Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Какая из двух кривых длиннее: эллипс $\left\{(x,y)\colon \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\right\}$ или синусоида $\{(x,\sin x)\colon 0\leqslant x\leqslant 2\pi\}$?

   (*Л. Радзивиловский*)

2. Докажите равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n - \sum_{j=1}^{n}(x_1+\ldots+\widehat{x}_j+\ldots+x_n)^n +$$
$$+\sum_{j_1<j_2}(x_1+\ldots+\widehat{x}_{j_1}+\ldots+\widehat{x}_{j_2}+\ldots+x_n)^n+\ldots+$$
$$+(-1)^{|J|}\sum_{j_1<\ldots<j_{|J|}}(x_1+\ldots+\widehat{x}_{j_1}+\ldots+\widehat{x}_{j_{|J|}}+\ldots+x_n)^n+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^n = n!\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

где $\widehat{x}_j$ означает, что соответствующий член опускается.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 21, 2017(271–275)

3. Сеть железных дорог представляет собой дерево (неориентированный конечный связный граф без циклов). По сети проходят маршруты электричек, посредством которых можно проехать от любой станции до любой (возможно, с пересадками). Электричка может повернуть назад лишь на конечных станциях маршрута. Количество тупиков (висячих вершин, т. е. вершин степени 1) в данной сети равно n.
   а) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать, возможно с пересадками?
   (*Фольклор*)
   б) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать не более чем с одной пересадкой?
   (*Б. Р. Френкин*)
4. На плоскости отмечено n прямых общего положения, т. е. никакие три не пересекаются в одной точке, никакие две не параллельны и любые три точки пересечения либо не лежат на одной прямой, либо лежат на одной из отмеченных. Сколькими различными способами можно добавить *хорошую* прямую (т. е. не проходящую через точку пересечения двух отмеченных)? Два способа считаются *одинаковыми*, если один можно получить из другого, непрерывно двигая новую прямую так, чтобы она всё время оставалась *хорошей*. (*Фольклор*)
5. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y, что $P(x) = Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен R, что $P(x) = Q(R(x))$ при всех x. Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x? (*А. Я. Канель-Белов*)
6. *По мотивам задачи М. Патерсон и Д. Стинсона* [1].
   а) По кругу стоят n мудрецов, у каждого на голове шапка одного из k цветов. Каждый мудрец видит всех оставшихся. Мудрецы по порядку (по часовой стрелке) говорят либо «пас», либо предполагаемое название цвета своей шапки (в зависимости от того, что они видят и сколько кругов прошло). Все распределения цветов равновероятны. Мудрецы могут заранее согласовать свои ответы. Их цель — чтобы первый, назвавший свой цвет, не ошибся. Какую максимальную вероятность этого они могут обеспечить? (*И. В. Митрофанов*)
   б) Король решил казнить n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (так, чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут шляпу белого или чёрного цвета. Каждый мудрец будет видеть шляпы всех впереди стоящих. У каждого мудреца по очереди (от последнего к первому) спросят цвет его шляпы, и если он угадает, то его помилуют

(но уже по окончании опроса). Мудрецам разрешили договориться заранее, но оказалось, что k из них безумны (а кто — неизвестно). Безумный мудрец называет случайный цвет вне зависимости от договорённостей. Какое максимальное количество мудрецов может гарантированно спастись? (*М. Фадин*)

7. Радиус озера n м. Барон Мюнхгаузен имеет большой запас дощечек длины 1 м каждая и утверждает, что с помощью этих дощечек он может добраться до середины озера. Дощечка считается отрезком, и класть её можно так, чтобы каждый конец был на берегу или на другой дощечке.
а) Не хвастает ли барон?
б) Докажите, что для некоторой константы $C > 0$ при всех достаточно больших n ему не хватит Cn^3 дощечек. (*А. Я. Канель-Белов*)

