = \angle CBL_2 + \angle CBF_2 = \angle L_2BF_2.$$

При этом $\angle AL_1B = \angle AL_2B$, так как они опираются на одну и ту же дугу. Значит, $\triangle BF_1L_1 \sim \triangle F_2BL_2$, откуда следует нужное равенство. □

Проведём теперь в описанной окружности диаметр L_1M и опустим из F_1 перпендикуляр F_1D_1 на AB (см. рис. 3). Вписанные углы BML_1 и D_1AF_1 опираются на одну дугу, поэтому прямоугольные треугольники BML_1 и D_1AF_1 подобны. Следовательно, $F_1D_1 : AF_1 = BL_1 : ML_1$, т. е.

$$2R \cdot F_1D_1 = AF_1 \cdot BL_1.$$

Опустив из F_2 перпендикуляр F_2D_2 на AB, аналогично получаем

$$2R \cdot F_2D_2 = AF_2 \cdot BL_2.$$

Применяя леммы 1 и 2, приходим к равенству

$$R^2\ell^2 = AF_1 \cdot F_1L_1 \cdot AF_2 \cdot F_2L_2. \qquad (*)$$

Заметим теперь, что $R^2 - OF_1^2 = (R + OF_1)(R - OF_1)$ — степень (со знаком минус) точки F_1 относительно описанной окружности треугольника ABC, и аналогичное верно для F_2. Поэтому формула из условия задачи равносильна равенству $(*)$. (*А. А. Заславский, Б. Р. Френкин*)

Решение 2. Использование комплексных чисел позволяет не опираться на доказательство для окружности. Пусть ABC — данный треугольник, A', B', C' — точки, симметричные F_1 относительно BC, CA, AB. Из оптического свойства эллипса [1, с. 13] следует, что каждый из отрезков F_2A', F_2B', F_2C' равен большой оси вписанного эллипса.

Будем считать, что описанная окружность треугольника является единичной окружностью комплексной плоскости. Пусть a, b, c, f_1, f_2, a', b', c' — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C, F_1, F_2, A', B', C'. Точки F_1 и F_2 изогонально сопряжены относительно треугольника [1, с. 15], и из формулы Морли [2, с. 94] получаем

$$f_1 + f_2 + abc\overline{f_1 f_2} = a + b + c. \tag{1}$$

Теперь найдём большую ось эллипса. Например, для точки C' имеем

$$\frac{c' - a}{b - a} = \frac{\overline{f_1} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

Поскольку $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$, получаем

$$F_2C'^2 = (f_2 - c')(\overline{f_2} - \bar{c}') = f_1\overline{f_1} + f_2\overline{f_2} + \\ + \frac{f_1 f_2}{ab} + ab\overline{f_1 f_2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(f_1 + f_2) - (a + b)\overline{(f_1 + f_2)} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2.$$

Напишем аналогичные выражения для $F_2A'^2$ и для $F_2B'^2$ и рассмотрим $(F_2A'^2 + F_2B'^2 + F_2C'^2) : 3$. Эта сумма симметрично зависит от a, b, c и, следовательно, может быть выражена через $a + b + c$, $ab + bc + ca$ и abc. Но, используя соотношение (1) и сопряжённое к нему, можно выразить $a + b + c$ и $ab + bc + ca$ через abc. Согласно теореме Понселе большая ось эллипса зависит только от f_1, f_2, поэтому после проведения всех выкладок члены, содержащие abc, уничтожатся и мы получим:

$$F_2C'^2 = (1 - f_1\overline{f_1})(1 - f_2\overline{f_2}) + (f_1 - f_2)(\overline{f_1} - \overline{f_2}).$$

Подставив в это выражение

$$f_1\overline{f_1} = \frac{OF_1^2}{R^2}, \quad f_2\overline{f_2} = \frac{OF_2^2}{R^2}, \quad (f_1 - f_2)(\overline{f_1} - \overline{f_2}) = \frac{F_1F_2^2}{R^2},$$

умножив его на R^4 и вычтя $F_1F_2^2R^2$, получим требуемое равенство.

Примечание. В приведённом решении никак не используется, что в треугольник вписан именно эллипс, а не гипербола. Поэтому формула верна и для гиперболы, если под ℓ подразумевать её мнимую ось.

Список литературы

[1] *Акопян А., Заславский А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *Прасолов В. В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: Фазис, 1997.

