Гиперболические многочлены и конусы Гординга

Н. В. Филимоненкова, П. А. Бакусов

В статье представлен краткий обзор теории гиперболических многочленов, созданной шведским математиком Ларсом Гордингом в середине XX века. Кратко описано происхождение этой теории. Приведены основные факты о гиперболических многочленах и связанных с ними конусах Гординга, указаны типичные примеры и области приложения, в особенности та роль, которую они сыграли в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 1. Введение

Изучение алгебраических многочленов имеет древнюю историю, в частности изучение распределения корней многочлена, количества вещественных корней. Гиперболический многочлен — это современное наименование многочленов, у которых все корни вещественные.

Определение 1.1. Многочлен одной переменной $p(t)$ называется гиперболическим, если он имеет только вещественные корни.

Для многочлена нескольких переменных вещественность его корней можно описать путём сведения к многочлену одной переменной. Например, для однородных многочленов это делается следующим образом.

Определение 1.2. Однородный многочлен нескольких переменных $P(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется a-гиперболическим или гиперболическим в направлении вектора $a \in \mathbb{R}^n$, если $P(a) \neq 0$ и многочлен одной переменной $p(t) = P(at + x)$ имеет только вещественные корни для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 15–01–07650 а, № 15–31–20600 мол-а-вед.

Употребление эпитета «гиперболический» в приложении к многочленам становится понятно после выяснения первоисточника определения 1.2. По всей видимости, уже после того как было создано понятие a-гиперболического многочлена нескольких переменных, этот эпитет распространился и на многочлены одной переменной, у которых все корни вещественные.

Понятие a-гиперболического многочлена нескольких переменных восходит к шведскому математику Ларсу Гордингу (Lars Gårding, 1919–2014), который заимствовал некоторые идеи из работ И. Г. Петровского (к примеру, Гординг нередко ссылается на статью Петровского [8]). Корни этого понятия принадлежат теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных (LPDE — linear partial differential equations), а точнее теории гиперболических уравнений порядка m. Гиперболические уравнения высшего порядка определяются путём выделения одного из ключевых свойств гиперболических уравнений второго порядка и обобщения его на случай $m > 2$. Одним из таких ключевых свойств является устойчивость решения задачи Коши (непрерывная зависимость решения от начальных данных). В работе [19] Гординг показал, как это свойство можно выразить в терминах характеристического многочлена (символа) дифференциального оператора. Для этого он ввёл понятие a-гиперболического многочлена и доказал, что решение задачи Коши в n-мерном полупространстве, ограниченном гиперплоскостью $\{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, a) = 0\}$, устойчиво тогда и только тогда, когда характеристический многочлен оператора является a-гиперболическим. Далее этот критерий удалось свести к исследованию главной части оператора, т. е. к однородному многочлену. Генезис понятия гиперболического многочлена и его связь с понятием устойчивости подробно описаны в статье [35].

Поскольку самым знаменитым представителем гиперболических операторов является волновой оператор

$$F[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

то прародителем всех a-гиперболических многочленов можно считать его символ:

$$P(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_n^2.$$

В 1959 году Гординг написал небольшую статью [18], в которой исследовал a-гиперболические многочлены с алгебраической точки зрения, независимо от теории гиперболических LPDE, и вывел ряд фундаментальных фактов. Статья [18] не вызвала немедленного резонанса: она казалась скромной как по объёму (всего десять страниц), так и по значению описанных в ней результатов. Долгое время теория a-гиперболических многочленов распространялась в сравнительно небольшом кругу математиков (см. [11, 15, 23, 31, 34, 38]) и рассматривалась в контексте гиперболических LPDE.

Так продолжалось до тех пор, пока теория Гординга не обрела неожиданные приложения в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (FNPDE — fully nonlinear partial differential equations). В первую очередь следует назвать фундаментальную работу [14] 1985 года, авторы которой L. Caffarelly, L. Nirenberg, J. Spruck впервые в математической литературе упоминают статью Гординга [18] в связи с описанием корректного множества разрешимости уравнений типа Монжа — Ампера.

В начале XXI века к работе Гординга [18] пришло наконец заслуженное признание, и в настоящее время теория a-гиперболических многочленов и связанных с ними конусов Гординга востребована сразу в нескольких областях математики.

Во-первых, это уже названная современная теория FNPDE, о которой будет подробнее рассказано в § 5. После публикации [14] гиперболические многочлены и конусы Гординга стали генератором множества алгебро-геометрических понятий в нелинейной теории, которые нуждаются в постоянном пересмотре, уточнении, систематизации. Исследованием этого фундамента занимаются F. R. Harvey, H. B. Lawson [22] и в большей степени Н. М. Ивочкина, Н. В. Филимоненкова [5, 26, 27].

Во-вторых, в конце 1990-х годов сформировалась новая ветвь линейного программирования, названная гиперболическим программированием (hyperbolic programming), основоположником которого считается O. Guler [12, 20, 37]. Задача оптимизации линейного функционала ставится для конуса Гординга.

В-третьих, есть работы, посвящённые алгебраическим свойствам a-гиперболических многочленов. В частности, исследуется возможность представления гиперболических многочленов разной степени в виде определителя (determinantal representability) [13, 30]. Эта ветка исследований смыкается с приложениями гиперболических многочленов в комбинаторике и дискретной теории вероятности. В этой области работают, например, P. Branden, R. Pemantle [35], L. Gurvits [21].

В-четвёртых, отдельное направление составляют работы, посвящённые гиперболическим многочленам одной переменной, хотя, разумеется, такие многочлены изучались задолго до того, как появилась теория Гординга. Этому направлению принадлежит работы таких математиков, как В. И. Арнольд [1], В. Костов [29], F. Rellich [36], A. Rainer и др. Исследуются распределение корней гиперболического многочлена, геометрия области гиперболических многочленов фиксированной степени, порядок гладкости корней многочлена в зависимости от возмущения его коэффициентов, критерии гиперболичности.

Надо заметить, что большинство работ, так или иначе связанных с a-гиперболическими многочленами, принадлежат зарубежным авторам. Насколько нам известно, в отечественной математике эту теорию активно использует только Н. М. Ивочкина, специалист по FNPDE, а также её ученики, к которым относятся и авторы данной статьи.

Таким образом, первой целью предлагаемой работы является популяризация теории a-гиперболических многочленов Гординга, знакомство с ней российских читателей. Второй целью работы является демонстрация «простых» задач этой теории, доступных даже студентам математических и технических специальностей. В конце концов, если не вдаваться в глубину приложений, то понятие a-гиперболического многочлена — это просто удобный способ исследования вещественности корней для многочлена нескольких переменных. Поэтому анализ его алгебраических свойств и построение примеров относятся к области элементарной математики, доступной широкой аудитории.

§ 2. Гиперболические многочлены одной переменной

В этом параграфе представляем читателю фрагмент классической истории изучения многочленов одной переменной, у которых все корни вещественные и которые позднее стали называться гиперболическими. Приводим обзор известных неравенств Ньютона и Маклорена, указываем историю их появления и возможность использования в разных формах.

