

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

ВЫПУСК 18

Москва  
Издательство МЦНМО  
2014

УДК 51.009  
ББК 22.1  
М34

## Редакционная коллегия

Бугаенко О. В.	Дориченко С. А.	Розов Н. Х.
Винберг Э. Б.	Егоров А. А.	Сосинский А. Б.
Вялый М. Н.	Заславский А. А.	Тихомиров В. М.
Гайфуллин А. А.	Ильяшенко Ю. С.	Устинов А. В.
Гальперин Г. А.	Канель-Белов А. Я.	Френкин Б. Р.
Глейзер Г. Д.	Константинов Н. Н.	Яценко И. В.
Гусейн-Заде С. М.	Прасолов В. В.	

Главный редактор: Э. Б. Винберг

Адрес редакции:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 301

(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: [matpros@mccme.ru](mailto:matpros@mccme.ru) WEB-PAGE: [www.mccme.ru/free-books](http://www.mccme.ru/free-books)

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 18. —

М.: МЦНМО, 2014. — 272 с.

ISBN 978-5-4439-0144-2

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009

ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-0144-2

© МЦНМО, 2014.

# Содержание

## Математический мир

В. М. Тихомиров

*Из книги «Жизнь математика. Слово о друге,  
Владимире Михайловиче Алексееве» . . . . . 5*

## Современная математика для широкой аудитории

М. Б. Скопенков, А. А. Пахарев, А. В. Устинов

*Сквозь сеть сопротивлений . . . . . 33*

М. В. Игнатъев

*Квантовая комбинаторика . . . . . 66*

М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон

*Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений . . . . . 112*

## Наш семинар: математические сюжеты

С. Б. Гашков

*Неравенство Бернштейна, тождество Рисса и формула Эйлера  
для ряда обратных квадратов . . . . . 143*

Н. Н. Осипов

*Итерации квадратных радикалов и косинусы дуг,  
соизмеримых с окружностью . . . . . 172*

Г. А. Гальперин

*Бильярдные шары вычисляют  $\pi$  . . . . . 180*

Н. Н. Осипов

*Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах . . . . . 205*

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

*Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокера . . . . . 217*

## **Преподавание математики**

А. Я. Белов

*Научное творчество школьников: где миф и где реальность?* . . . . . 231

В. М. Тихомиров

*Комментарий к статье А. Я. Белова «Научное творчество школьников: где миф и где реальность?»* . . . . . 248

## **Нам пишут**

Ю. Бурда, Л. Кадец, А. Скопенков

*Письмо в редакцию* . . . . . 251

А. Б. Скопенков

*О доказательствах трансцендентности числа Малера* . . . . . 253

## **Задачник**

*Условия задач* . . . . . 255

*Решения задач из прошлых выпусков* . . . . . 259

---

---

# Математический мир

---

---

Из книги  
«Жизнь математика. Слово о друге,  
Владимире Михайловиче Алексееве»\*

В. М. Тихомиров

МЕХМАТ

Выступая в 1981 году на заседании Московского математического общества, посвящённом памяти Владимира Михайловича Алексеева, я сравнил мехмат с пушкинским лицеем. Мне кажется, что мехмат пятидесятишестидесятих годов можно сопоставить с лицеем пушкинского периода — по атмосфере высокого духовного и творческого подъёма. Такая атмосфера воспринималась и воспринимается большинством из тех, кто был её свидетелем, как особенный дар судьбы. Мехмат стал нашим «отечеством», каким для пушкинских друзей было Царское Село.

Уместно начать разговор о мехмате с самых истоков, со времени зарождения московской математической школы, столь неразрывно связанной с математическим отделением физико-математического (а затем — механико-математического) факультета Московского университета.

Феномен московской математической школы, а точнее — математической школы в Московском университете, школы Егорова — Лузина — потрясает. Эта школа возникла в 1914–16 годах. До той поры в Москве разрабатывалось лишь одно математическое направление, имевшее международное значение, — дифференциальная геометрия.

---

\* М.: МЦНМО, 2012.

А затем московское научное сообщество внезапно резко изменило область исследований и пошло по пути, намеченному молодыми в ту пору французскими математиками — Борелем, Бэром и Лебегом. В течение каких-то *семи лет* оно выдвинуло целую плеяду выдающихся исследователей, в числе которых были представители старшего поколения — И. И. Привалов и В. В. Степанов и совсем молодые П. С. Александров, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, И. Г. Петровский, М. Я. Суслин, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин, Л. Г. Шнирельман и другие. Каждый из названных учёных (кроме рано умершего Суслина) выбрал затем свой собственный путь, стал обретать своих учеников (достаточно назвать И. М. Гельфанда, А. И. Мальцева и С. М. Никольского — учеников А. Н. Колмогорова, а также Л. С. Понтрягина и А. Н. Тихонова — учеников П. С. Александрова) и к середине 1930-х годов (когда французская школа переживала смену поколений, а немецкая математическая школа была разгромлена гитлеризмом) московская математическая школа — школа одного университета — заняла лидирующее положение во всём математическом мире.

Как же объяснить этот беспрецедентный феномен? Тому были и глобальные, всемирные причины.

Февральская революция 1917 года была с воодушевлением воспринята многими представителями русской интеллигенции. Были отменены сословные привилегии, а также законы и установления, утверждавшие национальное и религиозное неравенство. К активной творческой деятельности были призваны огромные людские массы, не имевшие ранее возможности в ней участвовать. Надежды на то, что осуществляются идеалы свободы, равенства и справедливости, воодушевляли и склоняли к творчеству, в частности к научному творчеству. Этот энтузиазм, эта креативность, эта пассионарность сохранялись ещё долгое время и после Октябрьской революции.

Но была и поразительная, так сказать, «локальная» причина, связанная с творческой деятельностью одного лишь человека. Имя его Николай Николаевич Лузин. Его деятельность — прекрасная иллюстрация к теме о роли личности в истории.

Но сначала небольшое отступление в прошлое. К 1914 году в Москве работали в области математики несколько известных профессоров, среди которых прежде всего надо назвать Д. Ф. Егорова (1869–1931).

Дмитрий Фёдорович Егоров родился в 1869 году в Москве. Он закончил Московский университет в 1891 году. Егоров преподавал в Московском университете начиная с 1893 года, получил профессорское звание в 1903 году, был президентом Московского математического общества с 1923 по 1931 год. В 1931 году он был арестован и умер в тюремном госпитале в Казани.

Д. Ф. Егоров был глубоко верующим человеком и носителем исключительно высоких нравственных принципов. Даже в самых тяжёлых ситуациях он не кривил душой.

Егоров являл собой старый тип традиционного профессора. Он был точен во всём, строг, очень серьёзен и замкнут.

Николай Николаевич Лузин был человеком совсем другого склада.

Лузин родился в 1883 году в Томске. В гимназии математика была в числе наименее любимых им предметов. Родителям пришлось нанять репетитора. Им оказался студент университета, увлечённый математикой (Томск был университетским городом: университет в Томске был организован в 1888 году). Студенту-репетитору довелось совершить переворот в душе своего ученика. Впоследствии Лузин писал: «Он приоткрыл перед мной математику не как систему механических знаний, заучиваемых наизусть, а как науку, поражающую воображение». Лузин решил избрать математику своей профессией и поступил в Московский университет. «Блестательные лекции по чистой математике, — говорил он впоследствии, — оказали на меня огромное впечатление», — и математика представилась ему как наука, полная заманчивых тайн. Он стал учеником Д. Ф. Егорова.

В 1911 году Егоров доказал одну из самых фундаментальных теорем теории функций, в которой развивалось учение Лебега. Не привожу её формулировку, ибо она известна каждому математику. Егоров познакомил Лузина с азами теории функций действительного переменного, и тот вывел из теоремы Егорова фундаментальное  $\mathcal{C}$ -свойство измеримых функций.

По окончании университета Лузин был оставлен для подготовки к профессорскому званию, а затем Егоров направил его в заграничную командировку, сначала во Францию, а потом в Германию.

В 1905–06 и в 1912–14 годах Лузин посещает Париж, в 1910–12 годах он был в Гёттингене. В Париже Лузин слушал лекции выдающихся математиков — Пуанкаре, Адамара, Пикара, Дарбу и многих других. Он познакомился и имел плодотворные научные контакты с Борелем и особенно с Лебегом, к которому он испытывал чувства благоговейного восхищения на протяжении всей своей жизни.

Вернувшись в Москву, Лузин круто изменил стиль московской математической жизни. Он был «изобретателем» совершенно новых методов работы с молодёжью, которые складывались из ряда особенностей.

Во-первых, Лузин ставил перед своими студентами проблемы высочайшего уровня, перед которыми пасовали маститые мировые учёные, ставил их перед юношами, едва переступившими порог университета. Вот как описывает Павел Сергеевич Александров первую встречу со своим учителем.

«Я впервые встретился с ним, будучи студентом 2-го курса. Впечатление от этой встречи было, можно прямо это сказать, потрясающим, и я запомнил его на всю жизнь. Обратившись к нему после окончания лекции за советом, как мне заниматься математикой дальше, я был прежде всего поражён внимательностью и — не могу найти другого слова — уважением к собеседнику, как ни странно звучит это слово, когда речь идёт о беседе уже знаменитого, хотя и молодого ещё учёного с 18-летним студентом. Выслушав меня, Лузин посредством умело поставленных вопросов очень скоро разобрался в характере моих математических склонностей и сразу же в доступной мне форме обрисовал основные направления, которые он мог мне предложить для дальнейших занятий; очень осторожно он сам склонил меня к выбору одного из этих направлений и — как я могу теперь сказать — правильно».

Лузин поставил перед Александровым проблему континуума для борелевских множеств, которая интересовала самого Лебега и которую тщетно пытались решать такие крупные математики, как Юнг и Хаусдорф.

Аналогичным образом он поступал и с другими своими учениками. При этом он действительно возжигал в душах своих учеников творческий огонь.

Во-вторых, Лузин стал применять метод индивидуальных занятий. Однажды Андрей Николаевич Колмогоров решил задачу, обсуждавшуюся на семинарах Лузина. «Узнав об этом моем достижении, — пишет Андрей Николаевич, — Н. Н. Лузин с некоторой торжественностью пригласил меня в число своих учеников, и я стал еженедельно приходить к нему в часы, отведённые для одной из групп учеников». Колмогоров приходил к Лузину вместе с Л. В. Келдыш и Е. Холодковским, но каждый из них получал свою собственную задачу.

Наконец, Лузин содействовал тому, что математики объединились в единый сплочённый коллектив, увлечённый наукой. Ученики называли его «Лузитанией». Много позже, в годы войны, в письме Александрову Колмогоров выразился так: для лузитанцев было характерно «единое биение сердец».

Наш с В. М. Алексеевым общий учитель — Андрей Николаевич Колмогоров — многое перенял от Николая Николаевича Лузина. При этом надо добавить, что в пятидесятые годы на мехмате сложилась большая группа математиков, увлечённых наукой, соединённых также «единым биением сердец».

Когда Володя Алексеев стал студентом, на мехмате было восемь математических кафедр: высшей геометрии и топологии (заведующий кафедрой П. С. Александров), теории чисел (А. О. Гельфонд), дифференциальной геометрии (В. Ф. Каган), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров), алгебры (А. Г. Курош), теории функций и функционального анализа (Д. Е. Меньшов), дифференциальных уравнений (В. В. Степанов), математического анализа (А. Я. Хинчин) и истории математики (С. А. Яновская). Среди



профессоров, работавших в те годы на мехмате, были такие замечательные учёные, как Нина Карловна Бари, Израиль Моисеевич Гельфанд, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Лазарь Аронович Люстерник, Иван Георгиевич Петровский, Лев Семёнович Понтрягин, Пётр Константинович Рашевский, Сергей Львович Соболев, Сергей Павлович Фиников и другие. Трудно усомниться в том, что ни в одном университете мира не было такой концентрации столь крупных математиков.

Как это случилось и следует ли этого ожидать в будущем? В тридцатые годы в нашей стране утвердился тоталитарный режим. Социальные условия в СССР всюду, кроме основных центров, были тяжкими, и это привело к невиданной концентрации творческой интеллигенции в нескольких больших городах, особенно в Москве. Все названные мною учёные (и вообще крупнейшие деятели науки, культуры и инженерии) жили фактически в пределах Садового кольца, радиус которого равен примерно пяти километрам. В пределах этого «радиуса» жила доля интеллектуальной элиты всей страны, сопоставимая по численности с остальной её частью. Хотя явление такой концентрации интеллекта по-своему замечательно, причины, его породившие, чудовищны. Такое, конечно, не должно повториться нигде и никогда.

Но нам — студентам мехмата в пятидесятые годы — выпало счастье учиться на таком поразительном факультете. Число семинаров исчислялось десятками и иногда приближалось к сотне. И что это были за семинары!

Топологический кружок П. С. Александрова, ведший свою историю от той поры, когда П. С. Александров и П. С. Урысон создавали свою топологическую школу, семинар по теории функций Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова, родоначальником которого был сам Н. Н. Лузин, семинар по теории вероятностей А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, семинары В. В. Немыцкого и В. В. Степанова по обыкновенным уравнениям и И. Г. Петровского, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова по уравнениям с частными производными, семинар А. Г. Куроша по алгебре, М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата по комплексному анализу, семинар С. А. Яновской и А. П. Юшкевича по истории математики, наконец, быть может, самый замечательный семинар И. М. Гельфанда по всей математике — всё это семинары воистину всемирного значения.

А сколько было тогда спецкурсов и каких! Некоторые студенты умудрялись сдавать их около десятка, а рекорд, кажется, был установлен Михаилом Михайловичем Постниковым, который сдал четырнадцать спецкурсов!

Это были годы смены научных приоритетов, когда вдруг начала проявляться тяга к математической физике. Среди тех, кто был связан тогда «единым биением сердец» в области теории динамических систем и математической физики, с кем В. М. Алексеев имел глубокие научные контакты, назову Диму Аносова, Диму Арнольда, Алика Березина, Юлика



*Студенты Володя Алексеев и Володя Золотарёв проводят математическую олимпиаду для школьников*

Добрушина, Боба Минлоса, Серёжу Новикова, Яшу Синая, Алика Шварца (я назвал выше Дмитрия Викторовича Аносова, Владимира Игоревича Арнольда, Феликса Александровича Березина, Роланда Львовича Добрушина, Роберта Адольфовича Минлоса, Сергея Петровича Новикова, Якова Григорьевича Синая, Альберта Соломоновича Шварца так, как их все звали в пору их студенческих и аспирантских лет). Потом появились их многочисленные ученики. Убеждён, что большинство из них с благодарностью называют В. М. Алексеева в числе своих друзей или учителей. Мехмат одарил В. М. Алексеева счастьем творчества, любовью к своей профессии, радостью труда и человеческого общения.

Особые чувства восхищения и уважения Владимир Михайлович питал к своему учителю Андрею Николаевичу Колмогорову (об этом ещё многое будет сказано); он находился в близких дружеских отношениях со многими математиками старшего поколения. Иван Георгиевич Петровский очень дорожил мнением В. М. Алексеева. Владимир Михайлович отвечал ему чувством глубокой и почтительной любви.

Дружеские узы связывали Владимира Михайловича с профессорами мехмата и коллегами В. М. по кафедре математического анализа, где он на-

чинал свою педагогическую деятельность, в особенности со Львом Абрамовичем Тумаркиным и Михаилом Александровичем Крейнсом. Владимир Михайлович пользовался очень большой любовью математиков своего и более поздних поколений. Впоследствии он был всегда окружён прекрасной молодёжью.

Поступив на мехмат, Володя сразу же включился в студенческий конкурс по решению задач (к сожалению, такие конкурсы далее не проводились). Сохранилась грамота, в которой говорится, что она «Дана Алексею Владимирову Михайловичу, студенту 1 курса механико-математического факультета, получившему на конкурсе по решению задач 1950/51 уч. г. вторую премию. Председатель жюри конкурса акад. А. Н. Колмогоров». Первое место занял студент второго курса, который в те годы воспринимался как, быть может, самый способный, и не только на своём курсе. Но потом он как-то исчез из виду, не оставив заметного следа.

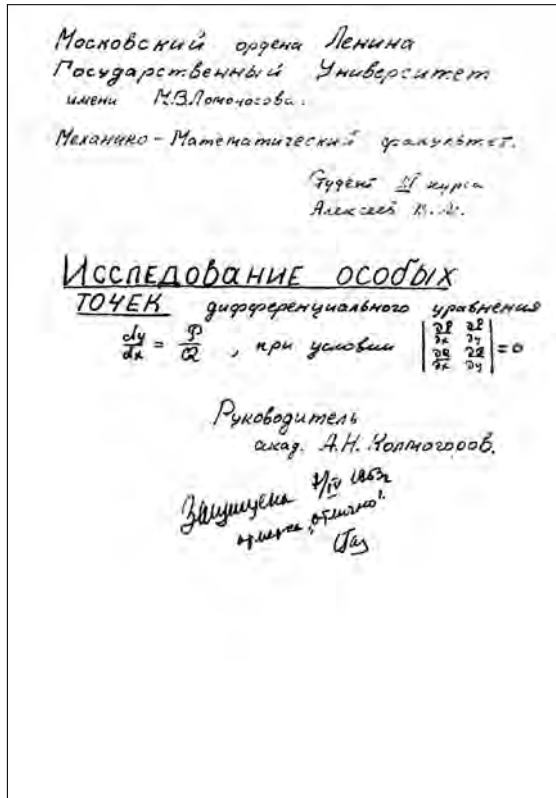
К числу особенностей характера Владимира Михайловича следует отнести его нелюбовь проигрывать. Когда он показывал мне как-то колмогоровскую грамоту, в голосе его слышалась досада: «вот, первого места не занял...».

Жажда первенства вообще характерна для математиков. Один из крупнейших математиков своего времени — Адамар учился в престижнейшем парижском Лусее Louis-le-Grand (в котором кто только ни учился: Бодлер, Борель, Сирано де Бержерак, Вольтер, Дега, Делакура, Галуа, Гюго, Лебег, Мольер, Робеспьер, маркиз де Сад...), и по окончании третьего класса Адамар принял участие в Concours Général — всефранцузском состязании, некоем аналоге наших Всесоюзных (ныне Всероссийских) олимпиад. Адамар стал по математике вторым. Он тяжело переживал свою неудачу. Колмогоров передавал слова Адамара, сказанные с глубоким огорчением девяностолетним старцем: «Я оказался вторым. Тот, первый, тоже сделался математиком. Но гораздо более слабым — он и всегда был слабее». (Этот эпизод рассказан в статье Арнольда о Колмогорове, см. «Колмогоров в воспоминаниях». М.: Наука, 1993, с. 170.) Вот и Володя был огорчён, что занял лишь второе место на мехматском студенческом конкурсе.

Володя с самого первого курса становится руководителем школьных кружков, один из которых он вёл с будущим многолетним деканом мехмата, своим сокурсником Олегом Лупановым. Работа со школьниками и студентами продолжалась до последних дней его жизни.

Со второго курса начинается научная работа В. М. Алексеева, которой он стал заниматься в семинарах А. Н. Колмогорова, хотя «приписан» был к кафедре дифференциальных уравнений.

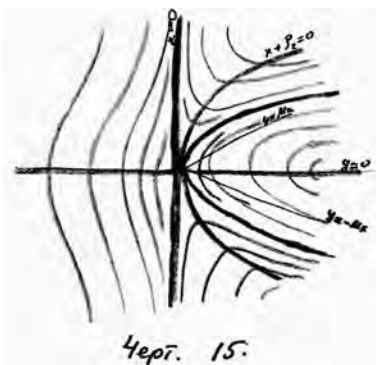
В архиве В. М. Алексеева сохранилась его курсовая работа за третий курс. Я воспроизвожу здесь факсимиле титульного листа (стр. 12). Надпись



Титульный лист курсовой работы за 3-й курс

на титульном листе «Защищена 7/IV 1953 г.» и т. д. выполнена рукой Самария Александровича Гальперна.

В работе 23 страницы и 27 чертежей, любовно отрисованных карандашами трёх цветов. Образец такого чертежа — «Черт. 15», по необходимости в чёрно-белом варианте, я также позволю себе здесь воспроизвести. Это полноценная научная работа, выполненная на высоком профессиональном уровне.



Здесь, пожалуй, уместно сделать первое отступление об Андрее Николаевиче Колмогорове.

1953 год можно назвать «годом великого перелома» в творческой судьбе Колмогорова. Предшествующее десятилетие, с 1943 по 1952 годы, не было столь творчески на-

сыщенным, как предыдущие два (с 1923 по 1942 годы; здесь не место анализировать причины этого). Но с 1953 года начался период его необычайного творческого взлёта, продолжавшегося примерно десять лет. Это оказало определяющее влияние на судьбу Владимира Михайловича Алексеева уже в том же 1953 году, когда Колмогоров поставил перед Алексеевым новую проблему. Но его курсовая работа третьего курса была связана с «остаточными явлениями» предшествующего периода творческих поисков Андрея Николаевича.

В течение нескольких лет Андрей Николаевич много работал над постановкой на механико-математическом факультете математического практикума. Этот практикум активно просуществовал лет семь, а потом постепенно сошёл на нет. (Материалы практикума недавно были обнаружены в бумагах Колмогорова, и если они будут опубликованы, можно будет получить впечатление о глубине замысла их создателя.)

Андрей Николаевич брал темы для практикума из «горячих точек» теоретической и прикладной математики того времени. Это были предельные циклы и особенности решений дифференциальных уравнений (несомненно, навеянные интересом И. Г. Петровского к этим проблемам), уравнения с малым параметром (тогда публиковались работы на эту тему И. С. Градштейна, А. А. Дородницына, А. Н. Тихонова и других), методы сеток решения уравнений с частными производными — эта тема была необычайно актуальна в те времена (в частности, благодаря работам по атомной проблематике), затрагивались также проблемы теории аппроксимации, статистики и многое другое.

На младших курсах некоторым сильным студентам Андрей Николаевич давал курсовые, так или иначе связанные с практикумом, и нередко случалось, что в этих работах студентами второго и третьего курсов бывали получены результаты, находившиеся на передовых рубежах науки, значительно развивавшие, а то и исправлявшие работы мэтров математики.

Среди тех, кто поступил на мехмат в 1950 году и учился на отделении математики, выделялись два студента: Володя Алексеев и Коля Бахвалов — впоследствии академик РАН Николай Сергеевич Бахвалов (1934–2005). (Кого ни спросить из сокурсников, кто запомнился на курсе, почти без исключения все начинали так: «Володя Алексеев, Коля Бахвалов, ...» Таких студентов я называю *лидерами своих курсов*.) Оба они — и Володя, и Коля — писали на третьем курсе работы у Андрея Николаевича. Одна работа — Алексеева — была посвящена особым точкам дифференциальных уравнений в вырожденном случае (и должна была дополнить многие исследования, в частности работу И. Г. Петровского на эту тему), другая — Бахвалова — была посвящена численным методам. Возможно, что одной

из своих целей на будущее Колмогоров ставил задачу реформирования численного анализа. Но именно тогда, весной 1953 года, к Колмогорову пришли в изобилии новые увлечения: суперпозиции, теория информации,  $\varepsilon$ -энтропия, классическая механика и многое другое, и это привело к тому, что он отказался от своего замысла, касающегося численного анализа. Андрей Николаевич прямо сказал об этом Бахвалову и посоветовал (если тот хочет продолжать исследования по прикладному анализу) выбрать себе нового научного руководителя, указав при этом на Сергея Львовича Соболева как на возможного кандидата. И Бахвалов действительно стал учеником Сергея Львовича.

Чуть позже, уже в аспирантские годы и ранние годы работы на мехмате, Николай Сергеевич вместе с Николаем Николаевичем Ченцовым присоединился к семинару Николая Михайловича Коробова (и тем самым образовался знаменитый семинар «трёх Коль»). Этот семинар был посвящён численным методам. На этом семинаре очень чувствовалось влияние Колмогорова. В частности, многие начальные работы Бахвалова были выполнены под прямым воздействием Андрея Николаевича.

Курсовая работа студента III курса В. М. Алексева, несомненно, представляла научный интерес. Свидетельством тому служит и то, что некоторое время спустя, когда он был уже преподавателем мехмата, Владимир Михайлович дал напечатать эту работу на машинке и при этом тщательно выполнил многочисленные чертежи. По-видимому, работа готовилась им к печати. Мне представляется, что дело чести учеников Владимира Михайловича — окончательно подготовить эту работу к печати. Она посвящена исследованию особых точек дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}},$$

где  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  — многочлены второго порядка, при условии что отображение  $(x, y) \rightarrow (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  вырожденно.

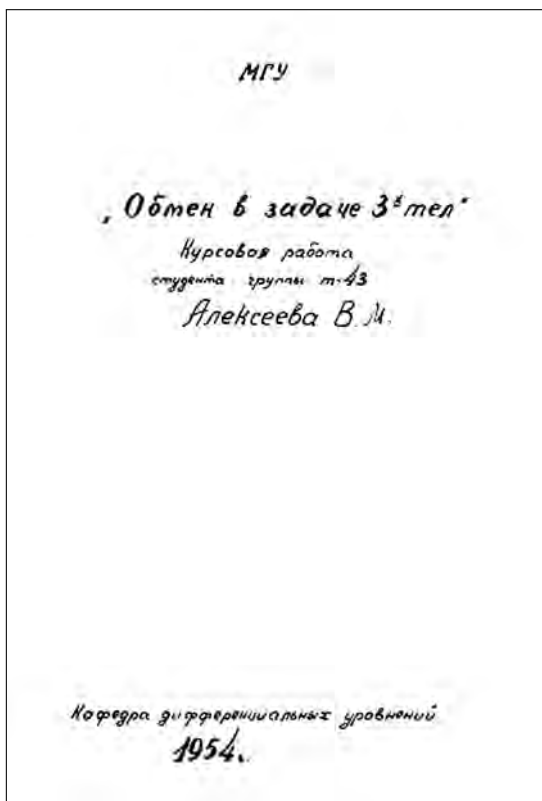
Решающее событие в научной биографии Алексева произошло в том же 1953 году: он обрёл тему всей своей жизни.

Сохранилась его курсовая работа и за четвёртый курс. Титульный лист (стр. 15) снова выполнен от руки (не Володиной, но об этом чуть позже).

Не обойтись без отступлений.

### **Отступление первое. Что это за группа m-43?**

Мне затруднительно быть документально точным, многое в моих суждениях построено на предположениях.



Титульный лист курсовой работы за 4-й курс

Начиная с некоторых пор (незадолго до того, как Володя Алексеев стал студентом мехмата) на мехмате образовалось некое таинственное специальное отделение. Секретное отделение, которое курировали Органы. Это отделение возглавлял человек с запоминающейся фамилией — Пандопуло. Там обучали студентов, которым в будущем предстояло заниматься всякого рода секретными разработками. Математиков готовили в шифровальщики.

Вспоминаю. 1987 год, лето. Я впервые в Париже. Андрею Николаевичу Колмогорову оставалось жить лишь три месяца, но он дал мне множество советов, касающихся Франции и Парижа в особенности. И вот я медленно прогуливаюсь с моим новым знакомым, американцем, тоже математиком, по вечернему Парижу. Слева и справа от нас неисчислимые бары, кафешки с крутящимися грилями, рестораны, сидящие одиночки, пары, группы с бокалами и дымящимися вкусами. Отовсюду слышится музыка...

Мы математики, и первое, что приходит в голову спросить — откуда родом ты? кто твой учитель, твой «супервайзер»? И выясняется вдруг, что супервайзером моего собеседника является не кто иной, как Стоун, Маршал Стоун —

математик, чья звезда взошла в середине тридцатых годов. И как взошла! Его труды оплодотворили творчество и Колмогорова, и Гельфанда, и Александрова, и Тихонова и ещё, и ещё. Кто не знает знаменитейшую теорему Стоуна — Вейерштрасса, бикompактное расширение Стоуна — Чеха, теорему Стоуна о полугруппах операторов и вообще его вклад в теорию операторов? Выясняется, что Стоун жив, в полном здравии. «А сколько ему лет?» И тут оказывается, что он полный ровесник Андрея Николаевича, оба родились в апреле 1903 года! Пережив восхищение от неожиданной информации, я задал вопрос: «Почему в последние годы о Стоуне ничего не слышно? Что с ним случилось?» И тут выясняется, что он *возглавил секретные работы по кодированию*, блестяще с этим справился, но практически прекратил открытые научные исследования.

... Два десятилетия нашей истории — от начала тридцатых годов до марта 1953 года — период неслыханной, неправдоподобной, невероятной концентрации власти в руках одного человека (как это произошло и какие имело последствия, не будем здесь обсуждать). Служба шифрования и дешифрования у нас была создана, судя по всему, где-то в конце тридцатых годов. Быть может, наши секретные агенты в Англии и США узнали о такой службе в этих странах. Особую роль там играли математики: в Америке Стоун, в Англии — Тьюринг. И когда (в этом состоит моё предположение) об этом доложили Сталину, он согласился с мнением или высказал его сам, что кадры шифровщиков и дешифровщиков надо выбирать из *математиков*.