8. (Задача на исследование.) Дано N-элементное множество M, $N \to \infty$, и случайное отображение $f\colon M \to M$.
а) Каково наиболее вероятное число элементов у множества $f(M)$?
б) Оцените n при условии $f^{(n)}(M) = f^{n+1}(M)$.
в) Оцените мощность множества $S = f^{(n)}(M)$.
г) Пусть ограничение f на S есть перестановка. Оцените число её циклов. Постарайтесь получить информацию о распределении описанных выше величин. (*Фольклор*)

9. В выпуклом многограннике M степень каждой вершины равна 5, а у всех граней, кроме, может быть, грани A, число сторон делится на 3. Докажите, что число сторон грани A тоже делится на 3. (*И. В. Митрофанов*)

10. Пусть A — матрица порядка n с комплексными коэффициентами, собственные значения которой по модулю не превосходят 1. Докажите, что
$$\|A^n\| \leqslant \frac{n}{\ln 2}\|A^{n-1}\|.$$
($\|B\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Bx\|$, где $x \in \mathbb{C}^n$.) (*Ф. В. Петров*)

11. Пусть $a, b > 0$, $M = (a+b)/2$, $G = \sqrt{ab}$. Докажите равенство
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+M^2)(x^2+G^2)}}.$$
(*К. Ф. Гаусс*)

12. а) Область между двумя параллельными прямыми раскрашена в 2 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета. (*Л. А. Емельянов*)

б) Область между двумя параллельными плоскостями раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(*А. Я. Канель-Белов, Д. Черкашин, В. Воронов*)

Уточнение условия

Условие задачи 20.4 (вып. 20, с. 250) было сформулировано неточно. Приводим точную формулировку.

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка* k, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство

$$b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0.$$

Пусть $b_0 = 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий не менее 2016 различных простых делителей, либо $a_n = c_n d^n$ для некоторой периодической последовательности целых чисел $\{c_n\}$ и некоторого целого d.

Дополнение к задаче 6.9

В далёком 1978 году на отборочный тур к Всесоюзной олимпиаде школьников Г. А. Гальпериным была предложена замечательная

Задача. Прожектор освещает угол $2\pi/n$. Дано n точек, в каждой стоит по прожектору. Докажите, что прожекторы можно развернуть так, чтобы они осветили всю плоскость.

В. М. Гальперин (тогда десятикласник) придумал очень красивое решение этой задачи. Позже он вместе с автором задачи написал статью [2].

Эту задачу в дальнейшем обобщил В. В. Произволов, и это обобщение было опубликовано в нашем сборнике (сер. 3, вып. 6, с. 134):

Задача 6.9. Дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники

а) не перекрывались;

б) покрывали внутренность многоугольника. (*В. В. Произволов*)

Если отправить точки на бесконечность, то как раз получается задача о прожекторах.

Решению обобщённой задачи были посвящены статьи [3, 4]. Очень красивое топологическое решение придумал Р. М. Карасёв. Развитию этой темы посвящена его статья [5] в настоящем сборнике.

Задача В. В. Произволова имеет обобщение и для неевклидовой плоскости — если расположить вершины многоугольника на абсолюте и рассмотреть модель Кэли — Клейна. В то же время Г. А. Гальперину принадлежит принципиально другое обобщение этой задачи, которое и предлагается читателям:

Задача 6.9$'$. Прожектор освещает бесконечный угол величиной в 1 градус. Разрешается располагать произвольным образом любое конечное количество прожекторов на плоскости так, чтобы они осветили целиком всю плоскость. Какое наименьшее число прожекторов потребуется, если это

а) евклидова плоскость;

б) плоскость Лобачевского? (*Г. А. Гальперин*)

Список литературы

[1] *Paterson M. B., Stinson D. R.* Yet another hat game // Electron. J. Combin. 2010. V. 17, № 1. P. 1–12.

[2] *Гальперин В., Гальперин Г.* Освещение плоскости прожекторами // Квант. 1981. № 11. С. 28–30.

[3] *Петров Ф. В., Рукшин С. Е.* Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 222–228.

[4] *Гальперин Г. А.* Геометрическое решение проблемы В. В. Произволова // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 229–236.

[5] *Карасёв Р. Н.* О разбиениях многогранника на выпуклые части // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 224–234.