Рассмотрим комплексный многочлен одной переменной

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}$$

степени n. Согласно определению 1.1 он называется гиперболическим, если имеет n вещественных корней. В этом случае

$$p(t) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (t - t_k), \quad t_k \in \mathbb{R},$$

а значит, $p(t)/a_0$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Поэтому, не умаляя общности, далее рассматриваем вещественные гиперболические многочлены.

Теорема 2.1. *Если $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}$ — гиперболический многочлен, то все его коэффициенты удовлетворяют неравенствам Ньютона*:

$$\frac{a_{k-1}}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{C_n^{k+1}} \leqslant \left(\frac{a_k}{C_n^k}\right)^2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{2.1}$$

Если первые m коэффициентов многочлена положительны, то эти коэффициенты удовлетворяют неравенствам Маклорена:

$$\frac{a_1}{C_n^1} \geqslant \left(\frac{a_2}{C_n^2}\right)^{1/2} \geqslant \left(\frac{a_3}{C_n^3}\right)^{1/3} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{a_{m-1}}{C_n^{m-1}}\right)^{1/(m-1)} \geqslant \left(\frac{a_m}{C_n^m}\right)^{1/m}. \tag{2.2}$$

Неравенства (2.1) получили своё название в честь Исаака Ньютона, поскольку они восходят к правилу определения числа «возможных» (вещественных) и «невозможных» (комплексных) корней многочлена, впервые изложенному в книге Ньютона [33]. После переложения на современный математический язык идей Ньютона получается, что по существу он утверждал следующее. Количество комплексных корней не меньше, чем число перемен знака в цепочке разностей

$$\left(\frac{a_k}{C_n^k}\right)^2 - \frac{a_{k-1}}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{C_n^{k+1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Если верить примечаниям к русскому переводу [7] книги [33], то остаётся неизвестным, как Ньютон открыл это правило, доказал же его много позже J. J. Sylvester. Неравенства Ньютона, которые являются частным случаем этого правила, имеют несколько методов доказательства. Наиболее простой метод содержится в четвёртой главе монографии G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya [10]: после «расщепления» переменной t на две переменные и дифференцирования многочлен степени n приводится к квадратному многочлену, вещественность корней которого обусловлена теоремой Ролля и равносильна неотрицательности дискриминанта. Воспроизведение этого доказательства представляется несложной учебной задачей. Ещё одной простой задачей является диагностика двух случаев, когда в цепочке (2.1) часть или все неравенства вырождаются в равенства. В математической литературе один из двух случаев часто бывает упущен.

Замечание 1. Неравенства (2.1) являются необходимым, но не достаточным условием гиперболичности многочлена. Действительно, можно построить многочлен любой степени, для коэффициентов которого выполнены неравенства Ньютона, но не все его корни вещественны. Например, $p(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 1$.

Неравенства (2.2) впервые получил C. MacLaurin в работе [32], где он использовал геометрический метод, основанный на делении отрезка и максимизации суммы произведений получившихся частей. При этом длины частей отрезка играли роли корней многочлена, а длина целого отрезка — их суммы, следовательно, метод Маклорена применим к многочленам с корнями одинакового знака. Возможно, именно поэтому до сей поры неравенства (2.2) принято связывать только с такими гиперболическими многочленами, у которых все корни отрицательны или, что то же самое, все коэффициенты положительны (в этом случае цепочка (2.2) содержит максимальное число неравенств).

Однако во второй главе книги [10] приведено чисто арифметическое доказательство неравенств Маклорена, основанное на неравенствах Ньютона: нужно рассмотреть первые несколько неравенств (2.1), возвести k-е неравенство в степень k, перемножить и сократить повторяющиеся множители. Для успешной реализации этого метода достаточно, чтобы первые несколько коэффициентов многочлена были положительны. Причём количество неравенств в цепочке (2.2) соответствует количеству положительных коэффициентов.

Неравенства Ньютона и Маклорена могут быть записаны в трёх разных формах за счёт следующей подстановки (см. ниже определение 2.2):

$$a_k = \sigma_k(\lambda) = \operatorname{tr}_k S. \tag{2.3}$$

Здесь $\sigma_k(\lambda)$ — элементарная симметрическая функция от вещественных переменных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$:

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_k}, \quad \sigma_0(\lambda) = 1.$$

Первое равенство в формуле (2.3) объясняется тем, что по любому вектору λ можно построить гиперболический многочлен $p(t) = \prod_{k=1}^{n}(t+\lambda_k)$ с корнями $-\lambda_k$ и коэффициентами $a_k = \sigma_k(\lambda)$ (теорема Виета). В частности, $a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, $a_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, и если все λ_k положительны, то крайние члены цепочки (2.2) дают известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}.$$

Поясним второе равенство в формуле (2.3). Обозначим символом $\operatorname{Sym}(n)$ пространство всех симметричных матриц размера $n \times n$.

Определение 2.2. Главный минор порядка m матрицы $S \in \operatorname{Sym}(n)$ — это определитель матрицы, которая составлена из элементов матрицы S, стоящих на пересечении каких-либо m строк и m столбцов (с одинаковыми номерами). Следом порядка k или просто k-следом матрицы S называется сумма всех главных миноров порядка k матрицы S. Обозначение: $\mathrm{tr}_k\, S$. По определению $\mathrm{tr}_0\, S = 1$.

Понятие k-следа включает два крайних случая: 1-след — это просто след матрицы, сумма элементов на главной диагонали, $\mathrm{tr}_1\, S = \mathrm{tr}\, S$, n-след — это определитель матрицы, $\mathrm{tr}_n\, S = \det S$. К примеру, 2-след матрицы размера 3×3 вычисляется следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{tr}_2\, S = \det \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Термин «след порядка k» для обозначения сумм главных миноров появился в конце XX века и впервые встречается в работах [3, 24].

Хорошо известно, что k-след обладает ортогональной инвариантностью, т. е. принимает одинаковые значения на матрицах S и $B^T SB$, где B — ортогональная матрица. Поэтому $\mathrm{tr}_k\, S = \sigma_k(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — набор собственных чисел симметричной матрицы S. Ввиду этого равенства в зарубежной математической литературе k-след часто определяют как элементарную симметрическую функцию от собственных чисел матрицы S (например, k-trace в [39]).

Таким образом, за счёт подстановки (2.3) неравенства Ньютона и Маклорена могут быть записаны как для коэффициентов гиперболического многочлена, так и для элементарных симметрических функций нескольких переменных или k-следов симметричной матрицы. Заметим, что чаще всего их записывают в терминах элементарных симметрических функций.