В сороковые годы возникла потребность в расширении числа тех, кто должен разрабатывать теорию и практику кодирования. И было решено использовать мехмат. Так образовались не такие группы, как скажем, группа 1-07, в которой я начал учиться на мехмате, а что-то таинственное, вроде m-43.

Для того чтобы попасть в спецгруппу, нужна была чистая анкета. Сначала анкеты были просто страшные, из многих страниц, и нужно было указывать, в частности, где расположены могилы родителей и дедушек с бабушками. Потом всё несколько ослаблялось, но тех, у кого в паспорте в графе «национальность» стояло слово «еврей», среди учащихся в спецгруппах не было.

После окончания второго курса Володя был принят в специальную группу.

Впервые мне довелось разговаривать с Володиёй осенью 1953 года. Тогда состоялась свадьба Миши Лидова и Дианы Седых. Миша был моим соседом по квартире и близким другом, несмотря на разницу в возрасте (он родился в 1926 году). Его судьба была необычной (о ней я написал в очерке, опубликованном в «Историко-математических исследованиях» (Вторая серия, выпуск 12 (47), 2007)). Миша поступил на мехмат после армии, сначала на заочное отделение, а в 1952 году после демобилизации перевёлся на очное. Впоследствии он сыграл выдающуюся роль в наших космических исследованиях. Дианка (так я зову её всю жизнь) училась на Володином курсе. Свадьбу справляли в Мишкиной комнате в нашей квартире.





*В. М. Алексеев —  
студент одного из старших курсов МГУ*

Было тесно, но как-то разместились. Я оказался рядом с Володей. Пили в охотку (не все смогли подняться из-за стола по окончании пирушки, кое-кого, как говорится, без сознания, пришлось транспортировать в мою комнату — не оставлять же на полу у брачного ложа). Не уверен, что в другой обстановке Володя говорил бы со мной так откровенно. А тогда он поведал мне с некоторым ужасом о том, что он оказался в специальной группе и тем самым был лишён свободы выбора. Тогда ему казалось, что обратного хода нет. (К счастью, это оказалось неверным — усилиями Колмогорова и Петровского он был вызволен из секретных организаций.)

Таково первое отступление.

### **Отступление второе. Что это за «Обмен в задаче трёх тел»?**

История вопроса весьма интересна и вполне детективна, и нам хочется сохранить неопределённость развития сюжета, рассказывая его от начала (когда задача была поставлена Алексею Колмогоровым) и до конца, когда

задача была полностью решена, и основным «решателем» этой проблемы оказался В. М. Алексеев.

Курсовая работа 1954 года начинается со слов: «Под задачей трёх тел мы понимаем задачу определения поведения трёх тел, взаимодействующих друг с другом по закону Ньютона. В настоящей работе нас будет интересовать не определение траекторий этих тел, а характер поведения расстояний между телами при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ . Описанная задача кратко называется проблемой „финальных движений в задаче трёх тел“». В своих более поздних работах В. М. Алексеев пишет, что «как с математической, так и с космогонической точки зрения весьма интересно описать возможные типы *эволюции* системы, т. е. дать ответ на вопрос, в каких комбинациях могут сочетаться типы поведения при  $t \rightarrow \pm\infty$ », и ещё: «Давний и стойкий интерес, который проявляют к этим вопросам как специалисты, так и неспециалисты, вполне объясним. Здесь затрагиваются проблемы, возникающие в области, где математика и механика граничат с философией: происхождение и судьба Солнечной системы, эволюция звёздных скоплений и т. д.».

Сразу же после вступительных слов своей курсовой автор начинает разбор разных вариантов в проблеме финальных движений, и он перечисляет в таблице десять потенциальных возможностей. Их можно интерпретировать на понятном каждому языке поведения людей в любовных треугольниках, и мы предпочтём именно такую трактовку. Вот какие случаи рассматриваются в таблице Алексеева.

1. Трое уживаются вместе во все времена (математики говорят тогда «с минус бесконечности до плюс бесконечности»). Этот случай называется *устойчивым*.  
Автор комментирует в таблице: «Неизвестно, возможны ли такие движения на множестве меры  $\mu > 0$ » и уже за пределами таблицы добавляет: «А. Н. Колмогоров высказал гипотезу, что нет». Следуя традициям детективного жанра, воздержимся здесь пока от комментариев.
2. «Треугольник» существовал всё время до определённого момента, когда один стал удаляться от оставшейся пары всё дальше и дальше, уходя в бесконечность. Это стали называть *частичным распадом*.
3. Пара участников существовала рядом до некоторого времени, как вдруг из бесконечной дали прилетел третий и навсегда остался с этой парой. Это называется *сильным захватом*.
4. «Треугольник» существовал всё время, а потом все разлетелись кто куда. Это *сильное рассеяние*.
5. Трое слетелись из бесконечной дали и остались вместе на всё остальное время. Это тоже *сильный захват*.

6. Пара существовала всё время, как вдруг из бесконечной дали прилетел третий, вышиб одного, остался с другим, а вышибленный удалился в бесконечную даль. Это называется *обменом*.
7. Трое прилетают из бесконечной дали, двое образуют пару, чтобы быть рядом во все последующие времена, а третий улетает. Это случай *захвата*.
8. Пара существовала бесконечное время, из бесконечности прилетел третий, и все разлетелись. Это называется *полным распадом*.
9. Трое прилетают из бесконечности и улетают в бесконечность.
10. Пара существовала бесконечное время, третий прилетел и улетел, а пара осталась вместе. Две последние тривиальности не имеют названия.

(Как потом выяснилось, этим не исчерпываются возможные случаи финальных движений в задаче трёх тел.)

Далее в курсовой пишется: «Особое место занимают случаи обмена и захвата. Шази<sup>1)</sup> высказал утверждение, что ни обмен, ни захват в задаче трёх тел невозможны. Относительно захвата это мнение было опровергнуто сначала О. Шмидтом и Хильми, применявшими численное интегрирование, потом К. Ситниковым, построившим пример захвата без помощи численного интегрирования». Далее говорится о том, что обмен с положительной константой энергии можно построить методом Ситникова и что наибольшая проблема состояла в возможности обмена при отрицательной константе энергии. Введение к курсовой работе завершалось словами: «Настоящая работа посвящена построению именно такого обмена в задаче трёх тел с константой энергии  $h < 0$ . Тем самым утверждение Шази окончательно опровергается».

Передохнём. Что мы видим? Во-первых, что Андрей Николаевич Колмогоров поставил *перед студентом четвёртого курса* мировую проблему, разрешение которой должно было быть с интересом воспринято и Ньютоном, и Якоби, и Пуанкаре, и вообще любым математиком и астрономом, которые размышляли над устройством мироздания.

Проблема трёх тел существовала всегда, но именно проблема захвата приобрела в сороковые годы особую актуальность. Дело в том, что Отто Юльевич Шмидт — математик, геофизик, путешественник, главный редактор Большой Советской Энциклопедии, организатор науки и просвещения (его А. Н. Колмогоров называл человеком эпохи Возрождения), — бывший долгое время в числе сталинских фаворитов, внезапно потерял его доверие. Он был смещён Сталиным со своих организационных постов в марте 1942 года,

---

<sup>1)</sup> Выдающийся французский математик и астроном, академик Парижской академии наук.



МАРИШВИЧ А. И.  
профессор

БУТЕРИС А. П.  
асцент



МОСКВА. СОВЕТСКАЯ ПОШТА

ГЕЛБРАНД И. М.  
член корр. АН

ГОЛДБЕРГ Э. В.  
член корр. АН

СОВОЛОВ С. А.  
академик

МИНАКОВ А. П.  
профессор



АЛЕКСАНДРОВ С.  
академик

ПЕТРОВСКИЙ И. Г.  
академик, ректор  
вуза

ЯНОВСКАЯ С. А.  
профессор

КЕНСГЛОВ А. П.  
инженер-техник

ОЛЕЙНИК О. А.  
асцент



СЕДОВ Л. И.  
инженер-техник

МЕНЬЩИКОВ В. В.  
профессор

КУРОШ А. Г.  
профессор

РАВОТНОВ Ю. П.  
член корр. АН

БАРИ Н. К.  
профессор

РАШЕВСКИЙ П. К.  
профессор



ФУЛИКОВ С. П.  
профессор

ГАЛОПЕРИ С. А.  
асцент

КРЕМЕС Н. А.  
профессор

ШАКИТЕР А. А.  
профессор

Профессора и преподаватели выпуска мехмата 1955 года



Выпускники кафедры теории функции и функционального анализа 1955 года

но не арестован. И тогда он решил всерьёз заняться темой, которая интересовала его давно: созданием модели рождения Солнечной системы. Его основная идея базировалась именно на возможности захвата. Но Шази «доказал» (и все так считали), что захват невозможен. Шмидт не согласился с этим. Он провёл численные расчёты, которые убедили его в собственной правоте. Ещё более точные расчёты провёл сподвижник Шмидта Г. Ф. Хильми. Но для математиков расчётные доказательства не были убедительны. Колмогоров работал в сороковые годы в шмидтовском Институте геофизики (это было связано с его исследованиями по турбулентности), и эта, если хотите, научная драма развёртывалась на его глазах. Колмогоров поставил перед учеником П. С. Александрова Кириллом Александровичем Ситниковым, замечательным топологом, постоянно бывавшим в сороковые годы на загородной даче Александрова и Колмогорова в Комаровке задачу математически обосновать возможность захвата. И в одном частном случае Ситников решил её.

На этом закончим с «во-первых».

А во-вторых? А во-вторых, четверокурсник решил эту проблему, с которой было связано так много интригующих сюжетов. Повторим слова курсовой: «тем самым утверждение Шази окончательно опровергается», и дорога для гипотезы Шмидта была тем самым в этой части очищена.

Но это было только начало. Оставалось ещё множество вопросов, касающихся финальных движений. В настоящее время проблема финальных движений полностью решена (о том, как это происходило и что это значит, мы будем ещё рассказывать). На решение и развитие этой проблемы ушла фактически вся творческая жизнь Владимира Михайловича Алексеева, и это в высшей степени характеризует два беспримерных свойства его личности — стойкость и верность. Об этом мы далее не раз расскажем подробнее.

В том же 1954 году произошло знаменательное событие: советская делегация (в составе П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского и Д. Ю. Панова) впервые после 1932 года приняла участие в Международном математическом конгрессе. Конгресс состоялся в Амстердаме. Там Колмогоров выступил с докладом, завершавшим работу Конгресса. С этого времени начался новый этап в теории динамических систем.

В своём докладе Колмогоров рассказал о начальном этапе развития нового витка теории. Затем исследования Колмогорова были дополнены усилиями В. И. Арнольда и Ю. Мозера, и в итоге был создан раздел математического анализа, получивший название КАМ-теории (теории Колмогорова — Арнольда — Мозера). Цитирую одно место из колмогоровского доклада, где он рассказывает об интересующем нас сюжете. «Замечу, — говорил в своём докладе Андрей Николаевич, — что из более элементарных вопросов специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений мало занимаются кон-

кретными задачами об уходящих траекториях различных специальных типов. Ярким примером этого является то обстоятельство, что опровержение утверждений Шази о невозможности „обмена“ и „захвата“ в задаче трёх тел [Колмогоров процитировал в этом месте две работы Шази] было достигнуто тяжёлым (и без точных оценок логически неубедительным!) путём численного интегрирования [Колмогоров цитирует работы Беккера двадцатого года и Шмидта сорок седьмого], и лишь недавно пример „захвата“ был построен Ситниковым весьма просто и почти без вычислений [в работе пятьдесят третьего года]». Результат Алексеева не был к тому моменту опубликован, и потому о нём ничего не было сказано.

Дипломная работа В. М. Алексеева явилась продолжением его курсовой работы четвёртого курса. Она была посвящена обмену и захвату в проблеме трёх тел. На базе этих исследований была написана статья в «Доклады Академии наук СССР». Она явилась первой публикацией Владимира Михайловича (Обмен и захват в задаче трёх тел. ДАН СССР, т. 108, № 4, 1956).

Характеристикой творческого взлёта Андрея Николаевича Колмогорова может служить то, что в том же 108-м томе в ДАН публикуются заметки, в первой из которых делается решающий вклад в опровержение гипотезы Гильберта в его 13-й проблеме (ДАН СССР, т. 108, № 2, 1956), во второй намечается программа исследований по  $\varepsilon$ -энтропии (ДАН СССР, т. 108, № 3, 1956), а в томе, где опубликована статья Алексеева, помещена заметка И. М. Гельфанда, А. Н. Колмогорова и А. М. Яглома, значительно развивающая шенноновскую теорию информации.

## ВОСХОЖДЕНИЕ

Наибольший взлёт творческих достижений Владимира Михайловича Алексеева относится к периоду 1966–69 гг. Статья «Квазислучайные динамические системы», опубликованная в трёх номерах «Математического сборника», занимает около 170 страниц. Тогда же была исчерпана проблематика финальных движений. В 1968 году В. М. Алексеевым был сделан обзорный доклад на заседании Московского математического общества (8 апреля 1968 года), и в том же году была завершена докторская диссертация, где были подведены итоги огромной работы. Работа была защищена в марте 1969 года на заседании Совета механико-математического факультета МГУ. Официальными оппонентами выступили Дмитрий Викторович Аносов, Андрей Николаевич Колмогоров и Виктор Борисович Лидский.

Приведём список публикаций В. М. Алексеева, в которых, согласно автореферату, изложены основные результаты диссертации. Это две заметки в ДАН СССР, одна заметка в «Сообщениях» в УМН (в совокупности всё

это занимает меньше десяти страниц) и одна большая, содержащая 63 страницы статья «Квазислучайные динамические системы I. Квазислучайные диффеоморфизмы» в «Математическом сборнике».

Огромная, около пятисот страниц, диссертация Владимира Михайловича была изложена в трёх упомянутых статьях в «Математическом сборнике». Большая часть была опубликована в конце 1968 и в начале 1969 года. (Правила того времени позволяли не откладывать защиту до полного опубликования статей по диссертации.)

К переживаниям по окончании такого рода свершений относятся слова Поэта (я цитирую стихотворение Пушкина, которое так и называется — «Труд»):

Миг вожделенный настал: окончен мой труд многолетний.  
 Что ж непонятная грусть тайно тревожит меня?  
 Или, свой подвиг свершив, я стою как подёнщик ненужный,  
 Плату принявший свою, чуждый работе другой?  
 Или жаль мне труда, молчаливого спутника ночи,  
 Друга Авроры златой, друга пенатов святых?

По окончании труда начался новый этап в жизни Алексеева, он искал новые темы для занятий, но шлейф его основной темы тянулся до последних мгновений его жизни. К новым темам Владимир Михайлович лишь едва приступил.

Приведём (прокомментировав потом) отзыв А. Н. Колмогорова на диссертацию В. М. Алексеева. Этот отзыв является, по моему мнению, замечательным литературным документом.

#### ОТЗЫВ

на диссертацию В. М. Алексеева  
 «Квазислучайные динамические системы»

Введение к диссертации содержит обзор современной проблематики теории классических динамических систем. Работа В. М. Алексеева примыкает к четырём группам работ.

1. Попытки Шази доказать невозможность некоторых случаев предельного поведения при  $t \rightarrow \pm\infty$  в «задаче трёх тел» были сначала опровергнуты путём построения расчётных противоречащих примеров (Шмидт для «захвата» и Хильми — для «обмена»). Отсутствие ссылки на работы Хильми является моим единственным упреком диссертанту в отношении полноты исторического обзора). Исчерпывающее доказательство возможности захвата было дано К. А. Ситниковым, а обмена — как при положительной, так и при отрицательной константе энергии —



В. М. Алексеевым. В рамках элементарных представлений, не учитывающих возможности «осциллирующего» поведения, нерешённым оставался наиболее деликатный вопрос о возможности захвата при отрицательной константе энергии (захват кометы системой Солнце – Юпитер). Этот вопрос как раз решён в диссертации.

2. Сама возможность осцилляции в этой задаче была доказана К. А. Ситниковым. Своеобразное с теоретико-множественной точки зрения устройство фазового пространства этой задачи в отношении поведения при  $t \rightarrow +\infty$  было намечено А. Н. Колмогоровым (см. указание на с. 38 диссертации). Для обнаружения возможности «осцилляций» мною было предложено разобрать специальный случай, которому посвящена третья глава представленной диссертации. В. М. Алексеев не ограничился осуществлением этой программы, но получил окончательные результаты и в отношении совместного учёта поведения траекторий при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Это потребовало значительно более тонких методов.
3. Эти более тонкие методы автора диссертации возникли в развитие идей Я. Г. Синая, Смейла и Д. В. Аносова (обзор работ этих авторов дан на с. 4–10 диссертации). В. М. Алексеев указывает и более старый источник своих идей – «символическую динамику» Дж. Биркгофа. «Квазислучайный» характер поведения траекторий при движении по геодезическим многообразиям отрицательной кривизны был замечен давно. Более определённо эти аналогии со случайными процессами получили развитие в работах Я. Г. Синая при использовании введённого мною понятия «энтропии» динамической системы. Роль «бернуллиевских динамических систем» в классической проблематике выяснилась в работах Я. Г. Синая и Смейла. Из этих источников и развился тонкий аппарат, исследованный в первой главе диссертации.
4. Работы А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера о роли в классических динамических системах почти периодических решений менее непосредственно связаны с диссертацией, хотя и необходимы для замыкания полной таблицы возможных типов поведения изучаемых систем. Кроме того, в них впервые появились подмножества фазового пространства с локальным устройством по типу произведения гладкого элемента на канторовское множество, играющие большую роль в диссертации.

Конкретные результаты второй и третьей глав существенно основаны на общих идеях первой главы, где в общей форме развивается метод изучения динамических систем с помощью «топологических марковских цепей». Трудно дать краткое изложение этой теории. В § 6 первой

главы дан ряд примеров применения метода. Эта глава сама по себе представляет большой интерес.

Третья глава диссертации посвящена классической задаче трёх тел. В случае отрицательной константы энергии при  $t \rightarrow +\infty$  возможны три типа поведения системы (нумерация соответствует таблице к с. 373 диссертации):

- 2) одно из расстояний ограничено, два других стремятся к бесконечности;
- 3) все расстояния ограничены;
- 4) «осциллирующее поведение».

Рассматривая поведение системы при  $t \rightarrow \pm\infty$ , получаем девять логически возможных комбинаций:  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(4, 4)$ . Случай  $(2, 2)$  распадается при этом на два:  $(2, 2)$ -а – без «обмена» и  $(2, 2)$ -б – с «обменом». До недавнего времени были известны только примеры случаев  $(2, 2)$ -а и  $(3, 3)$ . В своей работе, не вошедшей в диссертацию, В. М. Алексеев впервые строго доказал возможность случая  $(2, 2)$ -б. В 1960 году К. А. Ситников построил пример «осциллирующего поведения», т. е. установил возможность хотя бы одного из случаев  $(2, 4)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 4)$  и хотя бы одного из случаев  $(4, 2)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(4, 4)$ .

Основной результат третьей главы диссертации заключается в доказательстве возможности всех десяти случаев. В частности, установлена возможность «захвата» (случай  $(2, 3)$ ), которая отрицается ещё в изданном в 1967 году сборнике «Успехи астрономии в СССР». Случаи  $(2, 2)$ -а,  $(2, 2)$ -б и  $(3, 3)$  осуществляются с положительной вероятностью. Про остальные либо доказано, либо правдоподобно, что их вероятность нулевая. Но в качестве пограничных случаев они интересны и важны.

Уже перечисленные результаты убедительно свидетельствуют о значительности достижений В. М. Алексеева в этой трудной области, в которой работал ряд крупных учёных. Результаты получены при помощи рассмотрения одного специального случая «задачи трёх тел» (движущаяся по оси симметрии масса – нулевая). Сам же случай ограниченной задачи трёх тел, с другой стороны, является частным случаем задачи об одномерном осцилляторе, подчинённом уравнению

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \quad (1)$$

где  $Q$  периодически зависит от времени.

Исследованию этого уравнения подчинена глава вторая. В применении к решению уравнения (1) результаты о предельном поведении решений при  $t \rightarrow \pm\infty$  собраны на с. 357 в виде следствия 9. Оказывается, что уже

здесь это поведение может быть весьма разнообразным, а распределение в фазовом пространстве точек, дающих начало разного типа траекториям, обладает рядом неожиданных свойств. Есть все основания думать, что открытые здесь явления имеют широкое распространение в динамических системах классической механики. В частности, набросанная на с. 378–381 общая картина устройства фазового пространства общей задачи трёх тел, вероятно, сможет быть окончательно уточнена на основе методов, развитых В. М. Алексеевым.

Подводя итог, мы видим, что докторант, полностью овладев всем очерченным кругом проблем и методов, получил и ряд завершающих результатов. В отношении тонкости методов он стоит на самом высоком из достигнутых к настоящему моменту уровне. В соответствии с этим диссертацию В. М. Алексеева следует признать полностью удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к диссертациям на степень доктора физико-математических наук, а диссертанта – достойным присуждения ему этой степени.

А. Колмогоров  
6 декабря 1968 г.

Как и обещал, прокомментирую этот отзыв.

Он начинается с описания четырёх направлений, которые зародились за пятнадцать лет до этого в период новой творческой активности Колмогорова и принесли замечательные плоды.

Первое направление — финальные движения. О нём мимоходом было сказано в докладе Колмогорова на заключительном заседании Международного математического конгресса в Амстердаме (в большом зале, который был известен ранее докладчику «как место исполнения великих произведений мировой музыки под управлением Менгельберга»). В этом направлении в ту пору были получены лишь изначальные, в основном эвристические результаты, за исключением теоремы К. А. Ситникова 1953 года о захвате. А в 1968 году тема оказалась почти исчерпанной, и роль диссертанта была фундаментальной.

Колмогоров приводит в отзыве классификацию движений, отличающуюся от той, которая содержалась в курсовой работе Алексеева 1954 года. И в алексеевской, и в колмогоровской классификации десять позиций, но они составлены по разным классификационным признакам, и в алексеевской классификации отсутствовал элемент осцилляционного поведения, который тогда существовал в виде гипотезы, когда максимальное расстояние между телами неограничено, но не стремится к бесконечности. В своём отзыве Колмогоров выделяет в качестве «отдельной группы работ» те, где была обнаружена эта казавшаяся нереальной в 1954 году возможность осцилляции.

Эта тема была также стимулирована Колмогоровым, и он (что для него, вообще говоря, нехарактерно) подчёркивает свою роль в этом круге вопросов.

Следующие две группы вопросов оказались на долгое время в эпицентре математики шестидесятых годов. Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия для всей математики и естествознания, состоит в том, что во многих динамических системах, несмотря на их полную детерминированность, могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Истоки этой идеологии относятся ещё к началу прошлого века, а достаточно полное осмысление такого рода явлений относится к шестидесятым годам. В числе людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать В. М. Алексева. Колмогоров в своём отзыве называет основных участников работ в этом направлении: помимо В. М. Алексева — Я. Г. Синая, С. Смейла, Д. В. Аносова. Андрей Николаевич очень ценил (и писал, что они имеют «выдающийся интерес») работы Я. Г. Синая, где были вскрыты аналогии движений по геодезическим многообразиям отрицательной кривизны со случайными процессами (и Колмогоров снова подчёркивает в отзыве, что при этом использовалось введённое *им* понятие энтропии динамической системы).

И наконец, Андрей Николаевич говорит о КАМ-теории и её роли в классической механике. Эти исследования, как он пишет, «менее непосредственно связаны с диссертацией, хотя и необходимы для замыкания полной таблицы возможных типов изучаемых систем». И здесь надо вернуться к самому началу наших обсуждений, когда при рассмотрении первого случая финального поведения трёх тел (когда эти три тела «уживаются во все времена») Володя Алексеев в курсовой работе, защищавшейся в 1954 году, пишет, что А. Н. Колмогоров высказывал гипотезу, что подобная устойчивость невозможна. Но она оказалась возможной благодаря той самой КАМ-теории, первые результаты по которой были опубликованы в том же 1954 году!

Работы В. М. Алексева были высоко оценены специалистами, и он был приглашён часовым докладчиком на Международный математический конгресс в Ницце, проходивший с 1 по 10 сентября 1970 года. К великому сожалению, В. М. Алексеву не было позволено тогда пересечь железный занавес.

Владимир Михайлович с улыбкой рассказывал мне, что незадолго до открытия Конгресса ему позвонил Ж. Лере — один из крупнейших математиков прошлого века. Лере очень высоко отозвался о достижениях В. М. Алексева и при этом обратился к нему с личной просьбой: «Пожалуйста, будьте снисходительны и милосердны к Шази». С подобной просьбой к В. М. Алек-

сееву можно было и не обращаться: деликатность и милосердие были ему присущи с самых младых ногтей.

После Конгресса Лере прислал Владимиру Михайловичу письмо (полученное из Парижа 23 ноября 1970 года), исполненное французской лобезности и благодарности.

Мой дорогой Коллега,

Я весьма благодарен Вам за присылку текста Вашего доклада на Конгрессе.

Мы почли своим долгом усовершенствовать его французский перевод. Я буду Вам весьма признателен, если по получении корректур и Вашей рукописи с нашими поправками Вы тщательно проверите, не исказили ли они, быть может, Вашу мысль.

Недавно я дошёл до сведения семьи Шази, что благодаря Вам его имя на Конгрессе в Ницце упоминалось в самых тёплых выражениях, и мы Вам за это очень признательны: [двоеточие было поставлено печатно, а затем от руки приписано: «Chazy était un si brave homme!». В. М. перевёл это выражение так: «Шази был таким добрым малым!» — Прим. авт.]

Труды Конгресса выйдут в свет в 1971 году; Ваша статья не могла бы появиться в «Journal de Mathématiques pures et appliquées» ранее. Нам представляется, что Труды Конгресса получают такое же распространение, как и наши научные журналы, и я поэтому не думаю, что было бы уместно воспроизводить Вашу статью в одном из них.

На меня произвела большое впечатление глубина Ваших работ. «Journal de Mathématiques» будет, безусловно, рад опубликовать в будущем одну из них.

Соблаговолите верить, мой дорогой Коллега, моей самой дружеской признательности.

Жан Лере

Творческая жизнь Владимира Михайловича Алексева в её основной части может быть озаглавлена так же, как был назван им его доклад на Международном конгрессе в Ницце: «Финальные движения в задаче трёх тел и символическая динамика». Выше приводились две классификации финальных движений: одна из курсовой работы 1954 года, другая — из колмогоровского отзыва конца 1968 года. В краткой справке приведена ещё одна классификация — Шази, в которой 16 позиций. Теорема о финальных движениях, приведённая в справке, утверждает, что «реализуются все  $16 = 4 \times 4$  логически возможных комбинаций финальных типов движения по Шази при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ ». Как мы помним, работа 1954 года

начиналась с почти чистого листа, с фактически ничем не заполненной таблицы Шazi, а завершилась полным её заполнением. Решение проблемы потребовало огромных усилий.

И снова (и мне всегда как-то особенно приятно это осознавать) один из важнейших элементов всей теории, приведший к её полному завершению, был заложен Андреем Николаевичем Колмогоровым. Как это не раз с ним случалось, по-видимому, мимоходом, между делом, может быть в разговоре за столом (скорее всего, с Кириллом Александровичем Ситниковым), когда вдруг возник вопрос о возможности осцилляции в задаче трёх тел, Колмогоров предложил рассматривать так называемую *равнобедренную задачу трёх тел*, когда два тела равной массы расположены симметрично относительно вертикальной оси, находясь обе в перпендикулярной плоскости, в то время как третье тело малой массы (а ещё лучше — нулевой массы) имеет скорость вдоль вертикальной оси (при этом треугольник, соединяющий центры тел, всегда является равнобедренным). В силу симметрии такое расположение будет сохраняться во все времена. Обладая замечательной «интуицией процессов» (он причислял её к особому типу одарённости), Колмогоров не сомневался в том, что два симметричных тела, двигаясь по эллиптическим орбитам с небольшим эксцентриситетом, смогут возмущать движение третьего тела так, что в итоге получится осциллирующее движение. Ситников заинтересовался задачей и, проведя кое-какие подсчёты, убедил себя в том, что интуиция Колмогорова не подвела. Но долгое время текста написано не было, и я помню, как на протяжении большого времени Андрей Николаевич старался добиться от Кирилла Александровича публикации. И добился.

Если масса третьего тела нулевая, а положение в момент времени  $t$  равно  $z(t)$ , то движение этого «тела» описывается достаточно простым уравнением:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}}. \quad (*)$$

В. М. Алексеев разработал глубокую теорию подобных уравнений, что, в частности, привело и к исчерпанию темы финальных движений.

Вот один из сформулированных в справке результатов.