(*А. А. Заславский*)

19.2. Условие. В пространстве произвольным образом расположено несколько многогранников (возможно, пересекающихся). Доказать, что в пространстве можно расположить некоторое множество точек так, чтобы каждый многогранник содержал не менее одной точки внутри себя и чтобы любые два многогранника одинакового объёма содержали внутри себя одно и то же число точек. (*Г. А. Гальперин*)

Решение. Условие задачи можно переформулировать на языке системы линейных уравнений. Занумеруем всевозможные пересечения наших многогранников M_α и их дополнений, имеющих ненулевой конечный объём, числами $i=1, \ldots, k$, и пусть x_i — количество точек в i-м множестве V_i. Каждый многогранник M_α составлен из таких множеств V_i. Поэтому равенство количеств точек в двух многогранниках равного объёма будет выражаться соотношением вида $\sum x_i = \sum x_j$, а условие баланса выразится в виде системы уравнений и неравенств вида

$$\sum_{V_i \subseteq M_{\alpha_k}} x_i = \sum_{V_j \subseteq M_{\beta_k}} x_j, \quad x_i > 0, \ x_j > 0,$$

где $\mathrm{Vol}(M_{\alpha_k}) = \mathrm{Vol}(M_{\beta_k})$.

Указанная система совместна: подставим вместо каждого x_i объём множества V_i — все равенства выполнятся автоматически. Кроме того, все коэффициенты — целые.

Нам, однако, надо найти *целочисленное решение* этой системы. Поскольку система однородна, достаточно найти рациональное решение, поскольку все x_i можно умножить на кратное всех знаменателей. Остаётся воспользоваться следующей леммой.

Лемма. *Если система линейных уравнений и неравенств с рациональными коэффициентами и свободными членами имеет ненулевое решение, то она имеет и рациональное ненулевое решение.*

Доказательство. Если линейное неравенство нестрогое, то множество его решений есть объединение множества решений системы, где оно заменено на уравнение, и другой системы, где оно заменено на строгое неравенство. Таким образом, достаточно рассмотреть случай системы уравнений и строгих неравенств.

Выберем одно уравнение, выразим из него какую-либо переменную и подставим в остальные. Свойство уравнений и неравенств иметь рациональные коэффициенты и свободные члены при этом сохраняется. Проведя спуск по количеству уравнений, либо получим единственное решение системы (и оно рационально), либо приходим к системе строгих неравенств (если их множество пусто, то решением является любая точка пространства).

Если мы имеем решение системы строгих линейных неравенств, то его достаточно малая окрестность также состоит из решений в силу непрерывности линейной функции. Но в этой окрестности найдётся рациональное решение. □

Замечание 1. Похожим образом решается следующая классическая задача. *В стаде* 101 *корова. Если удалить любую, то стадо можно разбить на* 2 *стада по* 50 *коров равной массы. Доказать, что веса всех коров равны.*

Замечание 2. Одномерный случай рассматриваемой задачи используется в одном из решений *третьей проблемы Гильберта*: *доказать, что куб и правильный тетраэдр неравносоставленны.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

20.1. Условие. Частица движется по прямой линии, при этом направление движения может меняться. В каждый момент времени ускорение частицы не превосходит 1 м/с^2 по абсолютной величине. Через одну секунду после начала движения частица вернулась в начальную точку. Докажите, что её скорость через 0,5 с после начала движения не превосходит 0,25 м/с.

(*А. Колчев*)

Решение. Пусть все промежутки времени выражены в секундах, а промежутки длины — в метрах. Пусть $\nu(T)$ — скорость, $a(t)$ — ускорение частицы в каждый момент времени. По условию задачи $|a(t)| = |\nu'(t)| \leqslant 1$ и $\int_0^1 \nu(t)\,dt = 0$. Требуется оценить $\nu(0{,}5)$.

Рассмотрим модуль этой величины:

$$|\nu(0{,}5)| = |\nu(0{,}5) - 0| = \left|\nu(0{,}5)\int\limits_0^1 dt - \int\limits_0^1 \nu(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_0^1 (\nu(0{,}5) - \nu(t))\,dt\right|.$$

Используем теорему Лагранжа:

$$\nu(0{,}5) - \nu(t) = \nu'(c(t)) \cdot (0{,}5 - t),$$

где $c(t) \in [0{,}5; t]$. Отсюда

$$|\nu(0{,}5)| = \left|\int\limits_0^1 \nu'(c(t)) \cdot (0{,}5 - t)\right| dt \leqslant \int\limits_0^1 |\nu'(c(t)) \cdot (0{,}5 - t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 |\nu'(c(t))| \cdot |(0{,}5 - t)|\, dt.$$

Но $|\nu'(t)| \leqslant 1$. Следовательно,

$$|\nu(0{,}5)| \leqslant \int\limits_0^1 |0{,}5 - t|\, dt = \int\limits_0^{0{,}5} (0{,}5 - t)\, dt + \int\limits_{0{,}5}^1 (t - 0{,}5)\, dt = \frac{1}{4}.$$

(*А. Колчев*)