§ 3. Гиперболические многочлены нескольких переменных

Рассмотрим комплексный многочлен $P(x)$ степени m от нескольких переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Допустим, многочлен $P(x)$ является однородным, т. е. $P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Согласно определению 1.2 многочлен $P(x)$ называется a-гиперболическим, или гиперболическим в направлении вектора a, если $P(a) \neq 0$ и многочлен $p(t) = P(at + x)$ имеет m вещественных корней при любом $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $P(at + x) = P(a) \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)$, $t_k \in \mathbb{R}$, то $P(x)/P(a)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Не умаляя общности, можно рассматривать вещественные гиперболические многочлены.

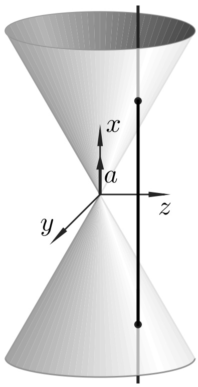


Рис. 1

С геометрической точки зрения, a-гиперболичность многочлена $P(x)$ значит, что любая прямая в пространстве $\mathbb{R}^n$ с направляющим вектором a пересекает гиперповерхность $P(x) = 0$ в m точках.

Приведём простейший пример. Однородный многочлен трёх переменных $P(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ является гиперболическим в направлении вектора $a = (1, 0, 0)$, поскольку любая прямая, параллельная оси x, пересекает поверхность $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ровно в двух точках (рис. 1).

Исходя из геометрического смысла можно сделать вывод, что если многочлен $P(x)$ является гиперболическим в направлении вектора a, то он является гиперболическим и в направлении любого вектора, пропорционального вектору a. В том числе многочлен остаётся гиперболическим, если поменять направление вектора a на противоположное. Но что будет, если незначительно изменить направление вектора a? Останется ли многочлен $P(x)$ гиперболическим в других направлениях, достаточно близких к вектору a?

Определение 3.1. Пусть $P(x)$ — a-гиперболический многочлен. Обозначим символом $K(P, a)$ наибольшее связное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащее вектор a и состоящее из векторов, в направлении которых многочлен $P(x)$ является гиперболическим. Множество $K(P, a)$ называется конусом гиперболичности или конусом Гординга, соответствующим вектору a.

Конструктивные описания и геометрические свойства конуса Гординга даёт следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $P(x)$ — некоторый a-гиперболический многочлен. Тогда верны следующие утверждения о конусе $K(P, a)$:*

1) *конус $K(P, a)$ совпадает с той компонентой связности множества $\mathbb{R}^n \setminus \{x\colon P(x) = 0\}$, которая содержит вектор a;*
2) *конус $K(P, a)$ состоит ровно из таких векторов x, для которых многочлен $p(t) = P(at + x)$ имеет только отрицательные корни (это значит, что все его коэффициенты положительны в случае $P(a) > 0$);*
3) *конус $K(P, a)$ выпуклый;*
4) *функция $P^{1/m}(x)$ вогнута в конусе $K(P, a)$, где $P(a) > 0$.*

Эти ключевые результаты были впервые доказаны в работах Гординга [18, 19], а также передоказаны во множестве последующих работ разных авторов.

Пункт 2 теоремы 3.2 обосновывает следующее наблюдение. Несмотря на то, что a-гиперболический многочлен является и $(-a)$-гиперболическим, вектор $-a$ не попадает в компоненту связности $K(P, a)$, поскольку многочлен $P(at - a) = (t - 1)^m P(a)$ имеет положительный корень. Значит, конус $K(P, a)$ является односторонним конусом с вершиной в нуле: если $x \in K(P, a)$, то $\lambda x \in K(P, a)$, $\lambda > 0$. Конус $K(P, a)$ сопровождается конусом $K(P, -a)$. В общей ситуации множество всех векторов, в направлении которых многочлен является гиперболическим, распадается на чётное число конусов Гординга.

Из пункта 1 теоремы 3.2 вытекает, что каждый конкретный конус Гординга для многочлена $P(x)$ является компонентой положительности или компонентой отрицательности $P(x)$. Удобнее работать с компонентой положительности, поэтому далее рассматриваем $K(P, a)$, где $P(a) > 0$.

Замечание 2. Рассмотрим разложение $P(at + x)$ по степеням t с коэффициентами, зависящими от a и от x:

$$P(at+x)=P(x)+P^a_{m-1}(x)t+P^a_{m-2}(x)t^2+\ldots+P^a_1(x)t^{m-1}+P(a)t^m. \quad (3.1)$$

Согласно пункту 2 теоремы 3.2 все коэффициенты этого многочлена положительны, если $x \in K(P, a)$, $P(a) > 0$. Отсюда нетрудно вывести, что многочлен $P(x)$ возрастает в конусе $K(P, a)$, а именно:

$$P(x + y) > P(x), \quad x \in K(P, a),\ y \in \overline{K}(P, a). \quad (3.2)$$

Поэтому конусы Гординга называют ещё конусами монотонности.

Замечание 3. Если многочлен $P(x)$ является a-гиперболическим, то каждый из коэффициентов $P^a_k(x)$ в разложении (3.1) тоже является a-гиперболическим многочленом. Это следует из равенства

$$P^a_k(at + x) = \frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}P(at + x)}{dt^{m-k}}$$

и того факта, что между корнями многочлена имеется корень его производной (теорема Ролля). При этом $K(P, a) \subset K(P^a_k, a)$.

§ 4. Примеры a-гиперболических многочленов и конусов Гординга

В этом параграфе исследуем конусы гиперболичности для конкретных однородных многочленов. Первые два примера обычно приводятся в статьях как тривиальные. Однако их разбор демонстрирует хорошие учебные «задачи с параметром», для решения которых требуются только элементарные арифметические навыки и базовые знания из аналитической геометрии. Третий и четвёртый примеры наиболее важны для теории полностью нелинейных уравнений в частных производных.

Пример 1. Рассмотрим произвольный однородный многочлен первой степени:

$$P(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n, \quad b_k \in \mathbb{R}.$$

Гиперплоскость $P(x) = 0$ имеет ровно одно пересечение с любой прямой, направляемой вектором a, в том и только в том случае, когда вектор a не лежит в этой гиперплоскости. Поэтому многочлен $P(x)$ является гиперболическим в направлении любого такого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, что $P(a) \neq 0$. Множество гиперболичности распадается на два конуса Гординга, на два полупространства.