*Для достаточно малого эксцентриситета  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $N$ , что для любой последовательности  $M = \{m_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $m_n > N$ , существует решение  $z(\cdot, M)$  уравнения (\*), нули  $\tau_k$  которого удовлетворяют равенству  $\left[ \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2\pi} \right] = m_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .*

Подобные утверждения и носят название символической динамики. Утверждение теоремы Алексеева является свидетельством того феномена,

о котором говорилось выше: *динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями (причём столь простыми, как  $(*)$ ), могут иметь очень сложную структуру решений, напоминающую случайный процесс*. Окончательный результат дался В. М. ценой огромного труда. Затем некоторое упрощение доказательств было получено Ю. Мозером. Об этом выразительно сказано в статье K. Zare, S. Chesley. «Order and chaos in the planar isosceles three-body problem». Chaos, Vol. 8, № 2 (1998): «Приложение символической динамики к задаче Ситникова было осуществлено Алексеевым, дополнившим работу Ситникова, посвящённую этой модели. Алексеевым же результаты были распространены на случай, когда третье тело имеет ненулевую массу. Сведя задачу к отображению [последования] и обнаружив присутствие структуры „подковы Смейла“, Мозер дал красивую геометрическую интерпретацию результатов Алексеева. Доказательство Мозера основывается на преобразовании, введённом Мак-Гэхи, которое выявляет наличие [фиктивной] гиперболической периодической орбиты в бесконечности. Эта орбита имеет два инвариантных многообразия, пересекающихся в гомоклинической точке, что и приводит к появлению структуры „подковы Смейла“ в её непосредственной окрестности».

Изыщество работы Мозера не умаляет работы Алексеева: мозеровское доказательство *ad hoc* явно эксплуатирует симметричность задачи, в то время как метод горизонтальных и вертикальных полосок Алексеева даёт мощный инструмент исследования самых разных динамических систем, где имеются квазислучайные явления: например, в задаче захвата кометы системой Солнце — Юпитер никакие искусственные приёмы вроде преобразования Мак-Гэхи неприменимы.

Над завершением своей диссертации В. М. работал около трёх лет, начало семидесятых годов — несомненная вершина его творческой деятельности. Затем он стал искать новые темы исследования, в частности заниматься биологической и медицинской тематикой, и избрал новое место своей работы на мехмате — кафедру общих проблем управления.





---

---

# Современная математика для широкой аудитории

---

---

## Сквозь сеть сопротивлений

М. Б. Скопенков\*, А. А. Пахарев†, А. В. Устинов‡

*Памяти Андрея Ходулёва*

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая читателям статья является продолжением статей [1] и [5] из предыдущих номеров «Математического Просвещения». В первой из них было сформулировано несколько трудных задач о сопротивлении симметричных электрических цепей, а во второй было приведено элементарное доказательство теоремы Пойа о случайном блуждании. Основная цель этой статьи — привести элементарное доказательство следующего фольклорного результата.

**ТЕОРЕМА 1.1.** (А) *Если человек случайным образом блуждает по бесконечной квадратной сетке, то вероятность его возвращения в начальный узел до первого попадания в узел, соседний с ним справа, равна  $1/2$ .*

(В) *Сопротивление между соседними узлами бесконечной квадратной сетки из единичных сопротивлений равно  $1/2$ .*

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-5490.2014.1, фонда «Династия», фонда Саймонса.

† Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-5490.2014.1.

‡ Работа выполнена при поддержке фонда «Династия».

Все необходимые определения будут даны. Части (А) и (В) теоремы 1.1 оказываются равносильны друг другу. По сути это одно и то же утверждение, сформулированное в разных терминах: один раз на языке случайных блужданий, а второй раз — на языке электрических цепей. При решении подобных задач полезно знать оба «языка» и уметь переводить интересующее вас утверждение с одного языка на другой.

Элементарное доказательство теоремы 1.1 использует замечательную теорему 3.2 о сопротивлении между соседними узлами конечных «симметричных» электрических цепей и возможность приблизить бесконечную квадратную сетку такими цепями. В процессе доказательства мы решим большинство задач из заметки [1], познакомимся с теорией потенциала на графах и свойствами дискретных гармонических функций.

План статьи следующий. В § 2 будут даны определения основных объектов, связанных с конечными электрическими цепями. В § 3 будет доказана теорема 3.2 о сопротивлении «симметричных» электрических цепей. В § 4 мы начнём обсуждать бесконечные электрические цепи, а в § 5 докажем основные теоремы о потенциале на бесконечной квадратной сетке. В § 6 докажем часть (В) основной теоремы 1.1. В § 7 докажем дискретный аналог теоремы Лиувилля, который потребуется нам для доказательства части (А) основной теоремы 1.1 в § 8. В § 9 обсудим без доказательства некоторые её обобщения, в частности, коснёмся задачи о сопротивлении между произвольными узлами бесконечной квадратной сетки. Например, сопротивление между узлами, соседними по диагонали, равно  $2/\pi$ .

Если статью читать независимо от предыдущих [1] и [5], то некоторые утверждения читателю придётся принять без доказательства.

## § 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Поскольку мы собираемся применять электрические цепи для доказательства математического результата, нам понадобится их формальное аксиоматическое определение<sup>1)</sup>. Для начала ограничимся рассмотрением конечных электрических цепей.

Наше определение использует язык графов. Будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Иногда нам удобно будет выбрать на ребре ориентацию.

---

<sup>1)</sup> Есть и другие подходы к аксиоматике электрических цепей; см, например, [4, 13, 18]. Впервые математический аппарат для анализа электрических цепей постоянного тока был разработан Кирхгофом [18].

Условимся, что если в некотором графе вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром, то через  $xy$  обозначается ориентированное ребро, направленное от вершины  $x$  к вершине  $y$ .

*Электрическая цепь* — это связный конечный граф  $\Gamma$ , в котором:

- каждому ребру  $xy$  приписано положительное вещественное число  $R(xy) = R(yx)$ , называемое его *сопротивлением*<sup>2)</sup>,
- выделено некоторое (непустое) множество вершин, называемое *границей* ( $\partial\Gamma$  — граница графа  $\Gamma$ ),
- каждой вершине  $x$  границы  $\partial\Gamma$  приписано вещественное число  $g(x)$  — *потенциал* в этой вершине.

*Потенциалы* вершин  $u(x)$  определяются следующими условиями:

**АКСИОМА 1** (граничное условие Дирихле). В граничных вершинах значения потенциала совпадают со значениями данной функции  $g$ , т. е.  $u(x) = g(x)$  для всех  $x \in \partial\Gamma$ .

**АКСИОМА 2** (правило токов Кирхгофа). Для любой неграничной вершины  $x$  выполнено равенство

$$\sum_{xy} \frac{u(x) - u(y)}{R(xy)} = 0,$$

где суммирование ведётся по всем рёбрам  $xy$ , содержащим вершину  $x$ .

Величина

$$i_u(xy) := \frac{u(x) - u(y)}{R(xy)}$$

называется *током*, идущим по ребру  $xy$  в направлении от  $x$  к  $y$ . Число

$$i_u(x) := \sum_{xy} i_u(xy),$$

где суммирование ведётся по всем рёбрам  $xy$ , содержащим вершину  $x$ , называется *током, вытекающим в цепь* через вершину  $x$ . Таким образом, по аксиоме 2,  $i_u(x) = 0$  для каждой неграничной вершины  $x$ . Если цепь имеет только две граничные вершины  $x$  и  $y$ , то число

$$R(x \leftrightarrow y) := \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{g(y) - g(x)}{i_u(y)} \quad (1)$$

называется *эффективным сопротивлением* цепи между вершинами  $x$  и  $y$ , или просто *сопротивлением* цепи. *Тепловой мощностью* цепи называется

<sup>2)</sup> Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*.

величина

$$Q_u := \sum_{xy} \frac{(u(x) - u(y))^2}{R(xy)} = \sum_{xy} i_u(xy)^2 R(xy),$$

где суммирование ведётся по всем (неориентированным) рёбрам цепи. Если же суммировать не по всем рёбрам цепи, а только по некоторому её подграфу, то говорят о *тепловой мощности* подграфа.

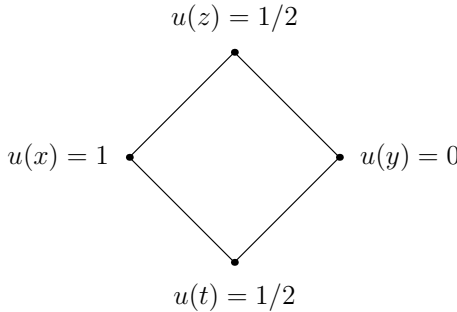


Рис. 1. Квадрат с единичными сопротивлениями сторон

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим электрическую цепь, полученную из квадрата  $xzyt$  приписыванием единичного сопротивления каждому ребру (см. рис. 1). Пусть граничными вершинами этой цепи будут вершины  $x$  и  $y$  с функцией  $g$  на них, равной 1 и 0 соответственно. По аксиоме 2

$$(u(z) - u(x)) + (u(z) - u(y)) = 0,$$

поэтому  $u(z) = 1/2$ . Аналогично  $u(t) = 1/2$ . Из этого следует, что по каждому ребру идёт ток  $\pm 1/2$ , положительный — по рёбрам, ориентированным вправо, отрицательный — по рёбрам, ориентированным влево. Найдём эффективное сопротивление этой цепи между вершинами  $x$  и  $y$ :

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{1 - 0}{1/2 + 1/2} = 1.$$

Тепловая мощность каждого ребра равна  $(1/2)^2$ , поэтому тепловая мощность всей электрической цепи равна 1.

Функцию  $u(x)$ , удовлетворяющую аксиоме 2 на некотором множестве вершин, назовём *гармонической* на этом множестве вершин. *Гармонической на цепи* назовём функцию, гармоническую во всех неграничных вершинах цепи. По умолчанию, под гармонической функцией будет подразумеваться именно гармоническая на цепи функция.

Эти определения обобщают определения из статьи [5], в которой рассматривался частный случай, когда функция  $g(x)$  принимает только значения 0 и 1. Следующие теоремы доказываются дословно так же, как аналогичные теоремы из статьи [5].

**ТЕОРЕМА 2.2** (теорема единственности потенциала). *В электрической цепи не может быть двух различных потенциалов.*

**ТЕОРЕМА 2.3** (теорема существования потенциала). *В электрической цепи существует потенциал.*

Сформулируем ещё несколько результатов из статьи [5], которые нам потребуются.

**ТЕОРЕМА 2.4** (принцип суперпозиции). *Если  $u(x)$  и  $v(x)$  — гармонические функции на цепи, то при любых  $a, b \in \mathbb{R}$  функция  $au(x) + bv(x)$  — гармоническая на цепи.*

**ТЕОРЕМА 2.5** (принцип максимума). *Гармоническая функция на цепи принимает своё наибольшее значение в граничных вершинах.*

Задача о нахождении потенциала  $u(x)$ , удовлетворяющего аксиомам 1–2, называется *задачей Дирихле*. В некоторых случаях оказывается удобнее рассматривать другую задачу: в граничных вершинах фиксировать не значения потенциала, а втекающий ток (то есть использовать не «источники напряжения», а «источники тока»). Пусть каждой вершине  $x$  электрической цепи приписано число  $i(x)$  — ток, втекающий в эту вершину. Наложим на эти числа следующее ограничение:  $\sum_x i(x) = 0$  (сумма втекающих в цепь токов равна нулю). При таком подходе аксиома 1 заменяется следующим предположением.

**АКСИОМА 1'** (граничное условие Неймана). Для любой граничной вершины  $x$  выполнено равенство  $i_u(x) = i(x)$ .

В таком случае *потенциалом* называется функция  $u(x)$ , которая удовлетворяет граничному условию Неймана (аксиоме 1') и правилу токов Кирхгофа (аксиоме 2). Задача о нахождении потенциала, удовлетворяющего аксиомам 1' и 2, называется *задачей Неймана*.

Следующая теорема является несложным следствием приведённых выше результатов.

**ТЕОРЕМА 2.6** (теорема существования и единственности решения задачи Неймана). *Решение задачи Неймана всегда существует. Оно единственно с точностью до добавления константы.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем единственность. Допустим, что существуют два потенциала  $u_1$  и  $u_2$ , удовлетворяющие аксиомам 1' и 2. Тогда их

разность  $u_1 - u_2$  является гармонической функцией во всех вершинах цепи (включая граничные). Докажем, что она постоянна. Действительно, возьмём любую вершину графа и объявим её на время единственной граничной вершиной цепи. По принципу максимума 2.5 мы получаем, что в ней достигается максимум потенциалов всех вершин цепи. Прделаав это для каждой вершины, получим, что в любой вершине потенциал равен одному и тому же числу — максимуму потенциалов всех вершин цепи.

Существование достаточно доказать для случая, когда функция  $i(x)$  отлична от нуля только в двух вершинах  $x$  и  $y$  (рассматривая линейные комбинации таких функций, всегда можно получить решение задачи Неймана в общей ситуации). Возьмём эти две вершины за границу цепи и положим  $g(x) = 0$ ,  $g(y) = 1$ . По теореме существования 2.3 в этой цепи существует потенциал  $u$ . Если  $i_u(x) = -i_u(y) = 0$ , то  $u$  является гармонической функцией во всех вершинах цепи. По доказанному выше, она была бы постоянна, но  $u(x) \neq u(y)$ . Значит,  $i_u(x) \neq 0$ . Тогда  $\frac{i(x)}{i_u(x)}u$  — искомое решение задачи Неймана.  $\square$

Задачи об электрических цепях после формализации становятся математическими. При их решении часто возникает соблазн воспользоваться соображениями, очевидными с физической точки зрения. Но мы постараемся чётко разделять физические и математические аргументы.

### § 3. СОПРОТИВЛЕНИЕ «СИММЕТРИЧНЫХ» ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Перед тем как читать дальше, рекомендуем читателю попробовать самому вычислить сопротивление между соседними вершинами проволочных правильных многогранников с единичными сопротивлениями.

Перед формулировкой основного результата этого раздела (теоремы 3.2) рассмотрим один частный случай.

**ПРИМЕР 3.1.** Рассмотрим электрическую цепь, полученную из рёбер тетраэдра  $xyzt$  приписыванием единичного сопротивления каждому ребру (см. рис. 2). Пусть граничными вершинами этой цепи будут вершины  $x$  и  $y$  с функцией  $g$  на них, равной 1 и 0 соответственно. Поменяем в этой цепи вершины  $z$  и  $t$  местами. Цепь не изменится, поэтому по теореме единственности 2.2 потенциалы тоже не изменятся. Значит,  $u(z) = u(t)$ . По аксиоме 2 имеем  $(u(z) - u(x)) + (u(z) - u(y)) + (u(z) - u(t)) = 0$ , поэтому  $u(z) = u(t) = 1/2$ . Значит, эффективное сопротивление между вершинами  $x$  и  $y$ :

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{g(x) - g(y)}{i_u(x)} = \frac{1 - 0}{1/2 + 1/2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

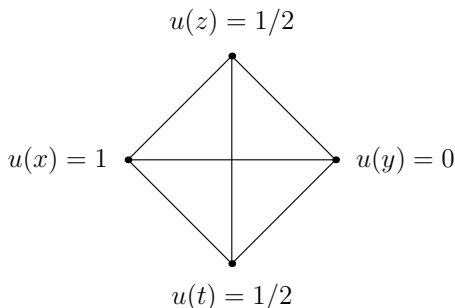


Рис. 2. Тетраэдр с единичными сопротивлениями

В этом примере для вычисления эффективного сопротивления тетраэдра между двумя его соседними вершинами мы воспользовались *симметрией* данного графа. Следующие определения представляют формализацию понятия симметрии.

Соседние вершины графа (то есть вершины, соединённые ребром), будет также называть *смежными*. *Самосовмещением* (или *автоморфизмом*) графа  $\Gamma$  назовём такую перестановку его вершин, которая сохраняет отношение смежности (другими словами, соседние вершины должны переходить в соседние). *Поворотом* графа  $\Gamma$  *вокруг вершины*  $z$  назовём самосовмещение этого графа, оставляющее на месте вершину  $z$ . *Центром симметрии* графа  $\Gamma$  назовём такую вершину  $z$ , что любую смежную с  $z$  вершину можно перевести в любую другую смежную с  $z$  вершину каким-то поворотом вокруг  $z$ . Граф  $\Gamma$  называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа. Оставляем читателю проверку того, что степени вершин на концах любого ребра правильного графа составляют одну и ту же пару чисел (возможно, одинаковых). Примеры правильных графов: правильные (и некоторые полуправильные) многогранники любой размерности; правильные решётки на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и их многомерных аналогах; решётки на торе и т. п. Нетривиальный пример: граф ромбододекаэдра. Это многогранник, который получается, если к каждой грани куба приставить по четырёхугольной пирамиде так, что все треугольники, граничащие по рёбрам куба, сольются в ромбы. Поверхность ромбододекаэдра состоит из 12 ромбов. Он нетривиален тем, что его вершины имеют разную степень (3 и 4).

Понятие правильного графа заимствовано из статьи [3].

Основной результат раздела — следующая фольклорная теорема (см., например, [19]).

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть граф электрической цепи из единичных сопротивлений является правильным и имеет  $t$  рёбер и  $n$  вершин. Предпо-

ложим, что  $x$  и  $y$  — соседние вершины степеней  $k$  и  $l$  соответственно. Тогда эффективное сопротивление между вершинами  $x$  и  $y$  вычисляется по формуле

$$R(x \leftrightarrow y) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{m}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим задачу Неймана со следующими граничными условиями: в некоторую вершину  $z$  нашего графа втекает ток  $(n-1)/n$ , а из всех остальных вершин вытекает ток  $1/n$  (т. е.  $i(z) = (n-1)/n$  и  $i(w) = -1/n$  при  $w \neq z$ ). По теореме 2.6 у этой задачи есть некоторое решение  $u_z$ . Положим сначала  $z = x$ . Возьмём две произвольные соседние с  $x$  вершины  $w$  и  $t$ . В силу правильности нашего графа, некоторый поворот графа вокруг вершины  $x$  переводит вершину  $w$  в вершину  $t$ . При этом повороте граничные условия Неймана не изменяются, следовательно, по теореме 2.6 потенциалы могут измениться только на некоторую общую для всех вершин константу. Так как потенциал вершины  $x$  не изменяется, все потенциалы также не изменяются. Поэтому потенциал вершины  $w$  равен потенциалу вершины  $t$ , и ток, текущий по ребру  $xw$ , равен току, текущему по ребру  $xt$ . Из этого следует, что из вершины  $x$  в любую соседнюю с  $x$  вершину течёт один и тот же ток. Суммарный ток, втекающий в цепь через вершину  $x$ , равен  $(n-1)/n$ , поэтому ток, текущий по ребру  $xy$ , равен  $\frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Аналогично в случае  $z = y$  по ребру  $yx$  течёт ток  $\frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Рассмотрим потенциал  $u := u_x - u_y$ . Ясно, что  $i_u(x) = 1$ ,  $i_u(y) = -1$  и  $i_u(w) = 0$  при любом  $w$ , отличном от  $x$  и  $y$ . При этом

$$i_u(xy) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{u(x) - u(y)}{i_u(x)} = \frac{i_u(xy)}{1} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{m}. \quad \square$$

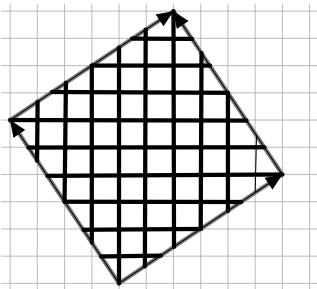


Рис. 3. Сетка на торе

**ПРИМЕР 3.3.** Рассмотрим бесконечную квадратную сетку  $\mathbb{Z}^2$  из единичных сопротивлений, в которой выделен квадрат с центром в узле сетки и вершинами в узлах сетки (см. рис. 3). Вырежем его из сетки и отождествим точки на противоположных сторонах (которые совмещаются параллельным переносом вдоль стороны квадрата) так, чтобы получился тор. Видно, что получившая сетка на торе является правильным графом, поэтому по теореме 3.2 сопротивление между двумя её соседними узлами



равно  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{S}\right)$ , где  $S$  — площадь квадрата. В частности, если вершины квадрата расположены в узлах  $(n; n)$ ,  $(-n; n)$ ,  $(-n; -n)$ ,  $(n; -n)$ , то сопротивление между соседними узлами полученной *сетки на торе*  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  равно  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ .

Так же легко найти сопротивление между соседними вершинами для правильных многогранников с единичными сопротивлениями рёбер. Для куба оно равно  $7/12$ , для икосаэдра —  $11/30$ , для додекаэдра —  $19/30$ , для ромбододекаэдра —  $13/24$ . В случае бесконечных правильных графов было бы естественно ожидать, что дробь  $1/n$  в первом равенстве теоремы 3.2 можно заменить на 0. Для бесконечной квадратной сетки это справедливо (что в точности и утверждает теорема 1.1(B)). Однако для бесконечных графов аналог теоремы 3.2 верен не всегда. Контрпримером служит бесконечное бинарное дерево (степень каждой вершины в таком дереве равна 3).

Дальнейшая часть § 3 не используется при доказательстве основного результата статьи. Покажем, как рассуждения из доказательства теоремы 3.2 позволяют получить ещё несколько любопытных утверждений. Правильный граф будем называть *диаметрально симметричным*, если его вершины можно разбить на пары *диаметрально противоположных* так, что перестановка вершин, одновременно меняющая между собой вершины в каждой паре, является самосовмещением графа, и любой поворот вокруг какой-либо вершины графа оставляет на месте также и её диаметрально противоположную вершину. Для (полу)правильных многогранников такое разбиение на пары строится с помощью центральной симметрии многогранника.

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Цепь с единичными сопротивлениями такова, что её граф  $\Gamma$  с  $n$  вершинами является диаметрально симметричным. Пусть к двум её соседним вершинам подвели напряжение так, что по соединяющему их ребру потёк ток  $i$ . Тогда по диаметрально противоположному ребру течёт ток  $i/(n-1)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно рассмотреть удобное нам ненулевое значение  $i$  и для него доказать, что по диаметрально противоположному ребру течёт ток  $i/(n-1)$ . Обозначим соседние вершины, к которым подвели напряжение, через  $x$  и  $y$ . При доказательстве теоремы 3.2 для потенциала  $u := u_x - u_y$  был найден ток

$$i := i_u(xy) = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Именно это значение  $i$ , не ограничивая общности, мы и рассмотрим. Пусть теперь  $x'$  и  $y'$  — вершины графа, диаметрально противоположные  $x$  и  $y$  соответственно. Ток  $i_u(y'x')$  обозначим через  $i'$ . Пусть  $v := u_{y'} - u_{x'}$ . Рассмотрим теперь потенциал  $u + v$ . По каждому из рёбер  $xy$  и  $y'x'$  будет течь ток  $i + i'$ .

Но  $u+v=(u_x-u_{x'})-(u_y-u_{y'})$ . Из-за симметричности и правильности графа потенциал  $u_x - u_{x'}$  даёт ток  $1/k$  по ребру  $xy$ , а потенциал  $u_y - u_{y'} - 1/l$ . Отсюда

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = i + i' = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + i'.$$

Значит,

$$i' = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l}\right)\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{i'}{i} = \frac{1}{n-1}.$$

То есть по противоположному ребру течёт ток  $i/(n-1)$  (причём если по ребру  $xy$  он тёт от  $x$  к  $y$ , то по ребру  $x'y'$  он будет течь от  $y'$  к  $x'$ ).  $\square$

В частности, для икосаэдра получается ток  $i/11$ , додекаэдра  $-i/19$ , ромбододекаэдра  $-i/13$ , куба  $-i/7$ .

Следующий результат позволяет доказать теорему 3.2 для более широкого класса графов, чем рассмотренный ранее.

**ТЕОРЕМА 3.5** (теорема Фостера [14]). *В конечной электрической цепи с  $n$  вершинами на произвольном связном графе с произвольными сопротивлениями рёбер выполнено*

$$\sum_{xy} \frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = n - 1,$$

где сумма берётся по всем неориентированным рёбрам  $xy$  электрической цепи.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним, что потенциал  $u_z$  является решением следующей задачи Неймана:  $i(z) = (n-1)/n$  и  $i(w) = -1/n$  при  $w \neq z$ . Теорема получается из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{xy} \frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} &= \sum_{xy} (i_{u_x}(xy) - i_{u_y}(xy)) = \sum_{xy} (i_{u_x}(xy) + i_{u_y}(yx)) = \\ &= \sum_x \sum_{xy} i_{u_x}(xy) = \sum_x \frac{n-1}{n} = n - 1. \end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что в любой цепи  $i(xy) = -i(yx)$ . Третье равенство следует из того, что суммировать по ориентированным рёбрам можно двумя способами. Первый — суммировать по неупорядоченной паре (начало, конец) и обоим возможным направлениям (левая часть), второй — суммировать по началу, а внутри этого суммирования суммировать по концу (правая часть). Четвёртое равенство является следствием определения потенциала  $u_x$ . Пятое равенство вытекает из того, что в графе  $n$  вершин.

Осталось пояснить лишь первое равенство. Рассмотрим две соседние вершины  $x$  и  $y$ . Положим  $u := u_x - u_y$ . Потенциал  $u$  является решением

задачи Неймана, в которой в вершину  $x$  входит ток 1, а из вершины  $y$  выходит ток 1. По определению эффективного сопротивления между вершинами  $x$  и  $y$  получим

$$R(x \leftrightarrow y) = \frac{u(x) - u(y)}{i_u(x)}.$$

В доказательстве теоремы 3.2 было замечено, что  $i_u(x) = 1$ . По определению тока по ребру, имеем

$$u(x) - u(y) = i_u(xy)R(xy).$$

Объединяя это, получаем

$$\frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = i_u(xy).$$

Наконец, по определению  $i$

$$\frac{R(x \leftrightarrow y)}{R(xy)} = i_{u_x}(xy) - i_{u_y}(xy). \quad \square$$

Из теоремы Фостера следует теорема 3.2 для *рёберно-транзитивного* графа с единичными сопротивлениями — графа, для любых двух рёбер которого существует самосовмещение этого графа, переводящее первое ребро во второе (см. задачу 10 на стр. 63). Стоит заметить, что именно в этой общности теорема 3.2 была доказана в статье [19]. Класс рёберно-транзитивных графов шире, чем класс правильных графов. Простейший пример рёберно-транзитивного графа, который не является правильным, — это граф Дойля (известный также как граф Хольта, см. [9, 10, 16] и рис. 4).

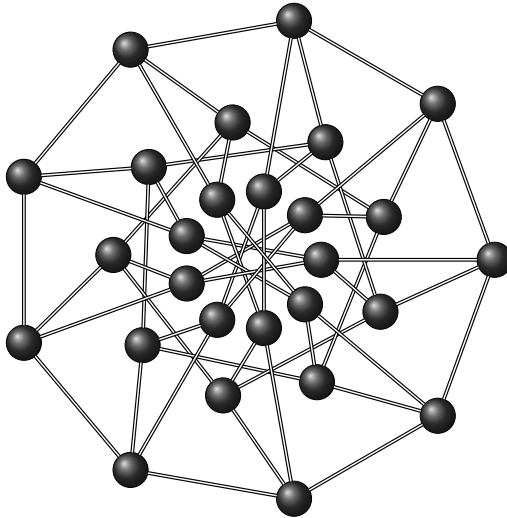


Рис. 4. Граф Дойля

## § 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВУМЕРНОЙ КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ

Теперь настало время обратиться к бесконечным электрическим цепям. Замечательное введение в этот предмет имеется у Земаяна [30]. Наше изложение во многом следует его подходу.

Начиная с этого момента все электрические цепи будут иметь единичные сопротивления рёбер.

Приведём определения понятий, используемых в формулировке теоремы 1.1(В). Рассмотрим *бесконечную квадратную сетку*  $\mathbb{Z}^2$ , состоящую из точек с целочисленными координатами, в которой все соседние точки (то есть точки на расстоянии 1) соединены единичными сопротивлениями.

Для функции  $u$ , заданной в узлах сетки  $\mathbb{Z}^2$ , будем обозначать через  $\square$  *оператор усреднения*<sup>3)</sup> по соседним вершинам:

$$\square u(m, n) := \frac{u(m-1, n) + u(m+1, n) + u(m, n-1) + u(m, n+1)}{4}.$$

В случае сетки  $\mathbb{Z}^2$  данное ранее определение гармонической функции становится таким: функция  $u$  гармонична в точке  $(m, n)$ , если  $\square u(m, n) = u(m, n)$ .

Назовём *стандартным потенциалом на  $\mathbb{Z}^2$*  функцию  $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую следующим аксиомам (сравните с аксиомами 1'-2 в § 2):

АКСИОМА 1'' (граничное условие Неймана и симметрия).

$$i_u(0, 0) = 1, \quad i_u(1, 0) = -1 \quad \text{и} \quad u(0, 0) = -u(1, 0).$$

АКСИОМА 2'' (правило токов Кирхгофа).

$$i_u(m, n) = 0 \quad \text{при} \quad (m, n) \neq (0, 0), (1, 0).$$

АКСИОМА 3'' (конечность тепловой мощности).  $Q_u < \infty$ .