Пример 2. Пусть имеется однородный многочлен второй степени:

$$P(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - \ldots - x_n^2. \tag{4.1}$$

Рассмотрим два случая: $k > 1$ и $k = 1$. Проведём графический анализ числа корней уравнения $P(at + x) = 0$. Для этого перенесём последние $n - k$ квадратов в правую часть этого уравнения, раскроем скобки, выделим полные квадраты в обеих частях уравнения и введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2},\\
&\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i}{\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} a_i x_i}{\alpha_2},\\
&\gamma_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} a_i^2},\\
&\gamma_2 = \frac{\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i x_i\right)^2}{\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Получим равенство:

$$(\alpha_1 t + \beta_1)^2 + \gamma_1 = (\alpha_2 t + \beta_2)^2 + \gamma_2. \tag{4.3}$$

Левая и правая части равенства (4.3) являются квадратичными функциями $y_1(t)$ и $y_2(t)$, графики которых — параболы. Ветви этих парабол направлены вверх, а вершина, по неравенству Коши — Буняковского, находится не ниже оси абсцисс. Предположим, что существует такой вектор a, в направлении которого многочлен $P(x)$ гиперболический. Это значит, что данный вектор a обеспечивает параболам y_1 и y_2 наличие двух точек пересечения для любого вектора x. Не умаляя общности, можно считать, что вектор a обладает свойством:

$$\alpha_1^2 > \alpha_2^2,$$

т. е. скорость роста функции y_1 больше, чем скорость y_2.

Построим вектор $x = (x_p, x_q)$ так, чтобы вектор $x_p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ был ортогонален вектору $a_p = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, а вектор $x_q = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ — вектору $a_q = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$. Тогда

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2, \quad \gamma_2 = \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2.$$

С геометрической точки зрения это означает, что вершины графиков функций y_1 и y_2 находятся друг над другом, причём абсцисса вершин равна нулю. Очевидно, что в случае $k > 1$ вектор x можно построить таким образом, чтобы параболы y_1 и y_2 не пересекались (рис. 2). Таким образом, пришли к противоречию с предположением об a-гиперболичности многочлена $P(x)$. Значит, не существует такого вектора a, в направлении которого многочлен $P(x)$ был бы гиперболическим.

Теперь рассмотрим многочлен (4.1) в случае $k = 1$. Получаем характеристический многочлен волнового оператора:

$$P(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_n^2.$$

Уравнение $P(at + x) = 0$ можно привести к виду:

$$(a_1 t + x_1)^2 = (\alpha_2 t + \beta_2)^2 + \gamma_2. \tag{4.4}$$

Здесь параметры $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ заданы формулами (4.2). Как и в равенстве (4.3), левая и правая части уравнения (4.4) представляют собой квадратичные

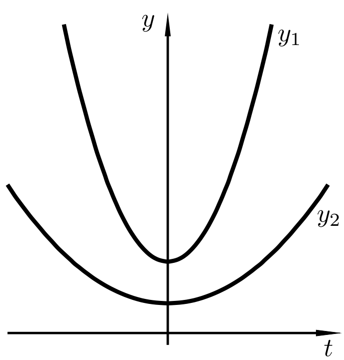


Рис. 2

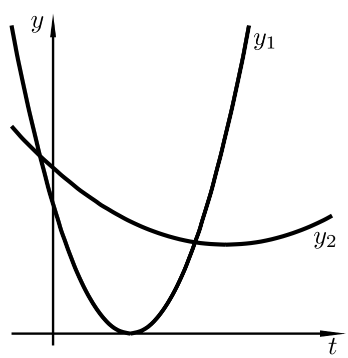


Рис. 3

функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, графики которых — параболы. Ветви этих парабол направлены вверх, однако вершина параболы y_1 расположена на оси абсцисс, а вершина y_2 находится не ниже этой оси. Несложно доказать, что для того чтобы параболы y_1 и y_2 имели две точки пересечения для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы скорость роста функции y_1 была больше, чем скорость y_2 (рис. 3), или, что то же самое:

$$a_1^2 > \alpha_2^2 = \sum_{i=2}^{n} a_i^2.$$

Таким образом, при $k = 1$ многочлен (4.1) гиперболический в направлении любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $P(a) > 0$. Множество таких векторов a образует две компоненты связности, т. е. два конуса Гординга.

Анализ, предпринятый здесь для многочлена (4.1), является на самом деле исчерпывающим для всех однородных многочленов второй степени, поскольку любая квадратичная форма может быть записана в каноническом виде (4.1) в подходящей системе координат. Заметим, что существуют и другие способы исследования многочлена (4.1) на гиперболичность.

Пример 3. Рассмотрим серию элементарных симметрических функций $\sigma_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$\sigma_m(x) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}.$$

Каждая функция $\sigma_m(x)$ является однородным многочленом степени m. Сначала обратимся к многочлену

$$\sigma_n(x) = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Он является гиперболическим в направлении любого такого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, что $\sigma_n(a) \neq 0$. Действительно, многочлен

$$\sigma_n(at + x) = \prod_{k=1}^{n} (a_k t + x_k)$$

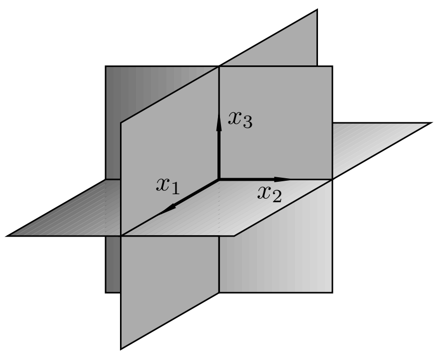


Рис. 4

имеет n вещественных корней $t = -x_k/a_k$ тогда и только тогда, когда все $a_k \neq 0$.

Множество гиперболичности этого многочлена распадается на 2^n конусов Гординга, ограниченных координатными плоскостями $x_k = 0$. В случае $n = 3$ имеем восемь координатных октантов (рис. 4).

Зафиксируем далее вектор $a = (1, 1, \ldots, 1)$, тогда

$$\sigma_n(at + x) = \sum_{m=0}^{n} \sigma_m(x) t^{n-m}.$$

Согласно замечанию 3 многочлены $\sigma_m(x)$, $m < n$, также являются гиперболическими в направлении данного вектора a. Из пункта 2 теоремы 3.2 и представления

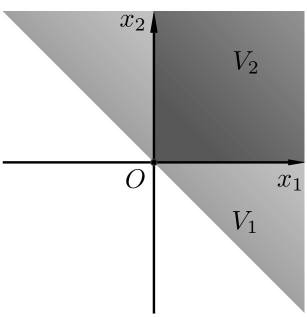
$$\sigma_m(at + x) = C_n^m \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k}{C_n^k} \sigma_k(x) t^{m-k}$$

следует, что конус Гординга для многочлена $\sigma_m(x)$, соответствующий вектору $a = (1, 1, \ldots, 1)$, состоит из таких векторов x, для которых первые m симметрических функций положительны. Обозначим такие конусы следующим образом:

$$V_m = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \sigma_k(x) > 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{4.5}$$

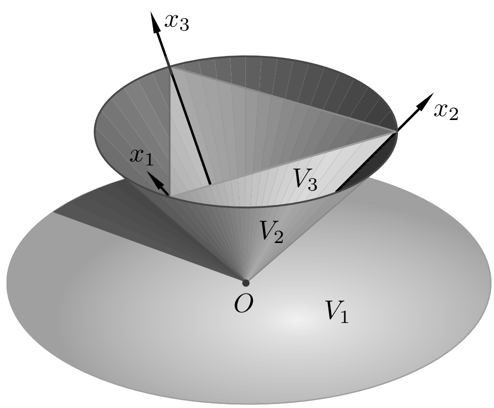
Очевидно, $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n$ и конус V_n состоит из всех векторов с положительными координатами. На рис. 5 изображены два таких конуса Гординга, соответствующих случаю $n = 2$ и многочленам $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$. На рис. 6 изображены три таких конуса Гординга, соответствующих случаю $n = 3$ и многочленам $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$. В этой ситуации конус V_1 — это полупространство, ограниченное плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, V_3 — первый координатный октант, V_2 — односторонний круговой конус, граница которого задана уравнением $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$.