Формула для тока на сетке  $\mathbb{Z}^2$  имеет особенно простой вид:

$$i_u(m, n) = 4u(m, n) - u(m-1, n) - u(m+1, n) - u(m, n-1) - u(m, n+1).$$

Таким образом, стандартный потенциал — это функция, гармоническая во всех узлах сетки  $\mathbb{Z}^2$ , кроме точек  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$ , для которых  $i_u(0, 0) = 1$ ,  $i_u(1, 0) = -1$ . Кроме того, тепловая мощность этой функции конечна и  $u(0, 0) = -u(1, 0)$ .

<sup>3)</sup> Часто рассматривается также *дискретный оператор Лапласа*  $\Delta := \square - 1$ , где 1 обозначает тождественное отображение.

По аналогии с эффективным сопротивлением конечных электрических цепей (1) определим сопротивление между соседними узлами сетки  $\mathbb{Z}^2$  как

$$R((0, 0) \leftrightarrow (1, 0)) := \frac{u(0, 0) - u(1, 0)}{i_u(0, 0)}.$$

Наше определение стандартного потенциала годится не для любой бесконечной электрической цепи. Например, для бесконечного дерева, у которого из каждой вершины выходит ровно 3 ребра, стандартный потенциал и сопротивление между соседними узлами не определяются однозначно аналогичными аксиомами. Существует другой подход к определению потенциала и сопротивления бесконечных электрических цепей с помощью «исчерпывания» конечными цепями. При таком подходе главная трудность заключается в обосновании корректности предельного перехода. Преодолеть её непросто, поэтому мы такой подход обсуждать не будем.

Как отмечалось ранее, для сопротивления между соседними узлами сетки  $\mathbb{Z}^2$  остаётся справедливой теорема 3.2, если в ней дробь  $1/n$  заменить нулём. Приведём несколько убедительных рассуждений «на физическом уровне строгости», обосновывающих этот результат. Как мы увидим, каждое такое рассуждение опирается на тот или иной «очевидный» факт, доказательство которого, на самом деле, совсем не элементарно и даже сложнее доказательства основного результата.

**РАССУЖДЕНИЕ С СУПЕРПОЗИЦИЕЙ** (см. ссылки в [30]). Будем рассуждать так же, как в доказательстве теоремы 3.2, только заменим  $1/n$  нулём. Пусть  $x := (0, 0)$  и  $y := (0, 1)$ . Рассмотрим следующие две ситуации. В первом случае подадим в узел  $x$  единичный ток, а во все остальные узлы — нулевые токи (это возможно, так как цепь бесконечная). Из соображений симметрии, по всем четырём рёбрам, выходящим из вершины  $x$ , текут одинаковые токи. Значит, по ребру  $xy$  течёт ток  $1/4$ . Во втором случае подадим единичный ток в узел  $y$ , а в остальные узлы — нулевые токи. По ребру  $xy$  течёт ток  $-1/4$ . Возьмём разность этих двух распределений тока. Теперь в узел  $x$  единичный ток входит, а из узла  $y$  он выходит. Ток по ребру  $xy$  равен  $1/4 + 1/4 = 1/2$ . Значит, разность потенциалов между  $x$  и  $y$  равна  $1/2$ . Поскольку в  $x$  втекает единичный ток, сопротивление между  $x$  и  $y$  равно  $1/2$ .  $\square$

*Критика рассуждения с суперпозицией*, [30]. Это рассуждение неявно опирается на следующие два факта. Во-первых, оно использует существование функции Грина на сетке  $\mathbb{Z}^2$ , то есть такого потенциала  $u_x(m, n)$ , для которого ток в узле  $x$  ненулевой, а во всех остальных узлах нулевой. Во-вторых, оно использует конечность тепловой мощности для разности

$u_x(m, n) - u_y(m, n)$  двух функций Грина (чтобы можно было утверждать, что эта разность есть стандартный потенциал). Последнее утверждение совсем не очевидно, так как сама функция Грина неограниченно возрастает на бесконечности и имеет бесконечную тепловую мощность.

**РАССУЖДЕНИЕ С НАЛОЖЕНИЕМ ШИНЫ.** Рассуждение с наложением шины — это попытка исправить недостатки в предыдущем рассуждении. Наложим шину с нулевым сопротивлением на периметр очень большого квадрата  $[-N, N] \times [-N, N]$ . Потенциалы на бесконечности стремятся к нулю, поэтому наложение шины мало повлияет на значение искомого сопротивления. Дальнейшие рассуждения проводятся с точностью до погрешности, которая стремится к нулю с ростом  $N$ . Если источник единичного тока подключён к точке  $(0, 0)$  и шине, то из точки  $(0, 0)$  в каждый из четырёх соседних узлов течёт ток, равный  $1/4$ . Если же источник единичного тока подключён к шине и точке  $(1, 0)$ , то из четырёх соседних узлов в точку  $(1, 0)$  втекает ток, равный  $1/4$ . Значит, при подключении обоих источников тока по ребру между  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  будет течь ток  $1/2$  и разность потенциалов в этих точках тоже будет равна  $1/2$ . Поскольку в  $(0, 0)$  втекает единичный ток, сопротивление между соседними узлами сетки равно  $1/2$ .  $\square$

*Критика рассуждения с наложением шины.* Наложённая нами шина симметрична относительно точки  $(0, 0)$ , но не точки  $(1, 0)$ . Поэтому мы не можем сделать вывод, что во второй ситуации все токи, вытекающие из узла  $(1, 0)$ , равны  $1/4$ . Можно показать, что эти токи близки к  $1/4$  при большом  $N$ , но для этого требуются тонкие оценки потенциала в рассматриваемой электрической цепи в узлах, соседних с шиной.

Приведём теперь другие рассуждения, которые, в отличие от предыдущих, сравнительно легко доводятся до строгого доказательства.

**РАССУЖДЕНИЕ С ДВОЙСТВЕННОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПЬЮ,** [29]. Рассмотрим *двойственную электрическую цепь*, изображённую на рис. 5 пунктирными линиями. Это тоже квадратная сетка, поэтому сопротивление  $R$  между её соседними узлами такое же, как у исходной. Покажем, что сопротивления двойственных цепей дают в сумме 1 (тогда каждое из этих сопротивлений равно  $1/2$ ).

Для этого укажем следующий способ построения стандартного потенциала на двойственной цепи, исходя из стандартного потенциала на исходной. Положим значения потенциала на концах ребра двойственной цепи, пересекающего ребро исходной цепи между  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$ , равными  $(1 - R)/2$  и  $(R - 1)/2$ , соответственно. На каждом из остальных рёбер двойственной цепи положим разность потенциалов равной току через пересекающее

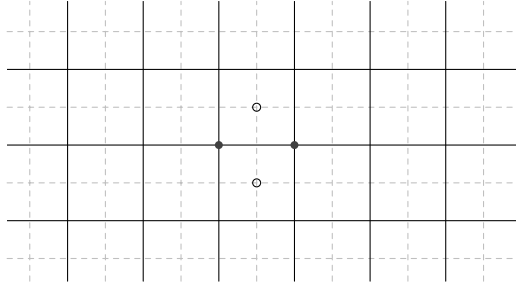


Рис. 5. Двойственные электрические цепи

его ребро исходной цепи (с подходящим знаком). Нетрудно убедиться (см. задачу 8 на стр. 63), что этим корректно определяется некоторая функция на двойственной цепи, удовлетворяющая аксиомам 1''–3'' с точностью до поворота на 90 градусов. Значит, построенная функция — стандартный потенциал и сопротивление двойственной цепи равно  $1 - R$ .  $\square$

Приведённое рассуждение использует только существование и единственность стандартного потенциала, которые будут доказаны в § 5. Недостаток этого рассуждения в том, что оно использует специфику сетки  $\mathbb{Z}^2$  и его трудно обобщить на другие бесконечные правильные графы. Поэтому мы не разбираем его подробно.

РАССУЖДЕНИЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ПЕРЕХОДОМ. Сетка на торе  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  — это правильный граф, который «стремится» к сетке  $\mathbb{Z}^2$  при неограниченном возрастании числа  $n$ . Поэтому сопротивление между соседними узлами сетки на торе  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  стремится с одной стороны, к сопротивлению между соседними узлами двумерной сетки, а с другой — к  $1/2$ , по теореме 3.2.  $\square$

Именно это рассуждение мы разберём подробно в последующих параграфах.

### § 5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОТЕНЦИАЛЕ НА КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ

Установим основные свойства потенциала на бесконечной квадратной сетке  $\mathbb{Z}^2$ . Наши рассуждения элементарны и основываются на методе релаксации (см., например, [5, с. 32–34]) и энергетических оценках, восходящих к Л. А. Люстернику [26, § 4.2].

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема существования стандартного потенциала). *Стандартный потенциал на  $\mathbb{Z}^2$  существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомая функция  $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  будет пределом последовательности функций, которую мы построим, используя следующую ите-

рациональную процедуру (*метод релаксации*). Выберем последовательность узлов  $(m_k, n_k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$ , где  $k \geq 0$ , посещающую каждый узел, кроме  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ , бесконечно много раз. Последовательность функций  $\{u_k\}_{k=0}^\infty$  задаётся начальными условиями

$$u_0(0, 0) = 1, \quad u_0(m, n) = 0 \quad \text{при } (m, n) \neq (0, 0),$$

граничными условиями

$$u_k(0, 0) = 1, \quad u_k(1, 0) = 0 \quad \text{при } k \geq 0$$

и рекуррентным соотношением

$$u_{k+1}(m, n) = \begin{cases} \square u_k(m, n) & \text{при } (m, n) = (m_k, n_k), \\ u_k(m, n) & \text{при } (m, n) \neq (m_k, n_k). \end{cases} \quad (2)$$

Докажем по индукции, что построенная последовательность функций удовлетворяет неравенствам

$$u_k(m, n) \leq u_{k+1}(m, n), \quad (3)$$

$$u_k(m, n) \leq \square u_k(m, n) \quad (4)$$

при всех  $m, n, k$ . При  $k = 0$  эти неравенства очевидны. При произвольном  $k \geq 0$  первое неравенство следует из второго. Действительно, при  $(m, n) = (m_k, n_k)$  имеем

$$u_k(m_k, n_k) \leq \square u_k(m_k, n_k) = u_{k+1}(m_k, n_k),$$

а при  $(m, n) \neq (m_k, n_k)$  выполняется равенство

$$u_k(m, n) = u_{k+1}(m, n).$$

Значит, для доказательства шага индукции достаточно проверить, что из (3)–(4) вытекает неравенство

$$u_{k+1}(m, n) \leq \square u_{k+1}(m, n).$$

Снова рассмотрим два варианта. Если  $(m, n) = (m_k, n_k)$ , то

$$u_{k+1}(m_k, n_k) = \square u_k(m_k, n_k) = \square u_{k+1}(m_k, n_k),$$

поскольку в узлах, соседних с  $(m_k, n_k)$ , на шаге  $k + 1$  значения функции не менялись. Если же  $(m, n) \neq (m_k, n_k)$ , то

$$u_{k+1}(m, n) = u_k(m, n) \leq \square u_k(m, n) \leq \square u_{k+1}(m, n).$$

Требуемые неравенства (3)–(4) доказаны.



Мы получили, что в каждой точке  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  числа  $\{u_k(m, n)\}$  образуют неубывающую последовательность, содержащуюся в отрезке  $[0, 1]$ . Значит,  $u_k(m, n)$  стремятся к значению некоторой предельной функции  $v(m, n)$ . Переходя к пределу в равенстве (2) (по такой подпоследовательности индексов  $k$ , для которых  $(m_k, n_k)$  — фиксированная точка), получаем, что  $v(m, n)$  есть гармоническая функция везде, кроме точек  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Искомая функция получается линейным преобразованием:

$$u(m, n) := \frac{v(m, n) - v(1 - m, -n)}{i_v(0, 0) - i_v(1, 0)}.$$

Здесь

$$i_v(0, 0) \geq v(0, 0) - v(1, 0) = 1 \quad \text{и} \quad i_v(1, 0) \leq v(1, 0) - v(0, 0) = -1,$$

поэтому знаменатель ненулевой.

Получаем, что функция  $u(m, n)$  тоже гармоническая везде, кроме точек  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Граничные условия Неймана и симметрия проверяются непосредственно.

Проверим, что тепловая мощность  $Q_u$  конечна. На каждом шаге метода релаксации тепловая мощность не увеличивается, так как для вершины  $(m, n) = (m_k, n_k)$  минимум квадратного трёхчлена

$$(u_k(m+1, n) - t)^2 + (u_k(m-1, n) - t)^2 + (u_k(m, n+1) - t)^2 + (u_k(m, n-1) - t)^2$$

достигается при

$$t = \square u_k(m, n) = u_{k+1}(m, n).$$

Поэтому тепловая мощность функции  $u_k$  остаётся ограниченной:

$$Q_{u_k} \leq Q_{u_0} = 4.$$

На любом квадрате  $N \times N$  тепловая мощность для функции  $u_k$  стремится к тепловой мощности функции  $v$ . Значит,  $Q_v \leq 4$ , а следовательно, тепловая мощность  $Q_u$  тоже конечна:

$$Q_u \leq \frac{4Q_v}{i_v(0, 0) - i_v(1, 0)} \leq 8. \quad \square$$

**ТЕОРЕМА 5.2** (теорема единственности стандартного потенциала). *Существует не более одного стандартного потенциала на  $\mathbb{Z}^2$ .*

**ЛЕММА 5.3** (лемма о тепловой мощности пути). *Пусть вершины  $x$  и  $y$  соединены в электрической цепи с единичными сопротивлениями путём из  $m$  рёбер. Тогда тепловая мощность этого пути не меньше, чем  $(u(x) - u(y))^2/m$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть путь из  $x$  в  $y$  состоит из вершин  $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ . Тогда по неравенству Коши — Буняковского тепловая мощность пути не меньше, чем

$$\sum_{k=0}^{m-1} (u(x_{k+1}) - u(x_k))^2 \geq \frac{(u(x) - u(y))^2}{m}. \quad \square$$

Обозначим через  $\Pi_n$  прямоугольник  $[-n, n+1] \times [-n, n]$ , а через  $\partial\Pi_n$  — его границу (см. рис. 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Пусть есть два различных стандартных потенциала  $u_1$  и  $u_2$ . Рассмотрим их разность  $u := u_1 - u_2$ . Для неё по-прежнему  $u(0, 0) = -u(1, 0)$ , тепловая мощность  $Q_u \leq 2Q_{u_1} + 2Q_{u_2}$

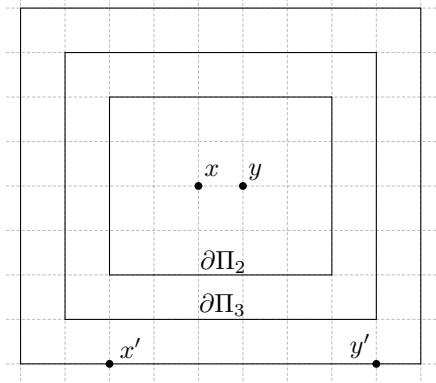


Рис. 6. Прямоугольники  $\Pi_n$

по-прежнему конечна, но  $i_u(x) = 0$  уже во всех узлах  $x$  сетки. Докажем, что такая функция  $u$  тождественно равна нулю. Предположим, что  $u(x) < u(y)$  для каких-то двух соседних узлов  $x$  и  $y$ , например,  $x = (0, 0)$  и  $y = (1, 0)$ . Рассмотрим прямоугольник  $\Pi_n$  (см. рис. 6). Так как  $i_u = 0$  внутри прямоугольника  $\Pi_n$ , по принципу максимума (теорема 2.5) найдутся узлы  $x', y' \in \partial\Pi_n$ , для которых  $u(x') \leq u(0, 0)$  и  $u(1, 0) \leq u(y')$ . Соединим  $x'$  и  $y'$  путём, проходящим по границе  $\partial\Pi_n$ . Он содержит не более  $8n + 2$  вершин, поэтому по лемме о тепловой

мощности пути (лемма 5.3) на нём выделяется тепловая мощность не менее  $\frac{|u(x') - u(y')|^2}{8n + 2}$ , что не менее  $\frac{|u(0, 0) - u(1, 0)|^2}{8n + 2}$ . Поэтому общая тепловая мощность

$$Q_u \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(0, 0) - u(1, 0)|^2}{8n + 2},$$

то есть бесконечна. Полученное противоречие доказывает, что неравенство  $u(x) < u(y)$  невозможно. Значит,  $u$  — константа. Поскольку  $u(0, 0) = -u(1, 0)$ , функция  $u$  равна нулю тождественно, то есть  $u_1 = u_2$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Стандартный потенциал  $u$  на  $\mathbb{Z}^2$  удовлетворяет функциональному уравнению  $u(1 - t, -n) = -u(t, n)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция  $\tilde{u}(t, n) := -u(1 - t, -n)$  тоже является стандартным потенциалом на  $\mathbb{Z}^2$ . Значит, по теореме единственности (теорема 5.2), получаем  $u(1 - t, -n) = -u(t, n)$ .  $\square$

ЛЕММА 5.5 (лемма о достижении максимума). *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  максимум стандартного потенциала  $u$  на  $\mathbb{Z}^2$ , взятый по всем узлам, не лежащим в  $\Pi_{n-1}$ , достигается на  $\partial\Pi_n$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $M = \sup_{x \notin \Pi_{n-1}} u(x)$ . По следствию 5.4 получим  $M \geq 0$ . Рассмотрим часть сетки  $\mathbb{Z}^2$  между прямоугольниками  $\Pi_n$  и  $\Pi_k$  с параметрами  $n < k$ . Ясно, что для достаточно больших  $k$  максимум функции  $u$  по такой фигуре будет больше  $M/2$ . По принципу максимума 2.5 максимум  $u$  по фигуре достигается на границе этой фигуры. Предположим, что при каком-то  $k$  он достигается на  $\partial\Pi_k$ . Тогда и при всех  $m > k$  максимум по части сетки  $\mathbb{Z}^2$  между прямоугольниками  $\Pi_n$  и  $\Pi_m$  достигается на  $\partial\Pi_m$ . По следствию 5.4 граница  $\partial\Pi_m$  содержит две точки  $x'$  и  $y'$ , такие что  $u(x') > M/2$ ,  $u(y') < -M/2$ . Соединим  $x'$  и  $y'$  путём, проходящим по  $\partial\Pi_m$ . Он содержит не более  $8m + 2$  вершин, поэтому по лемме 5.3 на  $\partial\Pi_m$  выделяется тепловая мощность не меньше  $M^2/(8m + 2)$ . Суммируя данные оценки по всем  $m > k$ , мы получаем, что тепловая мощность стандартного потенциала бесконечна, что противоречит определению. Значит, максимум  $u$  по рассматриваемой фигуре достигается на  $\partial\Pi_n$ . Следовательно, и максимум по внешности прямоугольника  $\Pi_n$  тоже достигается на границе  $\partial\Pi_n$  этого прямоугольника.  $\square$

ТЕОРЕМА 5.6 (теорема об убывании потенциала на бесконечности). *Стандартный потенциал  $u$  на  $\mathbb{Z}^2$  равномерно стремится к нулю на бесконечности, т. е.  $\max_{\partial\Pi_n} u \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $M := \max_{\partial\Pi_n} u$ . Тогда по лемме о достижении максимума 5.5  $\max_{\partial\Pi_m} u \geq M \geq 0$  при каждом  $m < n$ . По следствию 5.4 граница  $\partial\Pi_m$  содержит две точки  $x'$  и  $y'$ , такие что  $u(x') \geq M$ ,  $u(y') \leq -M$ . Соединим  $x'$  и  $y'$  путём, проходящим по границе. Он содержит не более  $8m + 2$  вершин, поэтому по лемме о тепловой мощности пути 5.3 на границе прямоугольника  $\Pi_m$  выделяется тепловая мощность не менее  $4M^2/(8m + 2)$ . Значит, общая тепловая мощность  $Q_u$  не менее  $\sum_{m=2}^n \frac{4M^2}{8m + 2}$ . Значит,

$$M^2 \leq \frac{2Q_u}{\sum_{m=3}^n \frac{1}{m}}.$$

Это означает, что  $M$  стремится к нулю с ростом  $n$ , что и требовалось.  $\square$

## § 6. СОПРОТИВЛЕНИЕ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ УЗЛАМИ СЕТКИ

Полученные в предыдущем разделе результаты выполняются не только для сетки  $\mathbb{Z}^2$ , но и в значительно более общей ситуации. Для доказательства теоремы 1.1(В) нам понадобятся их аналоги для сетки на торе  $\mathbb{Z}_{2n}^2$ .

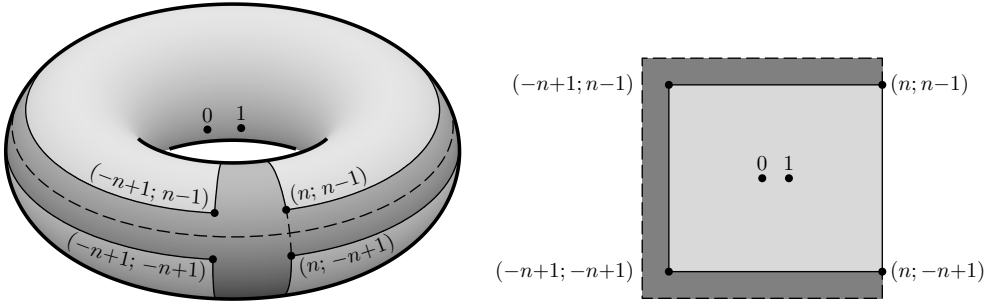


Рис. 7. Прямоугольник  $\Pi_{n-1}$  и его контур на торе

Подграф, в который переходит контур прямоугольника  $\Pi_{n-1}$  при склейке противоположных сторон квадрата с вершинами  $(n; n)$ ,  $(-n; n)$ ,  $(-n; -n)$ ,  $(n; -n)$ , будем по-прежнему обозначать через  $\Pi_{n-1} \subset \mathbb{Z}_{2n}^2$ , см. рис. 7. Стандартный потенциал  $u_n$  на  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  определяется аналогично стандартному потенциалу на  $\mathbb{Z}^2$ . Его существование и единственность следуют из теоремы 2.6. Для него выполняется следующий аналог теоремы 5.6.

**ТЕОРЕМА 6.1** (теорема об убывании на бесконечности). *Значения стандартного потенциала  $u_n$  на  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  на подграфе  $\Pi_{n-1}$  равномерно стремятся к нулю, то есть  $\max_{\Pi_{n-1}} u_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.6 и опирается на следующий результат предыдущей статьи [5].

**ТЕОРЕМА 6.2** (закон сохранения энергии). *Если электрическая цепь имеет ровно 2 граничные вершины  $x$  и  $y$ , то выполнено равенство*

$$Q_u = \frac{(g(x) - g(y))^2}{R(x \leftrightarrow y)} = i_u(x)^2 \cdot R(x \leftrightarrow y).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1.** Пусть  $M := \max_{\partial \Pi_n} u_n$ . Тогда по принципу максимума  $\max_{\partial \Pi_m} u \geq M \geq 0$  при каждом  $m < n$ . Аналогично следствию 5.4 получаем, что  $\partial \Pi_m$  содержит две точки  $x'$  и  $y'$ , такие что  $u(x') \geq M$ ,  $u(y') \leq -M$ . Соединим  $x'$  и  $y'$  путём, проходящим по границе. Он содержит не более  $8m + 2$  вершин, поэтому по лемме 5.3 тепловая мощность, выделяемая на границе прямоугольника  $\Pi_m$ , не меньше  $4M^2 / (8m + 2)$ . Значит, общая тепловая мощность  $Q_{u_n}$  не менее  $\sum_{m=2}^n \frac{4M^2}{8m + 2}$ . Поэтому

$$M^2 \leq \frac{2Q_{u_n}}{\sum_{m=3}^n \frac{1}{m}}.$$

Обозначим через  $R_n$  сопротивление сетки  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  на торе между узлами  $x = (0, 0)$  и  $y = (1, 0)$ . С одной стороны, согласно принципу максимума

$u_n(x) - u_n(y) = i(xy) \leq 1$  (ток, текущий по одному из рёбер, не превосходит суммарного тока). С другой стороны, по закону сохранения энергии 6.2 для стандартного потенциала  $Q_{u_n} = R_n = u_n(x) - u_n(y)$ . Значит,  $Q_{u_n} \leq 1$  и  $M$  стремится к нулю с ростом  $n$ , что и требовалось.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1(B). По нашему соглашению, прямоугольник  $\Pi_{n-1}$  можно рассматривать одновременно и как подмножество сетки  $\mathbb{Z}^2$ , и как подмножество сетки  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  на торе. Рассмотрим на этом прямоугольнике разность  $u - u_n$  стандартных потенциалов на  $\mathbb{Z}^2$  и  $\mathbb{Z}_{2n}^2$ . По свойствам стандартных потенциалов, эта разность является гармонической функцией внутри прямоугольника  $\Pi_{n-1}$ . Значит, по принципу максимума 2.5, её максимальное значение достигается на границе  $\partial\Pi_{n-1}$ . По теоремам 5.6 и 6.1 это максимальное значение стремится к нулю с ростом  $n$ , значит, и в любой внутренней точке прямоугольника разность  $u - u_n$  стремится к нулю. В частности,  $u(0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0, 0)$ .

Из условия Неймана и симметрии следует, что сопротивление сетки  $\mathbb{Z}^2$  между узлами  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  равно

$$R = \frac{u(0, 0) - u(1, 0)}{i_u(0, 0)} = 2u(0, 0),$$

а сопротивление сетки  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  на торе между теми же узлами равно

$$R_n = \frac{u_n(0, 0) - u_n(1, 0)}{i_{u_n}(0, 0)} = 2u_n(0, 0).$$

Пользуясь доказанной сходимостью для этих выражений и теоремой 3.2, получаем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Отметим одно следствие формулы  $R = 2u(0, 0)$ , установленной в этом доказательстве.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Значение стандартного потенциала на  $\mathbb{Z}^2$  в начале координат равно  $1/4$ .*

## § 7. ДИСКРЕТНАЯ ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Следующее утверждение, которое нам нужно для доказательства основной теоремы, является дискретным аналогом теоремы Лиувилля из комплексного анализа. Это не только красивый факт, но и удобный инструмент для изучения гармонических функций. Дискретная теорема Лиувилля известна по крайней мере с 1930-х годов, см. работу Капуляда [8], а также

Хейльбронна [15]. Два различных доказательства усиленной версии этой теоремы на сетке  $\mathbb{Z}^n$  (см. замечание 7.4) могут быть найдены у Даффина [12] (см. теорему 5 и следствие из неё) и Ито — Маккина [17, с. 124]. Дискретная теорема Лиувилля многократно обсуждалась на страницах «Математического Просвещения» (см. также [6]).

**ТЕОРЕМА 7.1** (дискретная теорема Лиувилля). *Ограниченная гармоническая на сетке  $\mathbb{Z}^2$  функция является константой.*

Приведём два разных доказательства.

**ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1** (см. [8]). Рассмотрим функции

$$\Delta_x u(m, n) = u(m + 1, n) - u(m, n) \quad \text{и} \quad \Delta_y u(m, n) = u(m, n + 1) - u(m, n),$$

которые также будут ограниченными и гармоническими. Пусть функция  $\Delta_x u(m, n)$  не равна нулю тождественно. Переходя при необходимости от функции  $u$  к  $-u$ , можно считать, что

$$M = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |u(m, n)| = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} u(m, n) > 0.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти точку  $(m, n)$ , для которой  $u(m, n) \geq M - \varepsilon$ . Из гармоничности функции  $u$  следует, что в каждой из соседних с  $(m, n)$  точек значения функции  $u$  не меньше, чем  $M - 3\varepsilon$ , а в каждой из точек, в которые из  $(m, n)$  можно дойти по рёбрам за  $k$  шагов, — не меньше, чем  $M - 3^k \varepsilon$ . Значение  $\varepsilon$  может быть выбрано сколь угодно малым, поэтому можно найти область сколь угодно большого размера, в которой значения функции  $u$  не меньше, чем  $M/2$ . В частности, на сетке  $\mathbb{Z}^2$  можно найти квадрат  $N \times N$  сколь угодно большого размера такой, что  $\Delta_x u(m, n) > M/2$  для всех точек этого квадрата. Из этого следует, что функция  $u(m, n)$  возрастёт при движении внутри квадрата параллельно оси  $Ox$  по крайней мере на  $M \cdot N/2$ . Но это противоречит ограниченности  $u(m, n)$ .

Противоречие показывает, что  $\Delta_x u(m, n) = 0$ . Аналогично проверяется, что  $\Delta_y u(m, n) = 0$ . Значит,  $u$  — постоянная функция.  $\square$

Недостатком этого доказательства является то, что оно существенно использует специфику квадратной сетки. Следующее рассуждение проходит для широкого класса сеток на плоскости, а также позволяет установить более сильный факт. Оно использует лемму, доказанную в предыдущей статье [5, раздел 3.2].

**ЛЕММА 7.2** (лемма о сопротивлении квадрата). *Сопротивление между центром и границей квадратной сетки размером  $2n \times 2n$  стремится к бесконечности при неограниченном возрастании  $n$ .*

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Предположим противное: пусть  $u(m, n)$  — ограниченная гармоническая функция на сетке  $\mathbb{Z}^2$ , которая не является константой. Тогда найдутся два соседних узла, в которых данная функция принимает разные значения. Для простоты будем считать, что  $u(0, 0) = 0$ ,  $u(1, 0) > 0$  (прибавление константы сохраняет гармоничность и ограниченность функции). Тогда

$$M = \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{u(m, n)\} > 0.$$

Определим последовательность функций  $\{u_k\}$  как последовательность потенциалов на клетчатых прямоугольниках  $\Pi_k$  с граничными условиями Дирихле

$$u_k(0, 0) = 0, \quad u_k(m, n)|_{(m,n) \in \partial \Pi_k} = M.$$

Тогда, согласно принципу максимума 2.5, в любой точке  $(m, n) \in \Pi_k$  будет выполняться оценка  $u(m, n) \leq u_k(m, n)$ .

По лемме о сопротивлении квадрата 7.2 получаем, что сопротивление между узлом  $(0, 0)$  и границей клетчатого прямоугольника  $\Pi_k$  стремится к бесконечности с ростом  $k$ . Так как разность потенциалов между  $(0, 0)$  и границей фиксирована и равна  $M$ , втекающий в эту цепь через узел  $(0, 0)$  ток стремится к нулю. Значит, ток, текущий по каждому из рёбер, выходящих из начала координат, стремится к нулю с ростом  $k$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно так выбрать значение  $k$ , чтобы выполнялись оценки  $u(1, 0) \leq u_k(1, 0) \leq \varepsilon$ . Но это противоречит предположению  $u(1, 0) > 0$ . Значит,  $u(m, n)$  — постоянная функция.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 7.3.** Если функция на сетке  $\mathbb{Z}^2$  ограничена и удовлетворяет аксиомам 1'' и 2'' (но не обязательно 3''), то она совпадает со стандартным потенциалом на  $\mathbb{Z}^2$ .

Иными словами, в определении стандартного потенциала  $u$  на  $\mathbb{Z}^2$  вместо конечности тепловой мощности можно требовать выполнения более слабого условия — ограниченности функции  $u$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $v$  — ограниченная функция, удовлетворяющая аксиомам 1'' и 2''. Пусть  $u$  — стандартный потенциал на  $\mathbb{Z}^2$ . Тогда функция  $u - v$  ограничена и гармонична во всех узлах сетки  $\mathbb{Z}^2$ . По дискретной теореме Лиувилля  $u - v$  есть константа. Но, как и обе функции  $u$  и  $v$ , функция  $u - v$  удовлетворяет условию симметрии  $(u - v)(0, 0) = -(u - v)(1, 0)$ , значит, функция  $u - v$  тождественно равна нулю и  $v$  совпадает с  $u$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.4.** Второе доказательство дискретной теоремы Лиувилля устанавливает на самом деле более сильное утверждение: всякая функция, гармоническая на сетке  $\mathbb{Z}^2$  и ограниченная *снизу*, является константой.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Второе доказательство теоремы позволяет получить ещё одно усиление дискретного аналога теоремы Лиувилля: ограниченная функция, гармоническая на множестве  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , является константой.

Действительно, после того как мы переместили начало координат в выбранную нами точку, гармоничность функции в начале координат никак не использовалась. Поэтому, повторяя рассуждения из доказательства дискретной теоремы Лиувилля (меняя, если потребуется, знак данной функции), получаем, что значения данной функции в точках  $(0, \pm 1)$  и  $(\pm 1, 0)$  должны совпадать со значением в начале координат, то есть функция должна быть гармонической и в точке  $(0, 0)$ .

Таким образом, у непостоянной ограниченной функции гармоничность должна нарушаться по крайней мере в двух точках, как это и происходит в случае стандартного потенциала.

## § 8. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

В предыдущей статье [5] мы подробно обсудили задачу о возвращении случайного блуждания. Постановка задачи о случайном блуждании восходит к Пирсону (см. [22]). Рэлей (см. [25]), отвечая на вопрос Пирсона, сразу заметил, что случайные блуждания можно анализировать методами гармонического анализа. Задача о возвращении случайного блуждания по сетке произвольной размерности была решена Пойа [24]. Доказательство с использованием электрических цепей, по-видимому, принадлежит Нэш-Вильямсу.

Приведём математическое определение случайного блуждания на сетке  $\mathbb{Z}^2$ , о котором идёт речь в теореме 1.1(A) (мотивировка этого определения была дана в начале предыдущей статьи [5]). *Траекторией* длины  $T + 1$  назовём упорядоченный набор  $T + 1$  узлов квадратной сетки, причём узлы, соседние в наборе, являются соседними и в сетке. *Положением* в момент  $t$  назовём  $t$ -й узел в этом наборе. *Случайным блужданием*, стартующим в узле  $(m_0, n_0)$ , назовём отображение, которое каждой строке  $s$  длины  $T$  из символов ‘L’, ‘R’, ‘U’, ‘D’ сопоставляет траекторию длины  $T + 1$  по следующим правилам:

1) Положение в момент 1 — это узел  $(m_0, n_0)$ .

2) Если  $(m, n)$  — положение в момент  $t$ , где  $1 \leq t \leq T$ , то положение в момент  $t + 1$  — это:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (m + 1, n), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'R'} ; \\ (m - 1, n), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'L'} ; \\ (m, n + 1), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'U'} ; \\ (m, n - 1), & \text{если } y \neq (0, 0), (1, 0) \text{ и } t\text{-й символ в строке } s \text{ равен 'D'} ; \\ (m, n), & \text{если } y = (0, 0) \text{ или } y = (1, 0). \end{array} \right.$$



Вероятностью  $P_T(m, n)$  того, что случайное блуждание, стартующее из узла  $(m, n)$ , за  $T$  шагов достигнет узла  $(0, 0)$  раньше, чем узла  $(1, 0)$ , назовём долю строк  $s$  длины  $T$ , для которых соответствующая траектория заканчивается узлом  $(0, 0)$ . Предел этой вероятности при  $T \rightarrow \infty$  назовём вероятностью  $P(m, n)$  того, что случайное блуждание, стартующее из узла  $(m, n)$ , достигнет узла  $(0, 0)$  раньше, чем узла  $(1, 0)$ . В частности,  $P(0, 0) = 1$ ,  $P(1, 0) = 0$ .

**ТЕОРЕМА 8.1** (теорема существования). *Вероятность  $P(m, n)$  существует, то есть для каждого узла  $(m, n)$  последовательность  $P_T(m, n)$  имеет предел при  $T \rightarrow \infty$ .*

**ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $n_T(m, n)$  количество путей длины  $T$  на сетке  $\mathbb{Z}^2$ , которые начинаются в узле  $(m, n)$ , проходят через узел  $(0, 0)$  и попадают в узел  $(1, 0)$  не позже, чем в узел  $(1, 0)$ . Ясно, что если такой путь длины  $T$  продолжить на 1 шаг любым из 4 возможных способов, то получится такой путь длины  $T + 1$ . Действительно, при любом продолжении пути он по-прежнему будет проходить через узел  $(0, 0)$  и попасть в узел  $(1, 0)$  сможет только позже, чем в  $(0, 0)$ . Значит,  $n_{T+1}(m, n) \geq 4n_T(m, n)$ . По определению

$$P_{T+1}(m, n) = \frac{n_{T+1}(m, n)}{4^{T+1}} \geq \frac{n_T(m, n)}{4^T} = P_T(m, n).$$

Получаем, что в каждой точке  $(m, n)$  последовательность  $P_T(m, n)$  монотонно возрастает и ограничена сверху единицей. Значит, она имеет предел.  $\square$

Приведём также набросок другого доказательства теоремы существования, похожего на доказательство теоремы 5.1 (важное отличие состоит в том, что в рекуррентном соотношении для  $P_T(m, n)$  оператор усреднения применяется ко всем узлам одновременно, а не последовательно).

**ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По определению случайного блуждания последовательность функций  $P_T(m, n)$  полностью характеризуется следующими свойствами:

- 1) (начальные условия)  $P_0(0, 0) = 1$ ,  $P_0(m, n) = 0$  при  $(m, n) \neq (0, 0)$ ;
- 2) (граничные условия)  $P_T(0, 0) = 1$ ,  $P_T(1, 0) = 0$  при  $T = 0, 1, 2, \dots$ ;
- 3) (рекуррентное соотношение)

$$P_{T+1}(m, n) = \square P_T(m, n) \quad \text{при } (m, n) \neq (0, 0), (1, 0). \quad (5)$$

Из этих свойств следует, что в каждом узле  $(m, n)$  сетки значения  $P_T(m, n)$  образуют неубывающую последовательность, ограниченную сверху единицей. Для доказательства достаточно провести индукцию по пара-

метру  $T$ : при  $(m, n) \neq (0, 0), (1, 0)$  имеем

$$P_{T+1}(m, n) = \square P_T(m, n) \geq \square P_{T-1}(m, n) = P_T(m, n).$$

Значит, во всех узлах сетки существует предел  $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T(m, n)$  и функция  $P(m, n)$  определена корректно.  $\square$

Вероятность  $P(m, n)$  обладает многими свойствами стандартного потенциала на  $\mathbb{Z}^2$ .

**ЛЕММА 8.2.** *Функция  $P(m, n)$  ограничена, гармонична во всех узлах, кроме точек  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ , и удовлетворяет функциональному уравнению  $P(m, n) = 1 - P(1 - m, -n)$ .*

Для доказательства леммы 8.2 нам понадобится следующее утверждение, которое является одним из вариантов теоремы Пойа, доказанной в предыдущей статье [5]. Для него мы приведём альтернативное доказательство.

**ЛЕММА 8.3.** *Случайное блуждание, стартующее в произвольном узле сетки  $\mathbb{Z}^2$ , с вероятностью 1 достигнет начала координат.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.3.** Пусть  $Q_T(m, n)$  — вероятность того, что случайное блуждание, стартующее в узле  $(m, n)$ , достигнет начала координат не более чем за  $T$  шагов. В частности,  $Q_T(0, 0) = 1$  для любого  $T \geq 0$ . По определению, в каждом узле  $(m, n)$ , отличном от начала координат, последовательность  $\{Q_T(m, n)\}_{T=0}^{\infty}$  не убывает, находится в пределах от 0 до 1 и удовлетворяет уравнению

$$Q_{T+1}(m, n) = \square Q_T(m, n). \quad (6)$$

Значит, существует функция  $Q(m, n) = \lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(m, n)$  — вероятность попасть в начало координат, начиная из точки  $(m, n)$ . При этом  $Q(0, 0) = 1$ . Переходя в равенстве (6) к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получаем, что функция  $Q$  гармонична во всех узлах сетки  $\mathbb{Z}^2$  за исключением, быть может, начала координат. Согласно замечанию 7.5 функция  $Q(m, n)$  равна единице тождественно.  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.2.** Значения функции  $P(m, n)$  лежат между нулём и единицей, поскольку аналогичным свойством обладает каждая из функций  $P_T(m, n)$ . Для доказательства гармоничности функции  $P(m, n)$  достаточно перейти к пределу в равенстве (5).

Для вывода функционального уравнения заметим, что по соображениям симметрии величина  $P(1 - m, -n)$  равна вероятности того, что случайное блуждание, стартующее из узла  $(m, n)$ , достигнет узла  $(1, 0)$  раньше, чем узла  $(0, 0)$ . Поэтому  $P(m, n) + P(1 - m, -n)$  равно вероятности того, что случайное блуждание, стартующее из узла  $(m, n)$ , достигнет хотя бы

одного из узлов  $(0, 0)$  или  $(1, 0)$ . Согласно лемме 8.3 последняя вероятность тождественно равна единице, то есть  $P(m, n) + P(1 - m, -n) = 1$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.4 (физическая интерпретация вероятности достижения). Вероятность  $P(m, n)$  связана со стандартным потенциалом равенством

$$u(m, n) = \frac{1}{2} \left( P(m, n) - \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

в частности,  $i_P(0, 0) = 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$v(m, n) := \frac{1}{2} \left( P(m, n) - \frac{1}{2} \right).$$

По лемме 8.2 она ограничена и удовлетворяет равенствам

$$v(0, 0) = -v(1, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad i_v(0, 0) = -i_v(1, 0),$$

аналогичным свойствам  $1''$ - $2''$  стандартного потенциала  $u$ . Заметим, что  $i_v(0, 0) = -i_v(1, 0) \neq 0$ , поскольку в противном случае  $v$  была бы непостоянной функцией ( $v(0, 0) = -v(1, 0) = 1/2$ ), гармонической во всех узлах сетки  $\mathbb{Z}^2$ , что противоречило бы дискретной теореме Лиувилля. Значит, можно рассмотреть функцию  $v(m, n)/i_v(0, 0)$ . Она ограничена, удовлетворяет условиям  $1''$ - $2''$  и по следствию 7.3 совпадает со стандартным потенциалом, то есть

$$u(m, n) = \frac{v(m, n)}{i_v(0, 0)} = \frac{1}{i_P(0, 0)} \left( P(m, n) - \frac{1}{2} \right).$$

Подставляя в эту формулу  $(m, n) = (0, 0)$  и пользуясь равенствами  $P(0, 0) = 1$ ,  $u(0, 0) = 1/4$  (следствие 6.3), находим значение  $i_P(0, 0) = 2$ , что и приводит к утверждению следствия.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Отметим, что при доказательстве равенства (7) нельзя было непосредственно воспользоваться теоремой единственности 5.2, поскольку для функции  $P$  аксиома  $3''$  (конечность тепловой мощности) априори может не выполняться. Рассуждениями из второго доказательства теоремы 8.1 в действительности можно получить конечность тепловой мощности для функции  $P$ , однако это требует более сложных соображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1(A). Вероятность возвращения в начало координат, по определению, есть

$$\frac{P(1, 0) + P(-1, 0) + P(0, 1) + P(0, -1)}{4} = 1 - \frac{i_P(0, 0)}{4}.$$

Подставляя в это равенство значение  $i_P(0, 0) = 2$  из следствия 8.4, приходим к утверждению теоремы.  $\square$

Таблица 1

Значения функции Грина  $G(m, n)$ 

$n \backslash m$	-2	-1	0	1	2
-2	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{8}{3\pi}$
-1	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$
0	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$
1	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$
2	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$2 - \frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$	$\frac{8}{3\pi}$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Приведённое доказательство теоремы 1.1(A) на первый взгляд может показаться слишком простым. Однако следует учесть, что, применяя следствие 8.4, мы опираемся на теоремы единственности и существования стандартного потенциала, дискретный аналог теоремы Лиувилля и теорему 1.1(B).

## § 9. ФУНКЦИЯ ГРИНА

В этом разделе мы приведём без доказательств некоторые факты о бесконечной квадратной сетке единичных сопротивлений. Центральную роль в дальнейшем рассказе будет играть *функция Грина*  $G(m, n)$ , которая определяется как сопротивление между узлами сетки  $\mathbb{Z}^2$  с координатами  $(0, 0)$  и  $(m, n)$ , см. задачу 1. (Отметим, что для более сложных сеток функция Грина определяется по-другому.)

Значения функции Грина  $G(m, n)$  можно вычислить по формуле [28]

$$G(m, n) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi mx) \cdot \cos(\pi ny)}{\sin^2 \frac{\pi x}{2} + \sin^2 \frac{\pi y}{2}} dx dy.$$

Они были впервые найдены Маккри и Уиплом [20] (см. также книгу [23, стр. 372]), а их аналоги для треугольной и шестиугольной сеток — Аткинсоном и ван Стенвейком [7]. Значения при  $|m|, |n| \leq 2$  даны в табл. 1.

Наиболее простая формула получается для диагональных значений

$$G(n, n) = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right). \quad (8)$$

По ним и по значению  $G(1, 0) = 1/2$ , найденному в теореме 1.1(B), остальные значения восстанавливаются исходя из гармоничности  $G$  вне начала

координат (см. ниже) и равенства  $G(m, n) = G(n, m)$ . Интересно, что в задаче о нахождении сопротивлений, как и в задаче о случайном блуждании, наблюдается асимптотическая изотропность сетки  $\mathbb{Z}^2$ . В данном случае она проявляется в том, что при больших значениях  $r = \sqrt{m^2 + n^2}$  значения  $G(m, n)$  зависят главным образом лишь от расстояния до начала координат (см. [11, 28]):

$$G(m, n) = \frac{1}{2\pi}(2 \ln r + \ln 8 + 2\gamma) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Функция Грина  $G(m, n)$  однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется следующими свойствами.

1<sup>'''</sup>.  $G(0, 0) = 0$ .

2<sup>'''</sup>.  $G(m, n)$  гармонична во всех узлах сетки, кроме начала координат.

3<sup>'''</sup>.  $G(m, n) = O(\ln r)$ .

Указанные свойства позволяют вычислять значения стандартного потенциала, исходя из значений функции Грина. Стандартный потенциал на двумерной сетке можно задать формулой

$$u(m, n) = \frac{1}{2}G(1 - m, n) - \frac{1}{2}G(m, n).$$

Действительно, по свойству 2<sup>'''</sup> получаем, что  $\frac{1}{2}G(1 - m, n) - \frac{1}{2}G(m, n)$  — гармоническая вне узлов  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  функция. Из равенства (9) следует, что она стремится к нулю на бесконечности. Так как  $G(1, 0) = 1/2$ , получаем, что  $i_G(0, 0) = -2$ . Значит, по дискретной теореме Лиувилля 7.1 она совпадает со стандартным потенциалом. В частности, это позволяет найти первые значения стандартного потенциала на  $\mathbb{Z}^2$  (см. табл. 2).

Таблица 2

Значения стандартного потенциала  $u(m, n)$

$n \backslash m$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$\frac{11}{4} - \frac{128}{15\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{5}{4} + \frac{4}{\pi}$	$\frac{5}{4} - \frac{4}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{11}{4} + \frac{128}{15\pi}$
1	$-\frac{41}{4} + \frac{197}{3\pi}$	$-\frac{7}{4} + \frac{17}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{7}{4} - \frac{17}{3\pi}$	$\frac{41}{4} - \frac{197}{3\pi}$
0	$\frac{63}{4} - \frac{148}{3\pi}$	$\frac{13}{4} - \frac{10}{\pi}$	$\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4} + \frac{2}{\pi}$	$-\frac{13}{4} + \frac{10}{\pi}$	$-\frac{63}{4} + \frac{148}{3\pi}$
-1	$-\frac{41}{4} + \frac{97}{3\pi}$	$-\frac{7}{4} + \frac{17}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$	$\frac{7}{4} - \frac{17}{3\pi}$	$\frac{41}{4} - \frac{97}{3\pi}$
-2	$\frac{11}{4} - \frac{128}{15\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{5}{4} + \frac{4}{\pi}$	$\frac{5}{4} - \frac{4}{\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}$	$-\frac{11}{4} + \frac{128}{15\pi}$

Таблица 3

Числа Делануа

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	13
2	1	5	13	25	41	61	85
3	1	7	25	63	129	231	377
4	1	9	41	129	321	681	1289

Ещё один любопытный факт заключается в том, что слагаемые в приведённой таблице, не содержащие числа  $\pi$ , — это, с точностью до знака и деления на 4, числа Делануа  $D(m, n)$  (см. [27] и табл. 3), которые определяются как число путей из начала координат в точку  $(m, n)$ , состоящих из векторов  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, 1)$ . Эти числа легко находятся из начального условия  $D(0, 0) = 1$  и рекуррентного соотношения

$$D(m, n) = D(m - 1, n) + D(m, n - 1) + D(m - 1, n - 1).$$

Все эти результаты доказываются обычно с помощью рядов Фурье. Способ элементарного вычисления значений функции Грина  $G(m, n)$  при  $(m, n) \neq (0, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$  неизвестен (если не считать несколько искусственной «элементаризации», когда приближённое решение строится с помощью «элементарных» конечных рядов Фурье, а точное решение получается путём предельного перехода). В следующих задачах приводятся некоторые свойства функции Грина, которые удаётся доказать элементарно.

### ЗАДАЧИ

Обозначим через  $u_{m,n}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  функцию, которая определяется аналогично стандартному потенциалу на  $\mathbb{Z}^2$  с заменой узла  $(1, 0)$  на  $(m, n)$ .

1. Для любого узла  $(m, n)$  функция  $u_{m,n}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  существует и единственна. В частности, корректно определено *сопротивление* между узлами  $(0, 0)$  и  $(m, n)$ :

$$G(m, n) := \frac{u_{m,n}(0, 0) - u_{m,n}(m, n)}{i_u(0, 0)}.$$

2. С помощью формулы (8), стр. 60, и свойства  $2'''$ , стр. 61, найдите значения функции  $G(m, n)$  при  $m = 5$  и  $0 \leq n \leq 5$ .

3. С помощью таблицы значений функции  $G(m, n)$  найдите значения функции  $u_{1,1}(m, n)$  ( $-2 \leq m, n \leq 3$ ).

4. С помощью формулы (8) объясните, почему в табл. 2 слагаемые, не содержащие числа  $\pi$ , с точностью до деления на 4 и знака совпадают с числами Делануа из табл. 3. Как будут выражаться через числа Делануа аналогичные слагаемые из табл. 1?

5. Объясните совпадение чисел вида  $u(n, n)$  и  $u(n, n + 1)$  при  $n \geq 1$  (см. табл. 2).

6. Предположим, что любые две вершины  $x$  и  $y$  графа можно поменять местами некоторым самосовмещением этого графа. Тогда  $R(x \leftrightarrow y) = 2(u_x(y) - u_x(x))$ .

7. Докажите свойство  $2'''$  функции Грина, пользуясь предыдущей задачей для сетки  $\mathbb{Z}_{2n}^2$  на торе и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ .

8. Проверьте корректность построения и аксиомы  $1''-3''$  для функции, построенной в «рассуждении с двойственными цепями» из § 4.

9. Останется ли справедливой теорема 3.2, если плоскость, с нарисованной на ней сеткой, свернуть в цилиндр? (Как нужно сворачивать плоскость, чтобы граф на цилиндре был правильным?)

10. Выведите теорему 3.2 из теоремы Фостера.

11. Выведите теорему 3.2 из *теоремы Кирхгофа о деревьях*: сопротивление между соседними вершинами в связном конечном графе равно вероятности того, что случайно выбранное остовное дерево этого графа содержит ребро, соединяющее выбранные вершины.

12. Пусть источник единичного тока подсоединён к двум узлам некоторой конечной электрической цепи. Тогда ток, протекающий по любому ребру этой цепи, не превосходит единицы.

13. Докажите, что правильный граф рёберно-транзитивен.

14. Докажите, что граф Дойля не является правильным.

15. Пусть у конечного связного графа эффективные сопротивления между любыми соседними вершинами равны. Является ли этот граф рёберно-транзитивным?

Ещё довольно много интересных задач можно найти в книге [2].

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны И. И. Богданову и А. И. Храброву за полезные обсуждения, а также Е. П. Вдовину за информацию о графе Дойля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Баранов Д., Скопенков М., Устинов А. Сопротивление между узлами решётки // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 229–230.

- [2] *Вавилов В. В., Устинов А. В.* Задачи на клетчатой бумаге. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2006.
- [3] *Гальперин Г. А.* Мой друг Андрей Ходулёв // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 4. М.: МЦНМО, 2000. С. 8–32.
- [4] *Скопенков М., Прасолов М., Дориченко С.*, Разрезания металлического прямоугольника // Квант. № 3. 2011. С. 10–16.
- [5] *Скопенков М., Смыкалов В., Устинов А.* Случайные блуждания и электрические цепи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 25–47.
- [6] *Храбров А. И.* Дискретные гармонические функции // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2005 год. СПб.: Невский диалект, 2005. С. 112–145.
- [7] *Atkinson D., van Steenwijk F. J.* Infinite resistive lattices // American Journal of Physics. 1999. V. 67. P. 486–492.
- [8] *Capoulade J.* Sur quelques propriétés des fonctions harmoniques et des fonctions preharmoniques // Mathematica (Cluj). 1932. V. 6. P. 146–151.
- [9] *Doyle P. G.* A 27-vertex graph that is vertex-transitive and edge-transitive but not 1-transitive. ArXiv Mathematics e-prints <http://arxiv.org/abs/math/0703861>.
- [10] *Doyle P. G.* On Transitive Graphs // Senior Thesis. Cambridge, MA, Harvard College, April 1976.
- [11] *Duffin R., Shaffer D.* Asymptotic expansion of double Fourier transforms // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 581–596.
- [12] *Duffin R. J.* Discrete potential theory // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 233–251.
- [13] *Flanders H.* Infinite networks: I—Resistive networks // IEEE Transactions on circuit theory. 1971. V. 18, № 3. P. 326–331.
- [14] *Foster R. M.* The average impedance of an electrical network // Reissner Anniversary Volume, Contributions to Applied Mechanics. J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1948. P. 333–340.
- [15] *Heilbronn H.* On discrete harmonic functions // Proc. Camb. Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 194–206.
- [16] *Holt D.* A graph which is edge-transitive but not arc-transitive // J. Graph Theory. John Wiley & Sons, New York, NY. 1981. V. 5. P. 201–204.
- [17] *Ito K., McKean H. P., Jr.* Potentials and the random walk // Illinois J. of Math. 1960. V. 4. P. 119–132.
- [18] *Kirchhoff G. R.* Ueber die Aufloesung der Gleichungen auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Stroeme gefuert wird // Ann. Phys. 1847. Bd. 72. S. 498–508. Русский перевод: *Кирхгоф Г. Р.* Избранные труды. М.: Наука, 1988. С. 170–178.
- [19] *Klein D. J., Randic M.* Resistance distance // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. V. 12. P. 81–95.



- [20] *McCrea W. H., Whipple F. J. W.* Random paths in two and three dimensions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1940. V. 60. P. 281–298.
- [21] *Murdoch B. H.* Preharmonic functions. Thesis, Princeton, 1952.
- [22] *Pearson K.* The problem of the random walk // Nature. London, 1905. V. 72. P. 294, 342.
- [23] *van der Pol B., Bremmer H.* Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, 1950.
- [24] *Pólya G.* Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz // Math. Ann. 1921. Bd. 84. S. 149–160.
- [25] *Rayleigh J. W. S.* The problem of the random walk // Nature. London, 1905. V. 72. P. 318.
- [26] *Skopenkov M.* The boundary value problem for discrete analytic functions // Adv. Math. 2013. V. 240. P. 61–87.
- [27] *Sloane N. J. A.* Sequence A008288 in «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences». <http://oeis.org/>.
- [28] *Spitzer F.* Principles of Random Walks. New York: Van Nostrand, 1964. Русский перевод: *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
- [29] *Thomassen C.* Resistances and currents in infinite electrical networks // Journal of Combinatorial Theory. Ser. B. 1990. V. 49, Iss. 1. P. 87–102.
- [30] *Zemanian A. H.* Infinite electrical networks: a reprise // IEEE Transactions on circuits and systems. 1988. V. 35, № 11. P. 1346–1358.

---

М. Б. Скопенков, ИППИ РАН  
skopenkov@rambler.ru

А. А. Пахарев, НИУ ВШЭ  
a.paharev@gmail.com

А. В. Устинов, Хабаровское отделение ИПМ ДВО РАН  
alexey.ustinov@gmail.com

# Квантовая комбинаторика

М. В. Игнатьев

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Очень часто серьёзная математическая проблема есть, в конечном счёте, проблема классификации тех или иных объектов, а главная трудность обычно заключается в изобретении адекватного языка, адекватных терминов, в которых эта классификация должна быть дана. В то же время удачная система терминов обычно позволяет продвинуться в решении поставленных задач гораздо дальше, чем предполагалось. Ярчайшим примером здесь являются диаграммы Дынкина — они классифицируют, пожалуй, не один *десяток* математических конструкций: простые алгебры Ли, простые алгебраические группы, особенности волновых фронтов, колчаны конечного типа...

В самом широком смысле комбинаторика и есть набор разнообразных методов, приспособленных для классификации математических объектов той или иной природы. Статус комбинаторики как единой науки до сих пор вызывает самые оживлённые дискуссии, но систематическое использование комбинаторных методов в алгебре, геометрии, анализе очень часто приводит к первоклассным результатам.

Числа сочетаний и размещений являются комбинаторной классикой; с изучения их свойств почти всегда начинается знакомство с комбинаторикой. Известно огромное количество тождеств, связывающих между собой числа сочетаний и размещений и обладающих как изящными алгебраическими доказательствами, так и яркой комбинаторной трактовкой. Пожалуй, один из наиболее эффективных подходов к изучению широкого класса таких тождеств приведён в книге [16].

Оказывается, эти абсолютно классические объекты допускают чрезвычайно широкое обобщение. А именно, их можно рассматривать как значения некоторых многочленов от переменной  $q$  с целыми коэффициентами в точке  $q = 1$ . Эти многочлены называются *квантовыми числами сочетаний* и *размещений* соответственно. Термин объясняется сходством

с квантовой механикой, где буквой  $q$  часто обозначают число  $e^{\hbar}$  ( $\hbar$  — постоянная Планка): некоторые формулы классической механики могут быть получены предельным переходом при  $\hbar \rightarrow 0$ , то есть при  $q \rightarrow 1$ .