Понятно, что каждому конусу V_m соответствует парный конус, порождённый вектором $-a = (-1, -1, \ldots, -1)$. Как показано выше, для много-



$n = 2$

Рис. 5



$n = 3$

Рис. 6

члена $\sigma_n(x)$ имеются и другие пары конусов Гординга, в случаях $m = 1$, $m = 2$ других конусов нет. При остальных значениях m вопрос о наличии других конусов Гординга остаётся открытым.

Пример 4. Рассмотрим серию однородных многочленов, построенных на основе m-следа симметричной матрицы (см. определение 2.2). Каждый такой многочлен $\mathrm{tr}_m X$, $1 \leqslant m \leqslant n$, зависит от $n(n+1)/2$ переменных, организованных в виде матрицы $X = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(n)$.

Сначала обратимся к многочлену $\mathrm{tr}_n X = \det X$. Очевидно, этот многочлен является гиперболическим в направлении единичной матрицы I, поскольку корнями уравнения $\det(It + X) = 0$ являются n собственных чисел симметричной матрицы X, взятых с обратным знаком. Согласно пункту 1 теоремы 3.2 вместе с единичной матрицей в конус Гординга этого многочлена попадают все положительно определённые матрицы. Аналогичные выводы верны и для матрицы $-I$. Таким образом, многочлен $\det X$ является гиперболическим в направлении любой положительно или отрицательно определённой матрицы A. Нетрудно показать, что эти два конуса Гординга исчерпывают всё множество гиперболичности данного многочлена, т. е. других конусов Гординга у многочлена нет.

Поскольку

$$\det(It + X) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{tr}_m X \cdot t^{n-m},$$

то согласно замечанию 3 многочлены $\mathrm{tr}_m X$, $m < n$, тоже являются I-гиперболическими, как и многочлен $\det X$. Из пункта 2 теоремы 3.2 и представления

$$\mathrm{tr}_m(It + X) = C_n^m \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k}{C_n^k} \mathrm{tr}_k X \cdot t^{m-k}$$

следует, что конус Гординга для многочлена $\mathrm{tr}_m X$, соответствующий единичной матрице, состоит из симметричных матриц X, у которых все следы порядка от 1 до m положительны. Обозначим такой конус следующим образом:

$$K_m = \{X \in \mathrm{Sym}(n) \colon\ \mathrm{tr}_k X > 0,\ k = 1, 2, \dots, m\}. \tag{4.6}$$

Определение 4.1. Матрица $X \in K_m$ называется m-положительной.

Конусы (4.6) впервые определила и исследовала Н. М. Ивочкина в работе [4]. Однако термин «m-положительная матрица» для наименования элементов из K_m введён совсем недавно тем же автором в работах [5, 27].

Остаётся открытым вопрос, имеет ли многочлен $\mathrm{tr}_m X$ в случае $2 < m < n$ другие конусы Гординга, кроме конуса m-положительных матриц и его «зеркальной» пары.

Для конусов (4.6) справедлива цепочка вложений $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n$. Причём K_n — это в точности конус положительно определённых матриц. Таким образом, понятие m-положительной матрицы является обобщением для положительно определённой матрицы.

Естественность такого обобщения подтверждается следующим. Для положительно определённых, или n-положительных, матриц широко известен критерий Сильвестра: матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все её главные угловые миноры положительны. Совсем недавно на основе неравенств Ньютона (2.1) доказан аналог критерия Сильвестра для m-положительных матриц (см. статьи [6, 9]):

Теорема 4.2. *Пусть $X \in \mathrm{Sym}(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \leqslant n$ — произвольный набор различных номеров. Для того чтобы матрица X была m-положительной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

$$\mathrm{tr}_m X > 0,\ \mathrm{tr}_{m-1} X^{\langle i_1 \rangle} > 0,\ \mathrm{tr}_{m-2} X^{\langle i_1, i_2 \rangle} > 0,\ \ldots,\ \mathrm{tr}_1 X^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \rangle} > 0.$$

В теореме 4.2 символом $X^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle}$ обозначена матрица, полученная из матрицы X вычёркиванием k строк и k столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Нельзя не заметить очевидного сходства между примерами 3 и 4. Действительно, многочлены $\mathrm{tr}_m X$, заданные на матрицах $X \in \mathrm{Sym}(n)$, являются аналогами многочленов $\sigma_m(x)$, заданных на векторах $x \in \mathbb{R}^n$. Это обусловлено равенством $\mathrm{tr}_m X = \sigma_m(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — набор собственных чисел матрицы X. Множества (4.5) и (4.6) являются конусами в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{Sym}(n)$ соответственно. Векторный конус V_m — аналог матричного конуса K_m.

Описанные примеры a-гиперболических многочленов являются классическими. Другие примеры и методы построения a-гиперболических многочленов можно найти в работах [22, 23].

§ 5. Приложение конусов Гординга в FNPDE

В этом параграфе описана роль конусов Гординга в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (FNPDE) второго порядка.

5.1. Эллиптичность, конус допустимых функций

Все дифференциальные операторы в этом параграфе рассматриваются в стандартном пространстве $C^2(\Omega)$, состоящем из дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, заданных в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Символом u_x обозначен вектор градиента. Символом u_{xx} обозначена матрица Гессе, т. е. симметричная матрица, составленная из вторых частных производных функции u. Дифференциальный оператор второго порядка $F[u] = F(u_{xx}, u_x, u)$ называют линейным, если он представляет собой линейную комбинацию функции u и её частных производных:

$$F[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) u_{x_k}(x) + a(x)u(x).$$

Линейный оператор F называют эллиптическим, если матрица (a_{ij}) положительно определена в области Ω. Это свойство гарантирует разрешимость соответствующей задачи Дирихле.

В настоящее время теория линейных операторов вполне изучена и главное внимание уделяют примерам отсутствия линейности. Нелинейные дифференциальные операторы $F[u] = F(u_{xx}, u_x, u)$ различают по силе, глубине нелинейности. Чем слабее нелинейность, тем ближе оператор к линейному и тем проще приспособить к нему результаты линейной теории. Самым тяжёлым случаем считается нелинейность оператора F относительно вторых производных функции u. Такие операторы называют полностью нелинейными (fully nonlinear).