Более того, выяснилось, что все классические комбинаторные тождества тоже допускают свои квантовые аналоги, которые при  $q = 1$  превращаются в исходные, так что «обычная» комбинаторика может рассматриваться как очень частный случай «квантовой». Есть у квантовых аналогов и чисто комбинаторная интерпретация, которая при  $q = 1$  даёт исходное комбинаторное определение классических чисел сочетаний и размещений. Но и это ещё не всё. На самом деле, квантовые числа сочетаний и размещений допускают совершенно неожиданную геометрическую трактовку в терминах векторных пространств над конечными полями, а именно, они перечисляют определённые конфигурации подпространств.

Цель этой статьи — изложить начальные понятия и результаты теории квантовых аналогов. В первом параграфе мы напоминаем определения чисел сочетаний и размещений, выводим явную формулу для них и доказываем те тождества, которые потом будем квантовать (в том числе, конечно, треугольник Паскаля и бином Ньютона). Второй параграф содержит определения квантовых чисел сочетаний и размещений, их элементарные свойства и квантовые аналоги тождеств, доказанных в параграфе 1.

Третий параграф посвящён комбинаторной интерпретации квантовых аналогов. А именно, мы показываем, что квантовое число сочетаний из  $n$  по  $k$  можно представить как сумму одночленов вида  $q$  в какой-то степени, причём каждый одночлен соответствует неупорядоченной выборке  $k$  предметов из  $n$  предметов. Таким образом, при  $q = 1$  мы имеем классическое комбинаторное определение чисел сочетаний. Аналогичная формула доказывается и для квантовых чисел размещений.

В четвёртом параграфе мы весьма кратко напоминаем базовые сведения из линейной алгебры: определения поля, векторного пространства, линейно зависимых и независимых векторов, базиса и размерности пространства. Всё это нужно для ключевого, пятого параграфа, в котором доказано, что квантовые аналоги перечисляют флаги (цепочки подпространств фиксированных размерностей) в конечномерных векторных пространствах над конечным полем из  $q$  элементов. Более того, оказывается, что квантовые тождества, полученные ранее чисто алгебраически, могут быть передоказаны с использованием этой геометрической интерпретации!

В шестом параграфе мы приводим ещё один, теоретико-групповой взгляд на квантовые числа сочетаний и размещений. После быстрого напоминания важнейших определений из теории групп мы определяем группу невырожденных матриц и доказываем, что квантовые аналоги — это

в точности индексы  $GL_n(\mathbb{F}_q)$  по параболическим подгруппам (подгруппам блочно-треугольных матриц) специального вида. На самом деле, после геометрической интерпретации в этом нет уже ничего удивительного или загадочного. Причина в том, что эти параболические подгруппы являются стабилизаторами флагов специального вида при естественном действии полной линейной группы на множестве всех флагов данного типа. Объяснению этого факта и посвящён последний, седьмой параграф.

Теперь скажем о том, чего в этой статье *нет*. Дело в том, что квантовые аналоги — очень содержательная теория, которая сейчас быстро развивается и имеет массу красивых приложений, рассказать о которых у нас не было никакой возможности. Во-первых, с помощью квантовых чисел сочетаний и размещений могут быть доказаны вполне классические тождества, известные ещё Эйлеру и Гауссу. Подробно этот аспект разбирается, например, в книге [7], посвящённой квантовой версии математического анализа.

Во-вторых, квантовые аналоги являются мощным вычислительным средством при работе с так называемыми *квантовыми группами*. Эти объекты, лежащие на стыке математики и теоретической физики, возникли в 1980-е годы в работах В. Г. Дринфельда и М. Джимбо и быстро стали очень популярными как среди алгебраистов, так и среди специалистов по квантовой теории поля. Грубо говоря, квантовые группы — это специфические «деформации» классических конечномерных алгебр Ли, к примеру алгебры  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ . Подробности можно найти в книге [15].

Далее, существует масса квантовых аналогов других замечательных комбинаторных объектов — чисел Стирлинга, чисел Белла, чисел Каталана... Мы не можем перечислять здесь десятки статей, посвящённых весьма красивым тождествам, связывающим квантовые версии этих объектов. Интересующийся читатель может вбить в любой поисковой системе запрос вроде *q-Catalan numbers* и посмотреть, сколько ссылок будет получено в ответ. Другой вариант — сделать такой же запрос на странице Международного математического архива <http://front.math.ucdavis.edu>.

Наконец, даже те сюжеты, о которых идёт речь в статье, чаще всего далеко не исчерпываются изложенным здесь материалом. Так, мы не приводим геометрического доказательства формулы треугольника Паскаля: оно хотя и не слишком сложно, требует определения аффинного пространства и аффинных плоскостей, см. [7]. Интерпретация квантовых аналогов в терминах параболических подгрупп даёт возможность получать далеко идущие обобщения всей этой теории, если брать вместо группы  $GL_n(\mathbb{F}_q)$  другие редуцированные матричные группы над конечными полями — к примеру  $SO_n(\mathbb{F}_q)$  или  $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ . Впрочем, мы и стремились не столько дать

полный обзор теории квантовых аналогов, сколько изложить несколько ярких и вместе с тем простых сюжетов, способных заинтересовать продвинутого старшеклассника или студента младших курсов.

Статья представляет собой очень расширенную версию лекции, прочитанной мной на Малом мехмате МГУ 11 ноября 2006 года. Я благодарю Александра Васильевича Спивака за приглашение прочесть эту лекцию. Я очень признателен Владимиру Доценко, который на летней школе «Современная математика» в Дубне в 2005 году впервые познакомил меня с квантовыми аналогами чисел сочетаний и размещений.

Я благодарен Владиславу Дружинину, который, будучи тогда школьником, рассказал мне придуманное им геометрическое доказательство теоремы 5.8. Я также выражаю благодарность Ивану Лишаеву, который (тоже будучи школьником) обратил моё внимание на комбинаторную интерпретацию чисел размещений (предложение 3.2).

Многие из сформулированных в тексте упражнений разбирались на учебно-исследовательском семинаре, которым я руководил в 2010 году, на кафедре алгебры и геометрии Самарского государственного университета. Это помогло исправить некоторые ошибки и, я надеюсь, порой улучшить способ изложения. Я выражаю признательность Сергею Бронникову, Ксении Вяткиной, Дмитрию Елисееву, Елене Кукариной, Павлу Никулину, Фёдору Череватенко и другим участникам семинара.

Отдельная благодарность — Михаилу Панову, чудесные Технические познания которого сильно способствовали улучшению оформления текста.

## § 1. КЛАССИЧЕСКАЯ КОМБИНАТОРИКА

Читатель, скорее всего, уже сталкивался с элементарными комбинаторными понятиями и фактами. Тем не менее, мы считаем нужным напомнить некоторые базовые вещи — хотя бы для того, чтобы зафиксировать обозначения. Пусть  $n$  — любое целое неотрицательное число, а  $k$  — произвольное целое число от 0 до  $n$ .

*Число размещений из  $n$  по  $k$*  — это количество строк длины  $k$ , заполненных числами от 1 до  $n$ . Другими словами, это количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  разных предметов, причём важен порядок, в котором эти предметы выбираются. Действительно, если занумеровать предметы числами от 1 до  $n$  и затем записывать в строку номера выбираемых предметов, то мы как раз получим строку длины  $k$ , заполненную числами от 1 до  $n$ . Обозначается число размещений из  $n$  по  $k$  через  $(n)_k$ .

Некоторое смущение может вызвать это определение при  $n = 0$  или  $k = 0$ . Принято считать, что  $(n)_0 = 1$  для всех  $n$ , включая 0. Объяснение

таково: есть ровно один способ взять нуль предметов — не взять ничего. Также формально полагают, что  $(n)_k = 0$  при  $k > n$ : нельзя выбрать десять предметов из пяти! Часто вместо  $(n)_k$  пишут через  $A_n^k$ , но мы предпочитаем указанное выше обозначение; оно сейчас становится всё более популярным.

Это определение не даёт возможности быстро посчитать, чему равно, например,  $(2013)_{500}$ . Вообще, для любого комбинаторного объекта естественный вопрос — как его «посчитать». Иногда, для некоторых объектов, получение явной формулы — очень непростая задача, но для чисел размещений это совсем не сложно.

Действительно,  $(n)_1 = n$  — можно взять любой предмет,  $(n)_2 = n(n-1)$ , так как первый предмет можно выбрать  $n$  способами (взять любой), а если первый предмет уже выбран, то второй можно выбрать  $n-1$  способом — взять любой из оставшихся. Аналогично

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

для любого  $k$ . Заметим, что если для любого натурального  $m$  обозначить  $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$  (читается «эм факториал») и положить  $0! = 1$ , то

$$(n)_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. i) Докажите, что  $n \cdot (n)_k = (n)_{k+1} + k \cdot (n)_k$ .

ii) Покажите, что

$$(0)_m + (1)_m + \dots + (n-1)_m = \frac{(n)_{m+1}}{m+1}.$$

Число сочетаний из  $n$  по  $k$  — это количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  разных предметов, если нам не важен порядок, в котором они выбираются. Обозначение:  $\binom{n}{k}$ .

Как и для чисел размещений,  $\binom{n}{0} = 1$ , ибо есть только один способ взять нуль предметов — не взять ничего; кроме того,  $\binom{n}{k} = 0$  при  $k > n$ . Часто для чисел сочетаний используется обозначение  $C_n^k$ .

Понятно, что

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1,$$

так как есть один способ выбрать  $n$  предметов из  $n$  предметов — взять всё. Далее,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

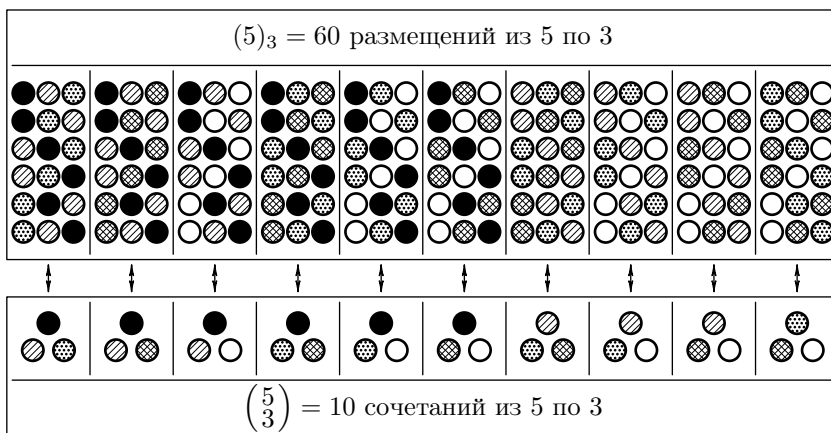
В самом деле, есть ровно  $n$  способов выбрать один предмет из  $n$ : взять любой. Но выбрать  $n-1$  предмет из  $n$  предметов — это то же самое, что

не выбрать один, откуда и получаем требуемое равенство. Вообще,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

для любого  $k$ , так как выбрать  $k$  предметов — это то же самое, что не выбрать  $n - k$  оставшихся.

Числа сочетаний тоже несложно посчитать явно. Действительно, мы уже знаем, сколько способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  предметов, если нам важен порядок — это как раз число размещений из  $n$  по  $k$ . Разные размещения могут задавать одно и то же сочетание, если они отличаются лишь порядком следования выбранных предметов. Точнее, если у нас есть какое-то фиксированное размещение, то оно будет задавать такое же сочетание, как и все, которые получаются из него любой перестановкой выбранных предметов. Пусть, например,  $n = 5$ ,  $k = 3$ . На рисунке показано, какие размещения соответствуют одним и тем же сочетаниям.



Но есть всего  $k!$  способов переставить  $k$  выбранных разных предметов (почему?), так что

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1)$$

Обратим внимание, что из этой формулы тоже сразу получается равенство  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  (почему?).

УПРАЖНЕНИЕ 1.2 (треугольник Паскаля). i) Докажите, что для любого  $n \geq 1$  и для любого  $k$  от 1 до  $n - 1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$





ическое доказательство, использующее лишь формулу (1) и треугольник Паскаля — это нужно будет нам в следующем параграфе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Формула бинома Ньютона верна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по  $n$ . База индукции  $n = 0$  очевидна: любой многочлен в нулевой степени равен единице, так что формула принимает вид  $1 = 1$ . Если это кажется «трюком», то можно стартовать с  $n = 1$ , где формула тоже очевидна:  $x + y = x + y$ .

Предположим теперь, что для  $n - 1$  формула уже доказана. Тогда

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= (x + y) \cdot (x + y)^{n-1} = (x + y) \times \\ &\quad \times \left( \binom{n-1}{0} x^{n-1} y^0 + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y^1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^0 y^{n-1} \right) = \\ &= \binom{n-1}{0} x^n y^0 + \binom{n-1}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^1 y^{n-1} + \\ &\quad + \binom{n-1}{0} x^{n-1} y^1 + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^0 y^n = \\ &= x^n + \left( \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \right) x^{n-1} y^1 + \dots + \\ &\quad + \left( \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} \right) x^1 y^{n-1} + y^n. \end{aligned}$$

Остаётся использовать треугольник Паскаля. □

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. i) Покажите, что

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

ii) Докажите это, используя только комбинаторное определение чисел сочетаний. Подсказка: сколько всего существует последовательностей из плюсов и минусов длины  $n$ ?

iii) Проверьте, что

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots = 0.$$

iv) Убедитесь в верности равенства

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

v) Докажите, что

$$\binom{n}{0} \binom{m}{k} + \binom{n}{1} \binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}.$$

Конечно, всё это только верхушка айсберга. Комбинаторика развивается невероятно быстро и имеет огромное количество эффективных приложений в современной алгебре, геометрии, анализе, теории графов и в ряде других областей современной математики. У нас нет никакой возможности изложить здесь даже все элементарные и абсолютно классические сведения про числа сочетаний и размещений. (Так, мы совершенно не касаемся красивейшей и очень полезной интерпретации в терминах путей на клетчатой бумаге.) Ограничимся лишь ссылками на несколько учебников. Элементарные комбинаторные методы чётко изложены в книге [1]. Полезное обсуждение алгоритмических аспектов основных комбинаторных понятий содержится в [13]. Мы горячо рекомендуем всем *великолепную* книгу [3], в которой комбинаторика предстаёт чрезвычайно эффективным орудием решения самых разнообразных алгебраических и геометрических проблем.

На более высоком уровне комбинаторные аспекты алгебры освещаются в фундаментальном учебнике [14] — разумеется, *не* предназначенном для первого знакомства с предметом. Отдельного восхищения заслуживает глава про «каталанову болезнь», в которой собрано несколько *сотен* интерпретаций знаменитых чисел Каталана; см. по этому поводу также статью [5, 6]. Наконец, очень понятное и быстрое введение в теорию производящих функций приведено в [11]. Все эти книги мы непременно советуем прочесть (пусть не сразу!) тем, кто действительно хочет овладеть современными комбинаторными и алгоритмическими методами.

## § 2. КВАНТОВЫЕ АНАЛОГИ

Перейдём к определению интересующих нас объектов. Термин «квантовый» действительно связан с квантовой физикой. Дело в том, что в классической механике может существовать любая, сколь угодно малая порция энергии. Напротив, с точки зрения квантовой теории, электрон на данной длине волны не может излучать энергии порциями, которые меньше известной константы, которая обозначается  $\hbar$  и называется *постоянной Планка*. В ряде формул удобно использовать обозначение  $q = e^{\hbar}$ .

Часть классической механики может быть получена из квантовой «предельным переходом» при  $\hbar \rightarrow 0$ ; при этом  $q \rightarrow 1$ . Таким образом, в первом приближении квантовый объект можно понимать как некую «деформацию» классического объекта, так зависящую от параметра  $q$ , что при  $q = 1$  мы получаем исходный классический объект.

Все эти невнятные объяснения мы сейчас наполним вполне прозрачным смыслом в конкретных случаях. Больше мы не станем вдаваться в причины использования «квантовой» терминологии; краткие коммента-

рии по поводу связи квантовой комбинаторики с глубокими разделами современной теоретической физики приведены в предисловии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** *Квантовым аналогом* натурального числа  $n$  называется многочлен от переменной  $q$  вида

$$[n] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}.$$

Синонимы: квантовое число  $n$ ,  $q$ -аналог числа  $n$ . Используются также обозначения  $n_q$  и  $[n]_q$ , но у нас  $q$  всегда будет просто переменной, так что мы не будем указывать его в обозначениях. Положим также  $[0] = 1$ .

Отметим, что  $[n] = n$  при  $q = 1$ , то есть 1-аналог равен обычному числу  $n$ . Многочлен  $[n]$  можно представить в более компактной форме:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Также его легко вычислить для небольших  $n$ :  $[1] = 1$ ,  $[2] = 1 + q$ , и так далее. Теперь — ключевой момент: мы можем «имитировать» определение обычного факториала, используя квантовые числа вместо обычных.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Пусть  $n$  — любое натуральное число. *Квантовым факториалом* называется многочлен от переменной  $q$  вида

$$[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n].$$

Синонимы: квантовый аналог факториала,  $q$ -факториал. Формально определим  $[0]! = 1$ .

Подчеркнём, что, вообще говоря,  $[n!] \neq [n]!$ . К примеру,  $[3!] = [6]$  — многочлен пятой степени, в то время как  $[3]! = [1] \cdot [2] \cdot [3]$  — многочлен всего лишь третьей степени.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.3.** i) Для каких чисел  $a$  и  $b$  будет верно равенство

$$[a] \cdot [b] = [ab]?$$

ii) Докажите, что для любых  $n, k$

$$[n] = [k] + q^k \cdot [n - k] = [n - k] + q^{n-k} \cdot [k].$$

Обратите внимание на последнюю формулу. Ясно, что при  $q = 1$  она превращается в два очевидных равенства:

$$n = k + (n - k) = (n - k) + k.$$

При этом квантовая формула отличается от классической добавлением «квантовых поправок» — степеней  $q$  — к некоторым слагаемым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Для  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  *квантовым числом размещений из  $n$  по  $k$*  называется многочлен от переменной  $q$  вида

$$[n]_k = [n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [n-k+1] = \frac{[n]!}{[n-k]!}.$$

Определим также *квантовое число сочетаний из  $n$  по  $k$*  как частное двух многочленов вида

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]_k}{[k]!} = \frac{[n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [n-k+1]}{[k]!} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]}.$$

Пока непонятно, делится ли числитель на знаменатель, то есть является ли квантовое число сочетаний настоящим многочленом с целыми коэффициентами. Впрочем, если изначально определить обычное число сочетаний формулой (1), то доказать, что это целое число, тоже не так-то просто. Отметим пока, что при  $q = 1$  квантовые числа сочетаний и размещений превращаются в обычные. Кроме того, выполняются очевидные равенства

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

и, шире, для любого  $k$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}.$$

Собственно, пафос квантовой науки заключается в следующем: теперь, когда мы определили квантовые аналоги классических комбинаторных объектов, оказывается, что *все* классические тождества допускают квантовые аналоги! Другими словами, для классического тождества всегда можно придумать тождество с квантовыми числами сочетаний и размещений, которое отличается от обычного квантовыми поправками и превращается в обычное при подстановке  $q = 1$ . Таким образом, вся классическая комбинаторика, имеющая дело с числами сочетаний и размещений, включается в грандиозную программу квантовой комбинаторики как очень частный случай. Перейдём к конкретным фактам.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. i) Докажите квантовый аналог формулы из упражнения 1.1 (i):

$$[n] \cdot [n]_k = [n]_{k+1} + q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]_k.$$

ii) (Квантовый треугольник Паскаля.) Докажите, что для любого  $k$  от 1 до  $n-1$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = q^k \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Квантовое число сочетаний является многочленом от переменной  $q$  с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из формулы для квантового треугольника Паскаля.  $\square$

Чтобы квантовать второе важнейшее тождество с числами сочетаний и размещений — бином Ньютона, — требуется ещё пара определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Определим  $n$ -ю квантовую степень как многочлен с целыми коэффициентами от переменных  $x, y, q$  вида

$$[x + y]^n = (x + y) \cdot (x + qy) \cdot (x + q^2y) \cdot \dots \cdot (x + q^{n-1}y)$$

(обратите внимание, что  $[x + y]^n \neq [y + x]^n$ ). Положим формально

$$[x + y]^0 = 1.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.8 (квантовый бином Ньютона). Покажите, что для любого  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} [x + y]^n = q^{0 \cdot (-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} x^n y^0 + q^{1 \cdot 0/2} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1} y^1 + q^{2 \cdot 1/2} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^{n-2} y^2 + \\ + \dots + q^{k \cdot (k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k + \dots + q^{n \cdot (n-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^0 y^n. \end{aligned}$$

УКАЗАНИЕ. Действуйте, как в доказательстве утверждения 1.4.

Есть и другой способ квантовать бином Ньютона, связанный ещё с одной фундаментальной идеей квантовой физики — идеей некоммутативности (подробности см. в последнем параграфе). А именно, будем считать, что  $x$  и  $y$  — это не обычные переменные, связанные соотношением  $xy = yx$ , а «буквы» в «алфавите» некоего нового «языка», слова которого записаны этими буквами. Тогда  $x^2y = xxy$  и  $yx^2 = yxx$  — это, конечно, разные слова.

Будем предполагать, что грамматические правила этого «языка» позволяют в любом слове две подряд идущие буквы  $yx$  заменить на буквы  $xy$ , но при этом «умножить» слово на  $q$ , то есть просто приписать перед словом букву  $q$ . Если считать, что букву  $q$  можно свободно «протаскивать» через все остальные буквы, то кратко это правило можно выразить так:

$$yx = qxy.$$

Например,

$$y^2x^3 = q^6x^3y^2.$$

Можно определить «сложение» и «умножение» слов более или менее очевидными формальными правилами (вдаваться в детали мы сейчас не станем). К примеру,

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + (1 + q)xy + y^2.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.9 (квантовый бином Ньютона, некоммутативная версия). Докажите, что при таком определении

$$(x + y)^n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} x^n y^0 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1} y^1 + \dots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^0 y^n.$$

Таким образом, можно обойтись даже без квантовых поправок, если пожертвовать коммутативностью умножения переменных.

### § 3. КОМБИНАТОРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Мы только что видели, что два важнейших тождества — треугольник Паскаля и бином Ньютона — допускают изящные квантовые переформулировки. Неприятным моментом является то, что квантовые числа сочетаний и размещений пока определяются чисто алгебраически, в то время как в классической ситуации числа сочетаний и размещений перечисляют некоторые объекты. Как мы сейчас увидим, квантовым аналогам тоже можно дать весьма изящную комбинаторную трактовку, которая в каком-то смысле является квантованием классического комбинаторного определения.

Обозначим через  $\mathcal{A}_{n,k}$  множество  $k$ -элементных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; таким образом, просто по определению,  $|\mathcal{A}_{n,k}| = \binom{n}{k}$ . Для каждого подмножества  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$  будем через  $w(S)$  обозначать сумму чисел, входящих в это подмножество. Например,

$$w(\{2, 4, 5\}) = 11, \quad w(\emptyset) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеет место формула*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{S \in \mathcal{A}_{n,k}} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать формулу индукцией по  $n$ . База индукции  $n = 0$  проверяется тривиально: при единственном возможном значении  $k = 0$  формула имеет вид  $1 = 1$ , так как  $w(\emptyset) = 0$ . Предположим, что для  $n - 1$  формула уже доказана. При  $k = 0$  она очевидно верна (ибо имеет вид  $1 = 1$ ), так что дальше можно считать, что  $k > 0$ .

Разобьём все подмножества из  $\mathcal{A}_{n,k}$  на две части,  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ . В первую поместим те, в которых содержится  $n$ , а во вторую — те, в которых  $n$  не содержится. Например, при  $n = 4$ ,  $k = 2$  эти части устроены так:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Вторая часть пуста при  $k = n$ ; в этом случае формула проверяется очень легко. Действительно, при  $k = n$  левая часть формулы равна  $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ , а правая часть равна

$$q^{w(\{1, \dots, n\}) - \frac{n(n+1)}{2}} = q^0 = 1.$$

Итак, дальше можно считать, что  $k < n$ .

Если из любого подмножества  $S$  из  $\mathcal{A}_1$  выкинуть  $n$ , то получится  $(k-1)$ -элементное подмножество  $S'$  множества  $\{1, \dots, n-1\}$ . Ясно, что это задаёт взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_{n-1, k-1}$ , причём  $w(S) = w(S') + n$ . С другой стороны, множество  $\mathcal{A}_2$  просто совпадает с  $\mathcal{A}_{n-1, k}$ . Таким образом, правая часть доказываемого равенства имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{A}_{n, k}} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}} &= \sum_{S \in \mathcal{A}_1} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{A}_2} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}} = \\ &= \sum_{S' \in \mathcal{A}_{n-1, k-1}} q^{w(S') + n - \frac{k(k+1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{A}_{n-1, k}} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + k,$$

поэтому

$$q^{w(S') + n - \frac{k(k+1)}{2}} = q^{n-k} \cdot q^{w(S') - \frac{k(k-1)}{2}}.$$

Значит, правая часть доказываемого равенства переписывается в виде

$$q^{n-k} \sum_{S' \in \mathcal{A}_{n-1, k-1}} q^{w(S') - \frac{k(k-1)}{2}} + \sum_{S \in \mathcal{A}_{n-1, k}} q^{w(S) - \frac{k(k+1)}{2}}.$$

По предположению индукции, первое и второе слагаемые равны соответственно  $q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ . Для завершения доказательства осталось использовать квантовый треугольник Паскаля.  $\square$

Обратим внимание, что при  $q = 1$  левая часть будет равна просто  $\binom{n}{k}$ . В то же время правая часть будет иметь вид

$$\sum_{\mathcal{A}_{n, k}} q^0 = \sum_{\mathcal{A}_{n, k}} 1 = |\mathcal{A}_{n, k}|$$

— и мы видим, что это комбинаторное определение чисел сочетаний!

Пусть, далее,  $\mathcal{B}_{n, k}$  — множество строк длины  $k$ , заполненных числами от 1 до  $n$ , то есть, в частности,  $|\mathcal{B}_{n, k}| = (n)_k$ . Для каждой строки  $T$ , заполненной числами от 1 до  $n$ , будем через  $w(T)$  обозначать сумму чисел

в ней, а через  $N(T)$  — количество инверсий в  $T$ . Напомним, что *инверсией* в строке  $T$  называется такая пара чисел  $i, j$ , встречающаяся в ней, что  $i > j$ , но при этом число  $i$  появляется в  $T$  раньше, чем число  $j$ . К примеру, полный список инверсий в строке  $T = (3, 4, 1, 5, 2)$  выглядит так:  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 2)$ , поэтому  $N(T) = 5$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.** *Имеет место формула*

$$[n]_k = \sum_{T \in \mathcal{B}_{n,k}} q^{w(T)+N(T)-\frac{k(k+1)}{2}}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Опять используем индукцию по  $n$  (база  $n = 0$  очевидна). Предположим, что формула уже доказана для  $n - 1$ . Как и в прошлом доказательстве, поделим все строки из  $\mathcal{B}_{n,k}$  на две части,  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$ . В первую часть поместим те, в которых встречается число  $n$ , а во вторую — те, в которых оно не встречается. К примеру, при  $n = 3, k = 2$  эти части будут выглядеть так:

$$\mathcal{B}_1 = \{\{1, 3\}, \{3, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 1\}\}.$$

При  $k = n$  во второй части нет ни одной строки, но это никак не отразится на ходе рассуждений.

Если из любой строки из  $\mathcal{B}_1$  удалить число  $n$ , то получится строка из  $\mathcal{B}_{n-1, k-1}$ . Обозначим полученное отображение через

$$r: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{n-1, k-1}.$$

Ясно, что таким образом можно получить любую строку из  $\mathcal{B}_{n-1, k-1}$ .

Более того, пусть  $T'$  — какая-то фиксированная строка длины  $k - 1$ . Какие строки переходят в неё под действием отображения  $r$ ? Мы можем добавить  $n$  перед всей строкой  $T'$ , после первого её символа, после второго, и так далее, вплоть до последней возможности — добавить  $n$  после всей строки  $T'$ . Значит, есть всего  $k$  строк  $T$  длины  $k$  таких, что  $r(T) = T'$ . Обозначим их  $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$  в зависимости от того, после какой позиции строки  $T'$  добавляется  $n$ .