Теория FNPDE начала активно развиваться в 80-х годах XX века, и поначалу в ней использовались модификации привычных понятий линейной теории. В частности, на полностью нелинейный оператор F было распространено понятие эллиптичности. Рассмотрим функциональную зависимость оператора F от элементов матрицы u_{xx} и обозначим символом $F_{ij}[u]$ частную производную F по элементу $u_{x_i x_j}$:

$$F_{ij}[u] = \frac{\partial F[u]}{\partial u_{x_i x_j}}. \tag{5.1}$$

Заметим, что для линейного оператора $F_{ij}[u] = a_{ij}(x)$, а для полностью нелинейного производные F_{ij}, вообще говоря, зависят от функции u. Полностью нелинейный оператор F называют эллиптическим на функции u, если матрица $(F_{ij}[u])$ положительно определена в области Ω.

Большинство полностью нелинейных операторов не являются тотально эллиптическими, т. е. сохраняют эллиптичность только на некотором подмножестве $\mathbb{E}(\Omega)$ пространства $C^2(\Omega)$. Казалось бы естественно рассматривать задачу Дирихле для нелинейного оператора $F[u]$ в области его эллиптичности $\mathbb{E}(\Omega)$. Однако выяснилось, что $\mathbb{E}(\Omega)$ не является корректным множеством разрешимости. Основные причины заключаются в следующем.

Во-первых, для полностью нелинейных уравнений (в отличие от линейных) эллиптичность оператора не гарантирует единственность решения.

Простой пример наличия двух решений задачи Дирихле, на каждом из которых оператор $F[u]$ эллиптический, приведён в статье [27].

Во-вторых, на разрешимость краевой задачи для FNPDE радикальным образом влияют геометрические свойства границы области Ω, это принципиально не локальная задача, что предъявляет повышенные требования к выбору подходящих функций u.

Таким образом, сам термин «эллиптический оператор», унаследованный из линейной теории, оказывается недостаточно эффективным в теории полностью нелинейных уравнений. В исследовании FNPDE на первый план выходит построение специального конуса $\mathbb{K}(\Omega) \subset \mathbb{E}(\Omega) \subset C^2(\Omega)$, обеспечивающего оператору F не только эллиптичность, но и согласование с геометрическими характеристиками $\partial\Omega$, и ряд других полезных свойств, необходимых для доказательства теорем разрешимости.

В фундаментальной работе [14] 1985 года, посвящённой Л. Гордингу, впервые замечено, что конусы $\mathbb{K}(\Omega)$ можно строить по образцу конусов Гординга. При этом функции из конуса $\mathbb{K}(\Omega)$ названы допустимыми. Опишем в общих чертах идею этого построения.

Пусть имеется однородный многочлен $P(X)$ степени m, заданный на матрицах $X=(x_{ij})\in\mathrm{Sym}(n)$. Предположим, многочлен $P(X)$ является I-гиперболическим, а соответствующий конус Гординга $K = K(P, I)$ является компонентой его положительности и при этом содержит все положительно определённые матрицы. Сопоставим многочлену оператор

$$F[u] = P(u_{xx}).$$

Назовём функцию $u \in C^2(\Omega)$ допустимой для этого оператора, если её матрица Гессе принадлежит конусу K в каждой точке области Ω. Обозначим конус допустимых функций символом $\mathbb{K}(\Omega)$.

Докажем эллиптичность нормированной версии оператора F в конусе $\mathbb{K}(\Omega)$. Введём обозначение

$$\mathcal{F}[u] = F^{1/m}[u].$$

Рассмотрим неотрицательно определённую матрицу $\xi \times \xi \in \overline{K}(P, I)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Используем монотонность (замечание 2) и вогнутость функции $P^{1/m}(X)$ в конусе Гординга (теорема 3.2) для вывода цепочки соотношений:

$$\mathcal{F}[u] < \mathcal{F}[u + \xi \times \xi] \leqslant \mathcal{F}[u] + \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{F}_{ij}[u]\xi_i\xi_j, \quad u \in \mathbb{K}(\Omega).$$

Отсюда следует, что матрица $(\mathcal{F}_{ij}[u])$ положительно определена, а поскольку

$$F_{ij}[u] = m\mathcal{F}^{m-1}[u]\mathcal{F}_{ij}[u],$$

матрица $(F_{ij}[u])$ тоже положительно определена. Оператор $F[u]$ эллиптический на любой допустимой функции u, что доказывает включение $\mathbb{K}(\Omega) \subset \mathbb{E}(\Omega)$ (обратное включение может быть неверно).

Далее продолжаем демонстрировать естественность выбора $\mathbb{K}(\Omega)$ на примере конкретного оператора, порождённого I-гиперболическим многочленом.

5.2. Конус m-допустимых функций для m-гессиановского оператора

В § 4 (пример 4) описана серия I-гиперболических многочленов $\operatorname{tr}_m X$ (m-след матрицы X), $1 \leqslant m \leqslant n$. Операторы

$$F_m[u] = \operatorname{tr}_m(u_{xx}) \tag{5.2}$$

называются m-гессиановскими, и так же называются соответствующие уравнения (в зарубежной литературе чаще встречаются под названием k-hessian equation). Класс операторов F_m соединяет классический линейный оператор с классическим представителем нелинейной теории. При $m = 1$ имеем оператор Лапласа:

$$F_1[u] = \operatorname{tr}_1(u_{xx}) = \Delta u.$$

При $m = 2, 3, \dots, n$ операторы F_m полностью нелинейные, причём в случае $m = n$ получаем оператор Монжа — Ампера:

$$F_n[u] = \operatorname{tr}_n(u_{xx}) = \det u_{xx}.$$

В программной статье [14] L. Caffarelly, L. Nirenberg и J. Spruck рассматривали m-гессиановские уравнения как эталонный пример общей теории FNPDE. Примерно с 1980-х годов m-гессиановскими уравнениями занимаются такие зарубежные учёные, как N. S. Trudinger, X.-J. Wang [28, 39], K. S. Chou, B. Guan. В российской математике в этом направлении работает только Н. М. Ивочкина и её ученики (см. серию работ Н. М. Ивочкиной, Н. В. Филимоненковой).

Рассмотрим задачу Дирихле для простейшего m-гессиановского уравнения с положительной правой частью:

$$F_m[u] = f > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{5.3}$$

Очевидно, что решение задачи (5.3) для 1-гессиановского уравнения (уравнения Пуассона) надо искать среди функций u, у которых матрица Гессе обладает в области Ω положительным 1-следом: $\operatorname{tr}_1(u_{xx}) = \triangle u > 0$. Как известно, задачу (5.3) для n-гессиановского уравнения (уравнения Монжа —

Ампера) целесообразно рассматривать на множестве строго выпуклых функций. Естественное множество разрешимости для задачи (5.3) при $1 < m < n$ впервые было построено Н. М. Ивочкиной в работе [4] 1983 года, причём ещё до её знакомства с теорией Гординга. Впоследствии оказалось, что построенный ею конус допустимых функций для оператора F_m есть не что иное, как функциональный аналог матричного конуса Гординга для многочлена $\operatorname{tr}_m X$. Напомним (см. § 4), что конус Гординга для многочлена $\operatorname{tr}_m X$, содержащий единичную матрицу, состоит из m-положительных матриц и обозначен символом K_m. При этом $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n$, где K_n — это конус всех положительно определённых матриц.

Определение 5.1. Функция u называется m-допустимой в области Ω, если матрица u_{xx} является m-положительной во всей этой области.

Конус m-положительных матриц (4.6) порождает конус m-допустимых функций:

$$\mathbb{K}_m(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega)\colon F_k[u](x) > 0,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ x \in \Omega\}.$$

Очевидна цепочка включений $\mathbb{K}_1(\Omega) \supset \mathbb{K}_2(\Omega) \supset \ldots \supset \mathbb{K}_n(\Omega)$, причём любая n-допустимая функция является строго выпуклой в традиционном смысле.

Опишем коротко идею исследования классической разрешимости задачи (5.3). В матричном конусе K_m известно много полезных алгебраических соотношений, список которых пополняется до сих пор. В частности, фирменной чертой K_m является справедливость неравенств Маклорена (2.2), записанных для k-следов с помощью подстановки (2.3). Это позволяет усилить эллиптичность оператора F_m до равномерной эллиптичности: оператор F_m является равномерно эллиптическим на каждом m-допустимом решении уравнения (5.3) при условии $f \geqslant \nu > 0$ в Ω и при наличии априорной оценки величины $\|u\|_{C^2(\Omega)}$. Кроме того, благодаря всё тем же неравенствам Маклорена и вогнутости функции $P^{1/m}(X)$ в конусе K_m, для уравнения (5.3) имеется аналог принципа максимума Александрова, который «вытесняет» C^2-оценки на границу области Ω. Для получения оценок на границе используются специальные барьеры. Их построение требует наличия у поверхности $\partial\Omega$ особых геометрических свойств, о которых будет сказано ниже. Затем по известным методикам, разработанным для равномерно эллиптических уравнений, априорную C^2-оценку можно поднять до такого класса гладкости, который соответствует гладкости данных задачи (5.3). Всё это в конечном счёте позволяет использовать метод непрерывности (продолжения по параметру) для доказательства следующей теоремы разрешимости:

Теорема 5.2. *Пусть* $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$, $f \geqslant \nu > 0$ *в* Ω, $l \geqslant 4$, $0 < \alpha < 1$. *Пусть, кроме того,*

$$\partial\Omega \text{ — строго } (m-1)\text{-выпуклая поверхность.} \tag{5.4}$$

Тогда существует единственное m*-допустимое решение* $u \in C^{l+\alpha}(\Omega)$ *задачи* (5.3).

Здесь символ $C^{l+\alpha}(\Omega)$ обозначает пространство функций, у которых производные порядка l непрерывны по Гёльдеру с показателем α. В частности, при $\alpha = 0$ пространство $C^{l+\alpha}(\Omega)$ состоит из l раз непрерывно дифференцируемых функций.

Наиболее полное доказательство теоремы 5.2 с построением априорных оценок в пространстве $C^2(\Omega)$ изложено в статье [16].

В теореме 5.2 первостепенную роль играет требование строгой $(m-1)$-выпуклости для поверхности $\partial\Omega$. Оно описывается при помощи сравнительно новой конструкции в дифференциальной геометрии, а именно: при помощи матрицы кривизны $\mathcal{K}[\Gamma]$, которая введена в работах Н. М. Ивочкиной как новый геометрический инвариант для произвольной C^2-гладкой гиперповерхности Γ. Не вдаваясь в детали определения матрицы кривизны, отметим только, что это симметричная матрица размера $(n-1)\times(n-1)$ и что это вполне вычислимая характеристика наподобие первой и второй квадратичных форм поверхности. Матрица $\mathcal{K}[\Gamma]$ может быть построена в явном виде в типичных случаях (см. [5, 6]).

Определение 5.3. Значения $\operatorname{tr}_k \mathcal{K}[\Gamma]$ (k-следы матрицы кривизны) называются k-кривизнами гиперповерхности Γ, $1 < k < n-1$. Гиперповерхность Γ называется строго p-выпуклой, если её матрица кривизны является в каждой точке p-положительной, т. е. $\mathcal{K}[\Gamma] \in K_p$.

Поскольку конус $K_{n-1} \subset \mathrm{Sym}(n-1)$, состоящий из $(n-1)$-положительных матриц, в точности совпадает с конусом положительно определённых матриц, $(n-1)$-выпуклая гиперповерхность является строго выпуклой в классическом смысле.

Известно, что собственные числа матрицы $\mathcal{K}[\Gamma]$ совпадают с главными кривизнами гиперповерхности Γ. Следовательно, k-кривизны есть не что иное, как элементарные симметрические функции от главных кривизн. В частности, $(n-1)$-кривизна — это гауссова кривизна гиперповерхности.

Для проверки p-выпуклости произвольной гиперповерхности Γ нужно удостовериться в положительности её k-кривизн, начиная с 1-кривизны и до p-кривизны включительно. Однако для замкнутой гиперповерхности достаточно, чтобы её p-кривизна была положительной. Поэтому условие (5.4) сводится к положительности $(m-1)$-кривизны $\partial\Omega$:

$$\operatorname{tr}_{m-1} \mathcal{K}[\partial\Omega] > 0. \tag{5.5}$$

При $m = n$ теорема 5.2 утверждает известный факт: разрешимость задачи Дирихле для уравнения Монжа — Ампера в области Ω, ограниченной гиперповерхностью с положительной гауссовой кривизной.

Естественность условия (5.4)–(5.5) при $m < n$ подтверждается тем, что поверхность уровня m-допустимой функции является строго $(m-1)$-выпуклой. Отсюда очевидно, что требование (5.4)–(5.5) необходимо для существования m-допустимого решения задачи Дирихле (5.3) с постоянным граничным условием. На самом деле в этой ситуации справедлива ещё более сильная «теорема несуществования» (см. [6]): даже если f и $\partial\Omega$ достаточно гладкие, но при этом $(m-1)$-кривизна поверхности $\partial\Omega$ вырождается хотя бы в одной точке, то задача (5.3) не имеет не только m-допустимых решений, но вообще не имеет C^2-гладких решений.

Всё это говорит о том, что исследовать задачу Дирихле для m-гессиановского уравнения целесообразно именно в конусе m-допустимых функций.