Заметим, что сумма чисел в любой из этих строк на  $n$  больше, чем в строке  $T'$ . Кроме того, в строке  $T_0$  на  $k - 1$  инверсию больше, чем в строке  $T'$ , потому что число  $n$  образует инверсию с любым числом, идущим после него. В строке  $T_1$  на  $k - 2$  инверсии больше, чем в строке  $T'$  по тем же причинам (число  $n$  не образует инверсию ни с одним числом, идущим раньше него). Рассуждая аналогично, получим, что

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{B}_1 \\ r(T)=T'}} q^{w(T)+N(T)} = q^{w(T_0)+N(T_0)} + q^{w(T_1)+N(T_1)} + \dots + q^{w(T_{k-1})+N(T_{k-1})} =$$



$$\begin{aligned}
 &= q^{w(T')+n+N(T')+(k-1)} + q^{w(T')+n+N(T')+(k-2)} + \dots + q^{w(T')+n+N(T')+0} = \\
 &= q^n \cdot (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + 1) \cdot q^{w(T')+N(T')} = q^n \cdot [k] \cdot q^{w(T')+N(T')}.
 \end{aligned}$$

Осталось заметить, что  $\mathcal{B}_2$  — это в точности множество  $\mathcal{B}_{n-1, k}$ . С учётом сделанных выше замечаний и предположения индукции правая часть доказываемого равенства переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 &\sum_{T \in \mathcal{B}_{n, k}} q^{w(T)+N(T)-\frac{k(k+1)}{2}} = \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{B}_1} q^{w(T)+N(T)-\frac{k(k+1)}{2}} + \sum_{T \in \mathcal{B}_2} q^{w(T)+N(T)-\frac{k(k+1)}{2}} = \\
 &= q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{T \in \mathcal{B}_1} q^{w(T)+N(T)} + \sum_{T \in \mathcal{B}_{n-1, k}} q^{w(T)+N(T)-\frac{k(k+1)}{2}} = \\
 &= q^{-\frac{k(k-1)+2k}{2}} \sum_{T' \in \mathcal{B}_{n-1, k-1}} \left( \sum_{T \in \mathcal{B}_1, r(T)=T'} q^{w(T)+N(T)} \right) + [n-1]_k = \\
 &= q^{-k} \cdot q^{-\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{T' \in \mathcal{B}_{n-1, k-1}} (q^n \cdot [k] \cdot q^{w(T')+N(T')}) + [n-1]_k = \\
 &= q^{n-k} \cdot [k] \sum_{T' \in \mathcal{B}_{n-1, k-1}} q^{w(T')+N(T')-\frac{k(k-1)}{2}} + [n-1]_k = \\
 &= q^{n-k} [k] [n-1]_{k-1} + [n-1]_k = \\
 &= [n-1]_{k-1} \cdot (q^{n-k} [k] + [n-k]) = [n] [n-1]_k = [n]_k,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Предпоследнее равенство вытекает из упражнения 2.5 (ii).  $\square$

#### § 4. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Как мы позже увидим, квантовые числа сочетаний и размещений допускают очень красивую и полезную *геометрическую* интерпретацию при правильном понимании термина «геометрическая». Эта интерпретация позволяет доказывать квантовые аналоги классических тождеств с помощью подсчёта тех или иных конфигураций подпространств в векторных пространствах над конечными полями, к определению которых мы и переходим.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** *Поле* называется произвольное непустое множество  $\mathbb{F}$  вместе с двумя *бинарными операциями*, удовлетворяющими некоторым условиям. Каждая бинарная операция — это отображение из  $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$

в  $\mathbb{F}$ . Другими словами, это правило, которое каждой упорядоченной паре элементов  $(x, y)$  из  $\mathbb{F}$  ставит в соответствие какой-то новый элемент из  $\mathbb{F}$ . Будем обозначать этот элемент через  $x + y$  для первой операции и через  $xy$  — для второй. Вот свойства, которым должны удовлетворять эти бинарные операции:

- 1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{F}$ ;
- 2) существует элемент  $0 \in \mathbb{F}$  такой, что  $0 + x = x$  для любого  $x \in \mathbb{F}$ ;
- 3) для любого  $x \in \mathbb{F}$  существует элемент  $-x \in \mathbb{F}$  такой, что  $x + (-x) = 0$ ;
- 4)  $x + y = y + x$  для любых  $x, y \in \mathbb{F}$ ;
- 5)  $(xy)z = x(yz)$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{F}$ ;
- 6) существует элемент  $1 \neq 0$  такой, что  $1x = x$  для любого  $x \in \mathbb{F}$ ;
- 7) для любого  $x \neq 0$  существует элемент  $x^{-1} \in \mathbb{F}$  такой, что  $xx^{-1} = 1$ ;
- 8)  $xy = yx$  для любых  $x, y \in \mathbb{F}$ ;
- 9)  $x(y + z) = xy + xz$  для любых  $x, y, z \in \mathbb{F}$ .

Скобки обозначают порядок выполнения операций — сначала выполняется действие в скобках. Первая бинарная операция называется *сложением*, а вторая — *умножением*. Первое и пятое свойства называют *ассоциативностью* сложения и умножения соответственно; элементы 0 и 1 называются *нулём* и *единицей* соответственно. Для любого  $x \in \mathbb{F}$  элементы  $-x$  и  $x^{-1}$  называются *противоположным* и *обратным* к  $x$  соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Докажите, что  $0x = 0$  и  $(-1)x = -x$  для любого  $x \in \mathbb{F}$ .

ПРИМЕР 4.3. i) Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  и множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  являются полями. Обратим внимание, что строгое определение этих множеств весьма нетривиально; интересующегося читателя отсылаем к книге [4].

ii) Рассмотрим произвольное простое число  $p$ . Для любого целого  $a$  будем через  $a \bmod p$  обозначать остаток от деления  $a$  на  $p$ . Пусть

$$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}.$$

Введём на этом множестве бинарные операции следующим правилом:

$$x + y = x + y \bmod p, \quad xy = xy \bmod p.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. i) Докажите, что эти бинарные операции превращают  $\mathbb{F}_p$  в поле.

ii) Постройте таблицы умножения для  $\mathbb{F}_5$  и  $\mathbb{F}_7$ .

Таким образом, поля не обязаны состоять из бесконечного числа элементов, как  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$ . Более тонкий вопрос — сколько элементов может быть

в конечном поле? Оказывается, число элементов в нём всегда является степенью простого числа [10, гл. 5, § 2, предложение 2], но мы для простоты ограничимся случаем, когда количество элементов поля — простое число.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Введите на множестве из четырёх элементов две бинарные операции, которые превратят его в поле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть  $\mathbb{F}$  — любое поле. Договоримся называть его элементы *числами*. Векторным пространством над полем  $\mathbb{F}$  называется непустое множество  $V$  вместе с отображениями

$$V \times V \rightarrow V: (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y},$$

$$\mathbb{F} \times V \rightarrow V: (\alpha, \bar{x}) \mapsto \alpha\bar{x}.$$

Они называются соответственно *сложением* и *умножением на числа* и должны удовлетворять следующим свойствам:

- 1)  $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$  для любых  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ ;
- 2) существует  $\bar{0} \in V$  такой, что  $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$  для любого  $\bar{x} \in V$ ;
- 3) для любого  $\bar{x} \in V$  существует  $-\bar{x} \in V$ , для которого  $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ ;
- 4)  $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$  для любых  $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ;
- 5)  $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$  для любых  $\bar{x} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$  для любых  $\bar{x} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ;
- 7)  $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$  для любых  $\bar{x}, \bar{y} \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ ;
- 8)  $1\bar{x} = \bar{x}$  для любого  $\bar{x} \in V$ .

Мы будем называть элементы множества  $V$  *векторами* и писать над ними чёрточки, чтобы отличать их от чисел из поля  $\mathbb{F}$ . Вектор  $\bar{0}$  называется *нулевым*. Для любого  $\bar{x} \in V$  вектор  $-\bar{x}$  называется *противоположным* к  $\bar{x}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Докажите, что  $0\bar{x} = \bar{0}$  и  $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$  для любого вектора  $\bar{x} \in V$ .

ПРИМЕР 4.8. i) Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ,  $V$  — множество обычных (*геометрических*) векторов на плоскости  $E^2$  или в пространстве  $E^3$ , отложенных от какой-то фиксированной точки  $O$ . Сложение и умножение на числа определяются так же, как в школьном курсе геометрии.

ii) Пусть  $\mathbb{F}$  — любое поле,

$$V = \mathbb{F}^n = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{F} \right\}$$

— *n*-мерное координатное пространство, то есть просто множество упорядоченных наборов из *n* элементов поля  $\mathbb{F}$ . Сложение векторов и умножение

на числа определяются покомпонентно:

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in V, \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

iii) Множество многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{F}$  является векторным пространством; оно обозначается  $\mathbb{F}[x]$ . Сложение многочленов и умножение их на числа определяются очевидным образом. Можно также рассмотреть пространство  $\mathbb{F}_n[x]$  многочленов степени не выше  $n$ .

iv) Рассмотрим множество *квадратных матриц* — таблиц размера  $n \times n$ , заполненных числами из поля  $\mathbb{F}$ :

$$V = \text{Mat}_n(\mathbb{F}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, a_{i,j} \in \mathbb{F} \right\}.$$

Оно является векторным пространством относительно поэлементного сложения и умножения на числа.

Векторы  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$  называются *линейно независимыми*, если из того, что  $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$  для каких-то  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ , следует, что все  $\alpha_i$  равны нулю. В противном случае векторы называются *линейно зависимыми*.

**ПРИМЕР 4.9.** Один вектор является линейно зависимым тогда и только тогда, когда он нулевой. Два вектора будут линейно зависимыми в том и только в том случае, когда они пропорциональны, то есть один получается из другого умножением на какое-то число из поля  $\mathbb{F}$ . Если  $V$  — это пространство геометрических векторов на плоскости  $E^2$ , то это равносильно коллинеарности векторов. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы (почему?). Если же  $V$  — пространство геометрических векторов в  $E^3$ , то три вектора будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда они не лежат в одной плоскости, а четыре вектора линейно зависимы всегда (почему?).

Набор линейно независимых векторов  $e = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset V$  называется *базисом* в  $V$ , если любой вектор можно однозначно представить в виде линейной комбинации векторов из  $e$ , то есть для любого  $\bar{x} \in V$  существуют единственные  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$  такие, что  $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ ; числа  $x_i$  называются *координатами* вектора  $\bar{x}$  в базисе  $e$ . Если в  $V$  существует хоть один базис, состоящий из конечного числа векторов, то все базисы состоят из одного и того же числа векторов [9, гл. 1, § 2], которое обозначается  $\dim V$  и называется *размерностью*  $V$ ; само пространство  $V$  называется в этом случае *конечномерным*.

Можно показать, что размерность равна количеству векторов в любом максимальном по включению линейно независимом наборе векторов из  $V$ , причём любой такой набор является базисом  $V$ . (Термин «максимальный по включению» означает, что сам набор состоит из линейно независимых векторов, а при добавлении к нему любого вектора из  $V$  становится линейно зависимым.) Таким образом, размерность пространства — это максимально возможное количество линейно независимых векторов в нём.

**ПРИМЕР 4.10.** Векторы  $\bar{e}_i$ , у которых на  $i$ -м месте стоит единица, а остальные координаты равны нулю, образуют базис  $\mathbb{F}^n$ , называемый *стандартным*. Таким образом,  $\dim \mathbb{F}^n = n$ . Матрицы  $E_{i,j}$ , у которых  $(i, j)$ -й элемент равен единице, а остальные — нулю (они называются *матричными единицами*), образуют базис  $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$ ; тем самым,  $\dim \text{Mat}_n(\mathbb{F}) = n^2$ . В пространстве  $\mathbb{F}_n[x]$  есть *степенной* базис  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ , поэтому  $\dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$ . Напротив, в пространстве  $\mathbb{F}[x]$  нельзя построить базис из конечного числа векторов, то есть это пространство бесконечномерно. Дальше мы везде будем рассматривать только конечномерные пространства.

Непустое подмножество  $U \subset V$  называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на числа, то есть  $\bar{x} + \bar{y} \in U$  и  $\alpha \bar{x} \in U$  для любых  $\bar{x}, \bar{y} \in U, \alpha \in \mathbb{F}$ . Любое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций, что и  $V$ . *Линейной оболочкой* набора векторов  $S = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \subset V$  называется минимальное по размерности подпространство  $\langle S \rangle$ , содержащее  $S$ ; другими словами, это множество всех линейных комбинаций векторов из  $S$ :

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n, \alpha_i \in \mathbb{F}\}.$$

Говорят также, что линейная оболочка *натянута* на векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ . Имеет место *теорема о дополнении до базиса* [9, гл. 1, § 2, теорема 3(ii)]: базис любого подпространства  $U \subset V$  всегда можно дополнить до базиса всего пространства  $V$ . В частности,  $\dim U \leq \dim V$ . Отметим, что если  $\dim U = \dim V$ , то  $U = V$ .

Здесь мы прерываем перечисление начальных фактов из теории векторных пространств. Мы не будем определять линейные отображения и операторы, потому что они нам нигде не будут нужны явно. По сути, геометрическая интерпретация  $q$ -аналогов квантовых тождеств основана на том простом факте, что в любом  $n$ -мерном пространстве над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов ровно  $q^n$  векторов — это сразу вытекает из определения базиса и размерности. Мы увидим, что квантовые аналоги равны количеству подпространств определённой размерности, удовлетворяющих тем или иным дополнительным условиям.

## § 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

С этого момента и до конца статьи мы будем рассматривать векторные пространства только над конечным полем  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов. Сначала мы докажем простую, но очень полезную лемму, которая будет не раз использована дальше.

**ЛЕММА 5.1.** *В  $n$ -мерном пространстве над  $\mathbb{F}_q$  существует*

$$(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot (q^n - q^2) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{k-1})$$

*наборов из  $k$  линейно независимых векторов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первый вектор можно выбрать любым, кроме нулевого, то есть для него есть  $q^n - 1$  вариантов. Второй вектор можно взять любым, лишь бы он не лежал в одномерном подпространстве, натянутом на первый вектор, то есть для второго вектора есть  $q^n - q$  вариантов. Аналогично третий вектор может быть любым вектором, не лежащим в двумерном подпространстве, натянутом на первые два вектора, то есть для него есть  $q^n - q^2$  вариантов, и так далее.  $\square$

**ТЕОРЕМА 5.2.** *Квантовое число сочетаний  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  совпадает с количеством  $k$ -мерных подпространств в  $n$ -мерном пространстве над полем  $\mathbb{F}_q$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Любое  $k$ -мерное подпространство однозначно определяется своим базисом, состоящим из  $k$  линейно независимых векторов. По только что доказанной лемме, количество таких базисов равно

$$(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot (q^n - q^2) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{k-1}).$$

С другой стороны, разные базисы могут задавать одно и то же подпространство. Точнее, чтобы получить число подпространств, нужно поделить записанное выше выражение на количество базисов в  $k$ -мерном пространстве, которое по той же самой лемме равно

$$(q^k - 1) \cdot (q^k - q) \cdot (q^k - q^2) \cdot \dots \cdot (q^k - q^{k-1}).$$

Окончательно, всего  $k$ -мерных подпространств в  $n$ -мерном пространстве будет

$$\begin{aligned} & \frac{(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot (q^n - q^2) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1) \cdot (q^k - q) \cdot (q^k - q^2) \cdot \dots \cdot (q^k - q^{k-1})} = \\ & = \frac{(q^n - 1) \cdot q \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot q^2 \cdot (q^{n-2} - 1) \cdot \dots \cdot q^{k-1} \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot q \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot q^2 \cdot (q^{k-2} - 1) \cdot \dots \cdot q^{k-1} \cdot (q - 1)} = \\ & = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot (q^{n-2} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot (q^{k-2} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q - 1} \cdot \dots \cdot \frac{q^{n-k+1} - 1}{q - 1} \\
 &= \frac{q^k - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{k-2} - 1}{q - 1} \cdot \dots \cdot \frac{q - 1}{q - 1} \\
 &= \frac{[n] \cdot [n - 1] \cdot [n - 2] \cdot \dots \cdot [n - k + 1]}{[k]!} = \frac{[n]!}{[k]![n - k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Множество  $k$ -мерных подпространств в  $n$ -мерном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{F}$  часто обозначается  $\text{Gr}_k(V)$  и называется *грассманианом*. Таким образом, мы только что доказали, что

$$|\text{Gr}_k(\mathbb{F}_q^n)| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Чтобы дать аналогичную трактовку квантовым числам размещений, нам нужно будет ещё одно важнейшее понятие из линейной алгебры.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.** Пусть  $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_r < n$ . *Флагом типа*  $d = (d_1, d_2, \dots, d_r)$  в пространстве  $V$  называется цепочка вложенных друг в друга подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_r$$

в  $V$  таких, что

$$\dim U_1 = d_1, \quad \dim U_2 = d_2, \quad \dots, \quad \dim U_r = d_r.$$

Флаг типа  $(1, 2, \dots, n - 1)$  называется *полным*. Будем обозначать множество всех флагов типа  $d$  через  $\mathcal{F}_d(V)$ ; множество полных флагов обозначим через  $\mathcal{F}(V)$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4.** i) *Количество полных флагов в  $n$ -мерном пространстве над  $\mathbb{F}_q$  равно  $[n]!$ .* ii) *Количество флагов типа  $(1, 2, \dots, k)$  в  $n$ -мерном пространстве над  $\mathbb{F}_q$  равно  $[n]_k$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первый пункт является частным случаем второго (при  $k = n - 1$ ), так что докажем сразу второй пункт. Число способов выбрать последнее  $k$ -мерное подпространство флага равно  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  по доказанной выше теореме. В нём мы можем выбрать  $(k - 1)$ -мерное подпространство  $\begin{bmatrix} k \\ k - 1 \end{bmatrix} = [k]$  способами. В этом  $(k - 1)$ -мерном подпространстве есть всего  $\begin{bmatrix} k - 1 \\ k - 2 \end{bmatrix} = [k - 1]$  подпространств размерности  $k - 2$ , и так далее. В конечном счёте число способов выбрать флаг типа  $(1, 2, \dots, k)$  будет равно

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot [k] \cdot [k - 1] \cdot \dots \cdot [1] = \frac{[n]!}{[k]![n - k]!} \cdot [k]! = \frac{[n]!}{[n - k]!} = [n]_k,$$

что и требовалось показать. □

Таким образом, если  $V$  —  $n$ -мерное пространство над полем  $\mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов и  $d = (1, 2, \dots, k)$ , то

$$|\mathcal{F}(V)| = [n]!, \quad |\mathcal{F}_d(V)| = [n]_k.$$

Всё это можно ещё немножко обобщить.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.** Пусть  $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_r$ ,  $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$ . *Квантовым мультиномиальным коэффициентом* называется отношение двух многочленов с целыми коэффициентами от переменной  $q$  вида

$$\left[ \begin{matrix} n \\ l_1, \dots, l_r \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[l_1]! \cdot \dots \cdot [l_r]!}.$$

Обратим внимание, что, как и в случае с квантовыми числами сочетаний, заранее непонятно, будет ли это выражение многочленом от  $q$ , то есть поделится ли числитель на знаменатель.

**УПРАЖНЕНИЕ 5.6.** Докажите, что квантовый мультиномиальный коэффициент  $\left[ \begin{matrix} n \\ l_1, \dots, l_r \end{matrix} \right]$  равен количеству флагов в  $n$ -мерном пространстве над полем  $\mathbb{F}_q$ , имеющих тип  $(l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1})$ . Проверьте, что этот коэффициент действительно является многочленом от  $q$  с целыми коэффициентами.

Мы переходим к кульминации этого параграфа — геометрическому доказательству квантовых аналогов тождеств, рассмотренных в параграфе 1. Сначала докажем геометрически квантовый аналог тождества из упражнения 1.1 (i), сформулированный ранее в упражнении 2.5 (i).

**ТЕОРЕМА 5.7.** Для любых  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$  выполняется тождество

$$[n] \cdot [n]_k = [n]_{k+1} + q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]_k.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное пространство над полем  $\mathbb{F}_q$ . Посчитаем количество пар вида  $(L, F)$ , где  $L$  — одномерное подпространство в  $V$ , а  $F$  — флаг в  $V$  типа  $(n-k, n-k+1, \dots, n-1)$ . С одной стороны, согласно теореме 5.2, одномерное пространство  $L$  можно выбрать  $\left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = [n]$  способами. По упражнению 5.6, флаг  $F$  можно выбрать

$$\left[ \begin{matrix} n \\ n-k, 1, \dots, n-1 \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[n-k]! \cdot [1]! \cdot \dots \cdot [1]!} = [n]_k$$

способами. Таким образом, число пар  $(L, F)$  равно  $[n] \cdot [n]_k$ , то есть левой части доказываемого тождества.



С другой стороны, посчитаем отдельно количество тех пар  $(L, F)$ , в которых одномерное пространство  $L$  содержится в  $(n - k)$ -мерном подпространстве флага  $F$ . Сам флаг можно выбрать  $[n]_k$  способами, а одномерное подпространство в его  $(n - k)$ -мерном подпространстве  $\begin{bmatrix} n - k \\ 1 \end{bmatrix} = [n - k]$  способами. Значит, количество пар  $(L, F)$  указанного вида равно

$$[n - k] \cdot [n]_k = [n]_{k+1},$$

то есть первому слагаемому в правой части доказываемого тождества.

Найдём теперь количество тех пар  $(L, F)$ , в которых пространство  $L$  содержится в  $(n - k + 1)$ -мерном, но не в  $(n - k)$ -мерном подпространстве флага  $F$ . Оно будет равно  $([n - k + 1] - [n - k]) \cdot [n]_k$ . Аналогично число пар  $(L, F)$ , в которых  $L$  содержится в  $(n - k + 1)$ -мерном, но не в  $(n - k + 1)$ -мерном подпространстве флага  $F$ , равно  $([n - k + 2] - [n - k + 1]) \cdot [n]_k$ , и так далее. Значит, с учётом упражнения 2.3 (ii), число пар  $(L, F)$  равняется

$$[n]_{k+1} + ([n - k + 1] - [n - k]) \cdot [n]_k + ([n - k + 2] - [n - k + 1]) \cdot [n]_k + \dots + ([n] - [n - 1]) \cdot [n]_k = [n]_{k+1} + (n - [n - k]) \cdot [n]_k = [n]_{k+1} + q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]_k,$$

то есть в точности правой части доказываемого тождества.  $\square$

Квантуем теперь тождество из упражнения 1.5 (v), которое, будучи записанным с использованием знака суммы, принимает вид

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{k-i} \cdot \binom{m}{i} = \binom{m+n}{k}.$$

**ТЕОРЕМА 5.8.** *Имеет место тождество*

$$\sum_{i=0}^k q^{(m-i)(k-i)} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $V$  —  $(m + n)$ -мерное пространство над  $\mathbb{F}_q$ . По теореме 5.2, количество  $k$ -мерных подпространств в нём равно  $\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}$ , то есть правой части доказываемого тождества.

Зафиксируем теперь какое-то  $m$ -мерное подпространство  $U$  в  $V$ . Пусть  $W$  — произвольное  $k$ -мерное подпространство пространства  $V$ . Тогда его пересечение  $\widetilde{W}$  с  $U$  тоже будет подпространством (проверьте!) размерности  $i$ , где  $0 \leq i \leq m$ . Подпространство  $\widetilde{W}$  можно выбрать в пространстве  $U$  всего  $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$  способами. Пусть оно уже выбрано. Выберем и зафиксируем в нём какой-нибудь базис. Дополним его векторами  $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_{k-i}$  до базиса  $k$ -мерного пространства  $W$  так, чтобы  $W \cap U = \widetilde{W}$ .

Первый вектор можно выбрать любым, не лежащим в  $U$ , это можно сделать  $q^{m+n} - q^m$  способами. Второй вектор может быть любым, не лежащим в  $(m+1)$ -мерном подпространстве, натянутом на  $U$  и вектор  $\bar{v}_1$ . Значит, всего есть  $q^{m+n} - q^{m+1}$  вариантов для вектора  $\bar{v}_2$ , и так далее. Получаем, что векторы  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-i}$  можно выбрать

$$(q^{m+n} - q^m) \cdot (q^{m+n} - q^{m+1}) \cdot \dots \cdot (q^{m+n} - q^{m+k-i-1})$$

способами.

Как мы уже не раз видели, некоторые из таких наборов будут задавать одно и то же подпространство  $W$ . А именно, количество  $k$ -мерных подпространств, пересечение которых с  $U$  есть фиксированное  $i$ -мерное подпространство  $\widetilde{W}$ , равно

$$\begin{aligned} & \frac{(q^{m+n} - q^m) \cdot (q^{m+n} - q^{m+1}) \cdot \dots \cdot (q^{m+n} - q^{m+k-i-1})}{(q^k - q^i) \cdot (q^k - q^{i+1}) \cdot \dots \cdot (q^k - q^{k-1})} = \\ & = \frac{q^{m+(m+1)+\dots+(m+k-i-1)} \cdot (q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+i+1} - 1)}{q^{i+(i+1)+\dots+(k-i)} \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot (q^{k-i-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} = \\ & = \frac{q^{(m-i)(k-i)} \cdot [n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [n-k+i+1]}{[k-i]!} = q^{(m-i)(k-i)} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем, что общее количество  $k$ -мерных подпространств в  $V$ , пересечение которых с подпространством  $U$  имеет размерность  $i$ , равно  $q^{(m-i)(k-i)} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}$ . Складывая эти выражения по всем  $i$  от 0 до  $k$ , получим левую часть доказываемого тождества.  $\square$

## § 6. ГРУППЫ МАТРИЦ

Как и в параграфе 4, мы не можем здесь, конечно, дать хоть сколь-нибудь полное введение в теорию групп — поэтому ограничиваемся лишь теми определениями и примерами, которые нужны будут нам дальше, отсылая заинтересованного читателя к прекрасным книгам [2, 8, 10].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** Группа — это непустое множество  $G$  вместе с бинарной операцией  $x, y \in G \mapsto x \circ y \in G$ , удовлетворяющей следующим трём свойствам.

- 1)  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  для любых  $x, y, z \in G$ ;
- 2) существует  $e \in G$  такой, что  $x \circ e = e \circ x = x$  для любого  $x \in G$ ;
- 3) для любого  $x \in G$  существует  $\tilde{x} \in G$  такой, что  $x \circ \tilde{x} = \tilde{x} \circ x = e$ .

Первое свойство, как всегда, называется *ассоциативностью* бинарной операции. Элемент  $e$  называется *нейтральным*, а элемент  $\tilde{x}$  — *обратным* к элементу  $x$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Докажите, что нейтральный элемент ровно один. Покажите также, что для любого элемента есть ровно один обратный.

ПРИМЕР 6.3. i) Любое поле  $\mathbb{F}$  является группой относительно операции сложения. Множество  $\mathbb{F}^\times$  ненулевых элементов поля также образует группу относительно операции умножения.

ii) Любое векторное пространство является группой относительно сложения векторов.

iii) Целые числа образуют группу относительно операции сложения, но не образуют группу относительно операции умножения.

Нам потребуется определить ещё одну группу — группу матриц. Будем называть *матрицей  $n$ -го порядка* квадратную табличку размера  $n \times n$ , заполненную числами из какого-то фиксированного поля  $\mathbb{F}$ . (Можно рассматривать также и прямоугольные, но не обязательно квадратные матрицы.) Множество всех матриц  $n$ -го порядка с элементами из  $\mathbb{F}$  обозначим через  $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$ . Будем через  $a_{i,j}$  обозначать  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $A$ , то есть число, стоящее в этой матрице в  $i$ -й строке и в  $j$ -м столбце.

Определим произведение матриц  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  правилом  $C = AB$ , где

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Докажите, что умножение матриц ассоциативно, то есть что  $(AB)C = A(BC)$  для любых  $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ . Проверьте, что единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

является нейтральным элементом.

*Определителем* матрицы  $A$  называется число, обозначаемое  $\det A$ , которое вычисляется по следующему правилу. Если  $n = 1$ , то  $\det A = a_{11}$ , а для любого  $n \geq 2$

$$\det A = (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot M_{i,1} + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{i,n} \cdot M_{i,n}.$$

Здесь  $i$  — произвольное число от 1 до  $n$ , а через  $M_{i,j}$  обозначается определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, получающейся из матрицы  $A$  вычёркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца (он называется *дополнительным минором*). Эта формула для вычисления определителя часто называется формулой

разложения по строке. Верна также аналогичная формула разложения по столбцу: для любого  $j$  от 1 до  $n$

$$\det A = (-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot M_{1,j} + \dots + (-1)^{n+j} \cdot a_{n,j} \cdot M_{n,j}.$$

Определитель матрицы  $A$  обозначают ещё так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР 6.5. Для  $n = 2$  и  $n = 3$  соответственно

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot M_{1,1} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot M_{1,2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}, \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot M_{1,1} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot M_{1,2} + \\ &+ (-1)^{1+3} \cdot a_{1,3} \cdot M_{1,3} = \\ &= a_{1,1} \cdot (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + \\ &+ a_{1,3} \cdot (a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + \\ &+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}. \end{aligned}$$

Если определитель матрицы  $A$  равен нулю, то она называется *вырожденной* (а если не равен нулю — *невырожденной*). Множество всех невырожденных матриц  $n$ -го порядка с элементами из поля  $\mathbb{F}$  будем обозначать через  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ . Самое главное свойство определителя, которое нам потребуется, — это то, что матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда её столбцы являются линейно независимыми (другими словами, образуют базис) в пространстве  $\mathbb{F}^n$  [8, гл. 3, § 3, следствие из теоремы 1]. Кроме того, определитель произведения матриц равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

(см., к примеру, [8, гл. 3, § 2, теорема 3]).