Замечание 4. В зарубежных публикациях по FNPDE, начиная с работы [14], закрепилась традиция определять m-гессиановские операторы и уравнения при помощи элементарных симметрических функций:

$$F_m[u] = \sigma_m(\lambda(u_{xx})), \tag{5.6}$$

где $\lambda(u_{xx}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — набор собственных чисел матрицы Гессе. В этом случае теория строится на основе a-гиперболических многочленов $\sigma_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a = (1, 1, \ldots, 1)$, и соответствующих конусов Гординга V_m (см. § 4, пример 3). Такой подход позволяет иметь дело с векторами вместо матриц. Это упрощает внешний вид некоторых формул и условий. Например, условие (5.4)–(5.5) преобразуется к виду:

$$\sigma_{m-1}(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) > 0,$$

где $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ — главные кривизны $\partial\Omega$. Однако техническая проверка данного условия и вообще любые конкретные вычисления при этом сильно затрудняются. Например, возникают проблемы с дифференцированием оператора $F_m[u]$ в области Ω. Поэтому форму записи (5.6) следует считать оправданной только исторически.

На примере этого краткого обзора m-гессиановских уравнений видно, каким образом конусы Гординга генерируют новые системы алгебро-геометрических понятий: распределение поверхностей по классам p-выпуклости согласовано с распределением функций по конусам m-допустимости, и оба порождены распределением симметричных матриц по конусам m-положительности. Подробное описание этих конструкций, основанных на теории Гординга, можно найти в работах [5, 6, 16, 17, 27].

В заключение отметим, что уравнение (5.3) является простейшим стационарным уравнением, порождённым I-гиперболическим многочленом $\mathrm{tr}_m X$. Помимо него изучаются эволюционные m-гессиановские уравнения, уравнения p-кривизны, уравнения, порождённые отношениями многочленов $\mathrm{tr}_m X$ разной степени, и т. д.

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, вып. 2. С. 52–53.

[2] *Ивочкина Н. М.* Интегральный метод барьерных функций и задача Дирихле для уравнений с операторами типа Монжа — Ампера // Матем. сб. 1980. Т. 112(154), № 2(6). С. 193–206.

[3] *Ивочкина Н. М.* Мини-обзор основных понятий в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (англ.) // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 249. С. 199–211.

[4] *Ивочкина Н. М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа — Ампера // Матем. сб. 1983. Т. 122(164), № 2(10). С. 265–275.

[5] *Ивочкина Н. М.* От конусов Гординга к p-выпуклым гиперповерхностям // Соврем. матем. Фунд. напр. 2012. Т. 45. С. 94–104.

[6] *Ивочкина Н. М., Филимоненкова Н. В.* О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений // Соврем. матем. Фунд. напр. 2015. Т. 58. С. 82–95.

[7] *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или Книга об арифметическом синтезе и анализе. М.: Изд. АН СССР, 1948.

[8] *Петровский И. Г.* О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений (англ.) // Матем. сб. 1945. Т. 17(59), № 3. С. 289–370.

[9] *Филимоненкова Н. В.* Критерий Сильвестра для m-положительных матриц // Препринт Санкт-Петербургского математического общества. 2014. № 7.

[10] *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

[11] *Atiyah M. F., Bott R., Gårding L.* Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I // Acta Math. 1970. V. 124. P. 109–189.

[12] *Bauschke H. H., Güler O., Lewis A. S., Sendov H. S.* Hyperbolic polynomials and convex analysis // Canad. J. Math. 2001. V. 53(3). P. 470–488.

[13] *Brändén P.* Obstructions to determinantal representability // Adv. Math. 2011. V. 226, № 2. P. 1202–1212.

[14] *Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. 1985. V. 155. P. 261–301.

[15] *Chaillou J.* Hyperbolic differential polynomials and their singular perturbations. Dordrecht — Boston — London: D. Reidel Publishing Company, 1979. (Mathematics and its applications; V. 3).

[16] *Filimonenkova N. V.* On the classical solvability of the Dirichlet problem for nondegenerate m-Hessian equations // J. Math. Sci. 2011. V. 178, № 6. P. 666–694.

[17] *Filimonenkova N. V., Ivochkina N. M.* On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations // J. Fixed Point Theory and Applications. 2014. V. 16, № 1–2. P. 11–25.

[18] *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 957–965.

[19] *Gårding L.* Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients // Acta Math. 1951. V. 85. P. 1–62.

[20] *Güler O.* Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming // Math. Oper. Res. 1997. V. 22, № 2. P. 350–377.

[21] *Gurvits L.* Combinatorial and algorithmic aspects of hyperbolic polynomials. Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report № 70, 2004.

[22] *Harvey F. R., Lawson H. B., Jr.* Gårding's theory of hyperbolic polynomials // Comm. Pure Appl. Math. 2013. V. 66, № 7. P. 1102–1128.

[23] *Hörmander L.* Linear partial differential operators. Springer-Verlag, 1963.

[24] *Ivochkina N. M.* On the Dirichlet problem for fully nonlinear parabolic equations // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1996. Т. 233 С. 101–111.

[25] *Ivochkina N. M.* Weakly first-order interior estimates and Hessian equations // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Т. 336 С. 55–66.

[26] *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations // Comm. Pure and Appl. Anal. 2013. V. 12, № 4. P. 1687–1703.

[27] *Ivochkina N. M., Prokof'eva S. I. Yakunina G. V.* The Gårding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations // J. Math. Sci. 2012. V. 184, № 3. P. 295–315.

[28] *Ivochkina N. M., Trudinger N., Wang X.-J.* The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations // Comm. Partial Diff. Equations. 2004. V. 29. P. 219–235.

[29] *Kostov V.* Topics on hyperbolic polynomials in one variable. Paris: Société Mathématique de France, 2011. (Panoramas et Synthèses; V. 33).

[30] *Kummer M., Plaumann D., Vinzant C.* Hyperbolic polynomials, interlacers and sums of squares. Preprint, 2013. arXiv:1212.6696.

[31] *Lax A.* On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. P. 135–169.

[32] *Maclaurin C.* A second letter to Martin Folkes, Esq: concerning the roots of equations, with the demonstration of other rules in algebra // Phil. Transactions. 1729. V. 36. P. 59–96.

[33] *Newton I.* Arithmetica universalis; sive De compositione et resolutione arithmetica liber. 1707.

[34] *Nuij W.* A note on hyperbolic polynomials // Math. Scand. 1968. V. 23. P. 69–72.

[35] *Pemantle R.* Hyperbolicity and stable polynomials in combinatorics and probability // Current Developments in Mathematics, 2011. Somerville, MA: Int. Press, 2012. P. 57–123.

[36] *Rellich F.* Perturbation theory of eigenvalue problems. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1969.

[37] *Renegar J.* Hyperbolic programs, and their derivative relaxations // Found. Comput. Math. 2006. V. 6, № 1. P. 59–79.

[38] *Svensson S. L.* Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part // Ark. fur Mat. 1969. V. 8. P. 145–162.

[39] *Wang X.-J.* The k-Hessian equation. Springer-Verlag, 2009. (Lecture Notes in Math.; V. 1977). P. 177–252.

Н. В. Филимоненкова, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

nf33@yandex.ru

П. А. Бакусов, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

bakusovpavel@gmail.com