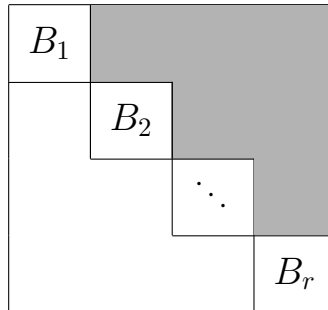
УПРАЖНЕНИЕ 6.6. i) Матрица  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  называется *верхнетреугольной*, если  $a_{i,j} = 0$  при  $i > j$ . Другими словами, матрица  $A$  имеет такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Докажите, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов, то есть

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}.$$

ii) Матрица называется *блочно-треугольной*, если существуют такие числа  $b_1, \dots, b_r$ , в сумме равные  $n$ , что  $a_{i,j} = 0$ , если  $j \leq b_1 + \dots + b_k$  и  $i > b_1 + \dots + b_k$  для любого  $1 \leq k \leq r$ . Проще говоря, матрица  $A$  имеет такой вид:



Здесь диагональные «блоки» матрицы  $A$  — это матрицы  $B_1, B_2, \dots, B_r$  размеров  $b_1 \times b_1, b_2 \times b_2, \dots, b_r \times b_r$  соответственно. На «серых» позициях, то есть в верхней части матрицы, могут стоять любые числа, а в нижней части матрицы стоят нули. Набор чисел  $(b_1, \dots, b_r)$  назовём *типом* блочно-треугольной матрицы  $A$ . Покажите, что произведение двух блочно-треугольных матриц одного типа снова будет блочно-треугольной матрицей того же типа. Проверьте также, что  $\det A = \det B_1 \cdot \dots \cdot \det B_r$ .

Далее, матрица  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  называется *обратной* к данной матрице  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ , если  $AB = BA = E$ . Если такая матрица существует, то ровно одна (см. упражнение 6.2). В этом случае она обозначается  $A^{-1}$ , а матрица  $A$  называется *обратимой*. Можно показать [8, гл. 3, § 3, теорема 1], что матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля.

Один из способов нахождения обратной матрицы заключается в следующем. Разрешим делать со строками произвольной прямоугольной матрицы такие преобразования: прибавлять к любой строке любую другую строку, умноженную на любое число, умножать любую строку на любое ненулевое число и менять местами любые две строки. Пусть  $A$  — невырожденная квадратная матрица  $n$ -го порядка. Припишем к матрице  $A$  справа единичную матрицу и, проводя описанные выше преобразования со строками полученной матрицы размера  $n \times 2n$ , добьёмся, чтобы в «левой части» этой матрицы получилась единичная матрица (если  $A$  обратима, то это возможно). Тогда в «правой части» получится  $A^{-1}$ . Вот пример

нахождения обратной матрицы:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 10 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -10\text{I} \\ -2\text{I} \end{array} \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -9 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) -5\text{III} \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) +3\text{II} \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\text{III} \\ -\text{III} \end{array} \sim \\
 & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array} \right) -\text{II} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -14 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Из всего сказанное выше следует, что множество невырожденных матриц  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$  является группой относительно операции умножения матриц. Эта группа иногда называется *полной линейной группой* или *общей линейной группой* (по-английски *general linear*, отсюда и обозначение).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7.** Группа  $G$ , состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной*;  $|G|$  называется *порядком* группы  $G$ .

**ПРИМЕР 6.8.** Любое конечное поле  $\mathbb{F}_q$  относительно сложения является конечной группой порядка  $q$ . Кроме того,  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{F}_q$  относительно сложения векторов является конечной группой порядка  $q^n$  (почему?).

**УПРАЖНЕНИЕ 6.9.** Докажите, что порядок группы  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  равен

$$(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1}).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.10.** Непустое подмножество  $H$  группы  $G$  называется *подгруппой*, если выполняются два условия:

- 1)  $x \circ y \in H$  для любых  $x, y \in H$ ;
- 2)  $\tilde{x} \in H$  для любого  $x \in H$  (см. определение 6.1).

**ПРИМЕР 6.11.** i) Любая группа является подгруппой в самой себе. Множество, состоящее только из нейтрального элемента группы, является подгруппой.

ii) Поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  является подгруппой в поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$  относительно сложения.

iii) Положительные числа образуют подгруппу в  $\mathbb{R}^\times$  относительно умножения.

iv) Любое подпространство является подгруппой в векторном пространстве относительно сложения векторов.

v) Числа, кратные фиксированному натуральному числу  $n$ , образуют подгруппу в группе целых чисел  $\mathbb{Z}$  относительно сложения.

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. i) Докажите, что любая подгруппа содержит нейтральный элемент группы.

ii) Проверьте, что непустое подмножество  $H$  группы  $G$  является подгруппой тогда и только тогда, когда из того, что  $x, y$  лежат в  $H$ , следует, что  $x \circ \tilde{y}$  тоже лежит в  $H$ .

Обратим внимание, что любую подгруппу  $H$  в группе  $G$  можно рассматривать как самостоятельную группу относительно той же операции  $\circ$ : нужно просто «забыть», что эта операция определена на всей группе  $G$ , и применять её только к элементам из  $H$ . Первое свойство подгруппы гарантирует, что результат применения операции всегда лежит в  $H$ , поэтому мы получаем корректно определённую бинарную операцию на  $H$ . (Почему будут выполняться аксиомы группы?)

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. i) Обозначим через  $B$  множество всех верхнетреугольных матриц из  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Докажите, что это подгруппа в  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Она называется *борелевской* подгруппой. Чему равен её порядок при  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ?

ii) Обозначим через  $P$  множество всех блочно-треугольных матриц из  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  данного типа  $(b_1, \dots, b_r)$ . Докажите, что это подгруппа в  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Она называется *параболической* подгруппой. Чему равен порядок этой подгруппы при  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ?

iii) Обозначим через  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$  множество всех матриц из  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ , определитель которых равен 1. Покажите, что это подгруппа в  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Она называется *специальной линейной* группой (по-английски *special linear*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.14. Пусть  $G$  — любая группа,  $H$  — любая подгруппа в ней,  $g \in G$  — произвольный элемент. *Левым смежным классом* элемента  $g$  по подгруппе  $H$  называется множество  $gH = \{g \circ h, h \in H\}$ .

ПРИМЕР 6.15. i) Пусть  $G$  — любая группа,  $H = G$ . Тогда левый смежный класс любого элемента совпадает со всей группой  $G$  (почему?). Напротив, если  $H = \{e\}$ , то  $gH = \{g\}$  для любого  $g \in G$ .

ii) Если  $G$  — группа целых чисел с операцией сложения,  $H$  — подгруппа, состоящая из чисел, кратных фиксированному натуральному числу  $n$ , то

смежный класс числа  $g$  состоит из всех целых чисел, дающих при делении на  $n$  такой же остаток, как число  $g$ .

iii) Пусть  $G = \mathbb{R}^\times$ ,  $H = \mathbb{R}_{>0}$  — множество положительных чисел. Тогда смежный класс любого положительного числа совпадает с  $H$ , то есть с множеством положительных чисел, а смежный класс любого отрицательного числа — с множеством отрицательных чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 6.16. i) Проверьте, что  $gH = H$  тогда и только тогда, когда элемент  $g$  лежит в  $H$ .

ii) Пусть  $g \in G$  — произвольный элемент. Постройте взаимно однозначное отображение из  $H$  в  $gH$ . Из существования такого отображения вытекает, в частности, что если  $H$  — конечная группа, то все смежные классы состоят из одного и того же числа элементов, равного порядку группы  $H$ .

iii) Покажите, что смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают, то есть если  $g_1, g_2 \in G$  и  $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ , то  $g_1H = g_2H$ .

iv) (*Теорема Лагранжа.*) Если  $G$  — конечная группа,  $H$  — подгруппа в ней, то число различных левых смежных классов по подгруппе  $H$  равно  $|G|/|H|$ . Это число обозначается  $[G : H]$  и называется *индексом* группы  $G$  по подгруппе  $H$ . В частности, порядок  $G$  делится на порядок  $H$ .

iv) Пусть  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ ,  $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ . Докажите, что две невырожденные матрицы  $A$  и  $B$  лежат в одном смежном классе по подгруппе  $H$  тогда и только тогда, когда их определители совпадают. Чему равен порядок  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ ?

Оказывается, квантовые аналоги — это в точности индексы  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  по подгруппам специального вида.

УПРАЖНЕНИЕ 6.17. i) Покажите, что индекс  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  по борелевской подгруппе равен  $[n]!$ .

ii) Докажите, что индекс  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  по параболической подгруппе, состоящей из блочно-треугольных матриц типа  $(b_1, \dots, b_r)$ , где  $b_1 + \dots + b_r = n$ , равен квантовому мультиномиальному коэффициенту  $\begin{bmatrix} n \\ b_1, \dots, b_r \end{bmatrix}$ .

В частности, если матрицы имеют тип  $(k, n - k)$ , то индекс по соответствующей параболической подгруппе равен квантовому числу сочетаний  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ . С другой стороны, пусть матрицы имеют тип  $(n - k, 1, \dots, 1)$  ( $k$  единиц). Другими словами, параболическая подгруппа состоит из матриц такого вида:

$A$	
	$B$



Здесь  $A$  — любая невырожденная матрица размера  $(n - k) \times (n - k)$ , а  $B$  — любая невырожденная верхнетреугольная матрица размера  $k \times k$ . На «серых» позициях стоят любые числа, а в нижней части матрицы — нули. Тогда индекс группы  $GL_n(\mathbb{F}_q)$  по подгруппе  $P$  равен

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ n - k, 1, \dots, 1 \end{array} \right] = \frac{[n]!}{[n - k]!} = [n]_k,$$

то есть квантовому числу размещений.

Итак, мы видим, что, как и в классической комбинаторике, квантовые аналоги на самом деле перечисляют многие объекты весьма различной природы. В заключение мы объясним, почему трактовка квантовых аналогов в терминах матричных групп на самом деле вытекает из геометрической интерпретации. Для этого нам понадобится ещё одно важное понятие — действие группы на множестве.

## § 7. ДЕЙСТВИЕ ГРУПП МАТРИЦ НА ФЛАГАХ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** Пусть  $G$  — любая группа, а  $X$  — какое-то непустое множество. *Действие* группы  $G$  на множестве  $X$  — это правило, которое каждой паре  $g \in G$ ,  $x \in X$  ставит в соответствие какой-то элемент множества  $X$ , обозначаемый  $g.x$ . При этом должны выполняться два условия:

- 1)  $g.(h.x) = (g \circ h).x$  для любых  $g, h \in G$ ,  $x \in X$ ;
- 2)  $e.x = x$  для любого  $x \in X$ .

Если задано действие группы  $G$  на множестве  $X$ , то говорят, что  $G$  *действует* на  $X$  и пишут  $G : X$  или  $G \curvearrowright X$ .

**ПРИМЕР 7.2.** i) Если  $G$  — любая группа, а  $X$  — любое множество, то правило  $g.x = x$  для любых  $g \in G$ ,  $x \in X$  задаёт на  $X$  действие, называемое *тождественным*.

ii) Пусть  $G = \mathbb{Z}$ ,  $X = \mathbb{R}$ . Правило  $g.x = g + x$  определяет действие группы целых чисел (по сложению) на множестве вещественных чисел.

iii) Любая группа действует на самой себе следующим образом:

$$g.x = gxg^{-1}, \quad g, x \in G.$$

Проверьте, что это действительно действие. Оно называется *действием внутренними автоморфизмами*.

iv) Пусть  $H$  — любая подгруппа в группе  $G$ . Тогда  $H$  действует на  $G$  так:  $h.x = hx$ ,  $h \in H$ ,  $x \in G$ . Убедитесь, что это и в самом деле является действием. Оно называется *действием левыми сдвигами*.

v) Обозначим через  $G$  группу  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ , а через  $X$  —  $n$ -мерное координатное пространство  $\mathbb{F}^n$ . Тогда  $G \curvearrowright X$  по правилу  $A.\bar{x} = A\bar{x}$  (имеется в виду умножение матрицы  $n \times n$  на вектор, рассматриваемый как матрица  $n \times 1$ ). То, что это действие, вытекает из ассоциативности умножения матриц и из того, что  $E.\bar{x} = \bar{x}$  для любого вектора  $\bar{x}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Пусть  $G$  — группа, действующая на множестве  $X$ , а  $x$  — произвольный элемент из  $X$ . *Орбитой* этого элемента под действием группы  $G$  называется множество  $\Omega_x$ , состоящее из всех элементов  $g.x$ , когда  $g$  пробегает группу  $G$ , то есть

$$\Omega_x = \{g.x, g \in G\}.$$

Обратим внимание, что сам элемент всегда лежит в своей орбите, так как по второй аксиоме действия группы  $e.x = x$ .

Посмотрим, как выглядят орбиты в каждом из указанных выше примеров.

ПРИМЕР 7.4. i)  $G, X$  — любые,  $g.x = x$ . Ясно, что орбита каждого элемента состоит только из этого элемента:  $\Omega_x = \{x\}$  для любого  $x \in X$ .

ii)  $G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}, g.x = g + x$ . Здесь орбита числа  $x \in \mathbb{R}$  состоит из всех чисел, которые имеют такую же дробную часть, что и  $x$ .

iii)  $X = G, g.x = gxg^{-1}$ . Описание орбит здесь зависит от того, о какой группе идёт речь. Отметим лишь, что орбита в этом случае называется *классом сопряжённости* элемента  $x$ . Как будет устроен класс сопряжённости элемента  $x$ , если  $G = \mathbb{Z}$ ?

iv)  $H$  — подгруппа в группе  $G, H \curvearrowright G$  по правилу  $h.x = hx$ . Здесь орбита элемента  $x$  — это в точности его левый смежный класс по подгруппе  $H$ , то есть  $\Omega_x = xH$ .

v)  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), X = \mathbb{F}^n, A.\bar{x} = A\bar{x}$ . Конечно, в орбите нулевого вектора лежит только он сам:  $\Omega_{\bar{0}} = \{\bar{0}\}$ . На самом деле орбита любого ненулевого вектора совпадает с множеством всех ненулевых векторов. Действительно, в параграфе 4 была сформулирована теорема о дополнении до базиса, которая, напомним, гласит, что базис любого подпространства можно дополнить до базиса пространства. Отсюда сразу следует, что любой ненулевой вектор из  $\mathbb{F}^n$  можно включить в базис пространства  $\mathbb{F}^n$  (почему?).

Пусть теперь  $\bar{x} \in \mathbb{F}^n$  — любой ненулевой вектор. Дополним его до базиса  $\bar{f}_1 = \bar{x}, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$  и рассмотрим матрицу  $A$ ,  $j$ -й столбец которой совпадает со столбцом  $\bar{f}_j$ . Легко проверить, что если  $\bar{e}_1$  — первый вектор стандартного базиса  $\mathbb{F}^n$  (вектор, у которого первая координата равна единице, а остальные — нулю), то  $A.\bar{e}_1 = A\bar{e}_1 = \bar{x}$ . Значит, каждый ненулевой вектор лежит в орбите вектора  $\bar{e}_1$ . Из пункта (i) следующего упражнения вытекает, что

тогда орбита каждого ненулевого вектора совпадает с орбитой вектора  $\bar{e}_1$ , которая, в свою очередь, совпадает с множеством ненулевых векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Пусть группа  $G$  действует на множестве  $X$ .

i) Докажите, что орбиты двух элементов либо не пересекаются, либо совпадают, то есть если  $x, y \in X$  и  $\Omega_x \cap \Omega_y \neq \emptyset$ , то  $\Omega_x = \Omega_y$ .

ii) *Стабилизатором* элемента  $x$  называется множество тех элементов группы  $G$ , под действием которых элемент  $x$  переходит сам в себя. Обозначается стабилизатор так:

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}.$$

Покажите, что он всегда является подгруппой в группе  $G$ .

iii) Постройте взаимно однозначное соответствие между множеством левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $\text{Stab}(x)$  и орбитой  $\Omega_x$ .

Из последнего пункта вытекает замечательное следствие: если группа  $G$  конечна, то количество элементов в орбите элемента  $x$  равно индексу  $G$  по  $\text{Stab}(x)$ , то есть

$$|\Omega_x| = [G : \text{Stab}(x)] = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}.$$

Теперь уже легко объяснить, как получить групповую интерпретацию квантовых аналогов из геометрической.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. i) Напомним, что через  $\mathcal{F}_d(\mathbb{F}^n)$  мы обозначали в параграфе 5 множество всех флагов типа  $d = (d_1, \dots, d_{r-1})$  в пространстве  $\mathbb{F}^n$ . Обозначим  $b_1 = d_1$ ,  $b_2 = d_2 - d_1$ ,  $b_3 = d_3 - d_2$ ,  $\dots$ ,  $b_{r-1} = d_{r-1} - d_{r-2}$ ,  $b_r = n - d_{r-1}$ . Пусть  $F$  — флаг типа  $d$ ,  $U_1 \subset \dots \subset U_{r-1}$  — подпространства, его образующие, а  $A$  — любая невырожденная матрица. Рассмотрим множества

$$AU_i = \{A\bar{x}, \bar{x} \in U_i\}, \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

Докажите, что это подпространства, причём  $AU_1 \subset \dots \subset AU_r$  и  $\dim(AU_i) = \dim U_i$  для всех  $i$ . Другими словами, цепочка вложенных подпространств  $AU_1 \subset \dots \subset AU_{r-1}$  образует флаг того же типа, что и  $F$ ; обозначим этот флаг через  $A.F$ . Тем самым мы определили действие группы  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$  на множестве флагов  $\mathcal{F}_d(\mathbb{F}^n)$ .

ii) Покажите, что это действие *транзитивно*, то есть всё множество  $\mathcal{F}_d(\mathbb{F}^n)$  представляет из себя одну орбиту.

iii) Обозначим через  $F_0$  так называемый *координатный* флаг. По определению, в нём подпространство  $U_i$  натянуто на первые  $i$  векторов стандартного базиса, то есть

$$U_i = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Проверьте, что его стабилизатор — это в точности параболическая подгруппа  $P$ , состоящая из блочно-треугольных матриц типа  $(b_1, \dots, b_r)$ .

Пусть теперь  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ . Тогда индекс  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}^n)$  по подгруппе  $P$  будет совпадать с количеством элементов множества  $\mathcal{F}_d(\mathbb{F}^n)$ , которое, в силу упражнения 5.6, равно квантовому мультиномиальному коэффициенту  $\left[ \begin{matrix} n \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix} \right]$ , как и было показано в упражнении 6.17.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

**1.1. РЕШЕНИЕ.** i) Нужно просто привести дроби к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} (n)_{k+1} + k \cdot (n)_k &= \frac{n!}{(n-k-1)!} + \frac{k \cdot n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{k \cdot n!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k)!} + \frac{k \cdot n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot n!}{(n-k)!} = n \cdot (n)_k. \end{aligned}$$

ii) Докажем индукцией по  $n$ . База индукции: пусть  $n = 1$ . Если  $m = 0$ , то левая часть имеет вид  $(0)_0 = 1$ , а правая равна  $\frac{(1)_1}{1} = 1$ , как и должно быть. Если же  $m \geq 1$ , то и левая, и правая части равны нулю.

Предположим теперь, что для какого-то натурального числа  $n$  формула уже доказана. Преобразуем левую часть для  $n+1$ , применив к ней сначала предположение индукции, а затем формулу из пункта (i):

$$\begin{aligned} (0)_m + (1)_m + \dots + (n-1)_m + (n)_m &= \frac{n_{m+1}}{m+1} + (n)_m = \\ &= \frac{n_{m+1} + (m+1) \cdot (n)_m}{m+1} = \frac{(n_{m+1} + m \cdot (n)_m) + (n)_m}{m+1} = \\ &= \frac{n \cdot (n)_m + (n)_m}{m+1} = \frac{(n+1) \cdot (n)_m}{m+1} = \frac{(n+1)_m}{m+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**1.2. i) РЕШЕНИЕ.** Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{k \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \\ &= \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{k \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \end{aligned}$$

но это и есть число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

ii) УКАЗАНИЕ. Предположим, что нужно набрать команду из  $k$  игроков, причём у нас всего  $n$  претендентов. Посчитайте отдельно способы сформировать команду, взяв первого претендента, а отдельно — не взяв первого претендента.

**1.3. РЕШЕНИЕ.** В левой части стоит произведение  $n$  скобок, в каждой из которых написано  $x + y$ . Раскроем скобки, но пока не будем приводить подобные слагаемые. Каждое слагаемое в получившейся сумме формируется так: мы перемножаем сколько-то переменных  $x$  и сколько-то переменных  $y$ , причём если  $y$  мы взяли из  $k$  скобок, то  $x$  берётся из оставшихся  $n - k$  скобок. Значит, каждое слагаемое равно  $x^{n-k}y^k$  для какого-то  $k$  от 0 до  $n$ .

Если мы теперь приведём подобные, то коэффициент перед слагаемым вида  $x^{n-k}y^k$  будет равен количеству таких слагаемых до приведения подобных, то есть количеству способов выбрать  $k$  скобок из  $n$  скобок (это те скобки, из которых мы выбрали переменную  $y$ ). Но это в точности число сочетаний из  $n$  по  $k$ , как и написано в правой части.

**1.5. i) РЕШЕНИЕ.** Подставим в бином Ньютона  $x = y = 1$ .

ii) РЕШЕНИЕ. Посчитаем, чему равно количество последовательностей из плюсов и минусов длины  $n$ . С одной стороны, на каждой позиции может стоять либо плюс, либо минус (всего два варианта), причём каждая позиция заполняется независимо от остальных, поэтому число таких последовательностей равно  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$  ( $n$  сомножителей), то есть  $2^n$ .

С другой стороны, посчитаем количество тех последовательностей, в которых ровно  $k$  плюсов. Эти плюсы могут стоять на любых  $k$  позициях из  $n$  (на остальных автоматически стоят минусы), а количество способов выбрать эти позиции равно, по определению, числу сочетаний  $\binom{n}{k}$ . Осталось заметить, что  $k$  может быть любым числом от нуля до  $n$ .

iii) РЕШЕНИЕ. Подставим в бином Ньютона  $x = 1, y = -1$ .

iv) УКАЗАНИЕ. Предположите, что имеется  $n$  депутатов, из которых нужно выбрать одного президента, а из оставшихся сформировать правительство, в которое входит любое число депутатов от 0 до  $n - 1$ .

v) РЕШЕНИЕ. Пусть нам надо выбрать  $k$  предметов из  $n + m$  предметов. Поделим эти  $n + m$  предметов на две кучки по  $n$  и  $m$  предметов. Сперва выберем из первой кучки  $j$  предметов; это можно сделать  $\binom{n}{j}$  способами. Теперь из второй кучки осталось выбрать  $\binom{m}{k-j}$  предметов; это, в свою очередь, можно сделать  $\binom{m}{k-j}$  способами. Значит, общее число способов выбрать  $k$  предметов так, чтобы из первой кучки было взято  $j$  предметов, равно  $\binom{n}{j} \cdot \binom{m}{k-j}$ . Теперь заметим, что  $j$  может быть любым от 0 до  $k - 1$  и так получатся все способы выбрать  $k$  предметов из  $n + m$  предметов.

**2.3. РЕШЕНИЕ.** i) Если это равенство верно, то степени многочленов в левой и в правой частях равны. Степень многочлена слева равна

$$(a - 1) + (b - 1) = a + b - 2.$$

Степень многочлена справа равна  $ab - 1$ . Значит,

$$ab - 1 = a + b - 2,$$

то есть  $(a - 1) \cdot (b - 1) = 0$ , откуда хотя бы одно из чисел  $a$  или  $b$  равно единице. Очевидно, что в таком случае второе число может быть любым.

ii) Докажем первое равенство; второе доказывается аналогично. Преобразуем правую часть:

$$[k] + q^k \cdot [n - k] = \frac{q^k - 1}{q - 1} + \frac{q^k \cdot (q^{n-k} - 1)}{q - 1} = \frac{q^k - 1 + q^n - q^k}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = [n].$$

**2.5. РЕШЕНИЕ.** i) Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} [n]_{k+1} + q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]_k &= \frac{[n]!}{[n - k - 1]!} + \frac{q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]!}{[n - k]!} = \\ &= \frac{[n - k] \cdot [n]!}{[n - k] \cdot [n - k - 1]!} + \frac{q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]!}{[n - k]!} = \\ &= \frac{[n - k] \cdot [n]!}{[n - k]!} + \frac{q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]!}{[n - k]!} = \\ &= \frac{([n - k] + q^{n-k} \cdot [k]) \cdot [n]!}{[n - k]!} = \frac{[n] \cdot [n]!}{[n - k]!} = [n] \cdot [n]_k. \end{aligned}$$

Переход от третьей строки к четвёртой основан на втором равенстве из пункта (ii) предыдущего упражнения.

ii) Докажем первое равенство; второе доказывается аналогично. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n - 1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \cdot \begin{bmatrix} n - 1 \\ k - 1 \end{bmatrix} &= \frac{[n - 1]!}{[k]! \cdot [n - k - 1]!} + \frac{q^{n-k} \cdot [n - 1]!}{[k - 1]! \cdot [n - k]!} = \\ &= \frac{[n - k] \cdot [n - 1]!}{[k]! \cdot [n - k]!} + \frac{q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n - 1]!}{[k]! \cdot [n - k]!} = \\ &= \frac{([n - k] + q^{n-k} \cdot [k]) \cdot [n - 1]!}{[k]! \cdot [n - k]!} = \frac{[n] \cdot [n - 1]!}{[k]! \cdot [n - k]!} = \\ &= \frac{[n]!}{[k]! \cdot [n - k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь мы опять пользовались пунктом (ii) предыдущего упражнения.

**2.8. РЕШЕНИЕ.** Применим индукцию по  $n$ . База индукции  $n = 0$  очевидна. Предположим, что для  $n - 1$  утверждение уже доказано. Тогда, с учётом предположения индукции,

$$\begin{aligned}
 [x + y]^n &= [x + y]^{n-1} \cdot (x + q^{n-1}y) = (x + q^{n-1}y) \times \\
 &\times \left( q^{0 \cdot (-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} x^{n-1}y^0 + q^{1 \cdot 0/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-2}y^1 + \dots + \right. \\
 &+ q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-1-k}y^k + \dots + q^{(n-1)(n-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^0y^{n-1} \left. \right) = \\
 &= \left( q^{0 \cdot (-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} x^n y^0 + q^{1 \cdot 0/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1}y^1 + \dots + \right. \\
 &+ q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k + \dots + q^{(n-1)(n-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^1y^{n-1} \left. \right) + \\
 &+ q^{n-1} \cdot \left( q^{0 \cdot (-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} x^{n-1}y^1 + q^{1 \cdot 0/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-2}y^2 + \dots + \right. \\
 &+ q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-1-k}y^{k+1} + \dots + q^{(n-1)(n-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^0y^n \left. \right).
 \end{aligned}$$

Последнюю сумму мы разбили на две группы слагаемых, взятых в скобки. Уберём из первой скобки самое первое слагаемое (оно равно  $x^n$ ), а из второй скобки — самое последнее слагаемое (оно равно  $y^n$ ).

Оставшиеся слагаемые разобьём на пары так, чтобы в каждую пару вошло по одному слагаемому из каждой скобки. А именно, в пару к слагаемому

$$q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k$$

из первой скобки возьмём слагаемое

$$q^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-k}y^k$$

из второй скобки. Тогда сумма в каждой паре равна

$$q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k + q^{(n-1)+(k-1)(k-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-k}y^k.$$

Поскольку  $k(k-1)/2 = (k-1)(k-2)/2 + (k-1)$ , сумму в каждой паре можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 &q^{k(k-1)/2} \cdot \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k + q^{(n-1)-(k-1)} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-k}y^k \right) = \\
 &= q^{k(k-1)/2} \cdot \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) \cdot x^{n-k}y^k = q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}y^k
 \end{aligned}$$

(мы воспользовались квантовым треугольником Паскаля).

Окончательно:

$$[x + y]^n = x^n + q^{1 \cdot 0/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1} y^1 + q^{2 \cdot 1/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-2} y^2 + \\ + q^{k(k-1)/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k + \dots + q^{(n-1)(n-2)/2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^1 y^{n-1} + y^n,$$

что и требовалось доказать.

**2.9. УКАЗАНИЕ.** Докажите сначала, что  $yx^m = q^m x^m y$ . Теперь примените индукцию по  $n$  (база индукции  $n = 0$  очевидна). Если утверждение уже доказано при  $n - 1$ , то предположение индукции показывает, что

$$(x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y)^{n-1} = (x + y) \times \\ \times \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} x^{n-1} y^0 + \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-2} y^1 + \dots + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-1-k} y^k + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^0 y^{n-1} \right) = \\ = x^n + \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} x^n y^1 + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} x^1 y^{n-1} + \\ + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} y x^{n-1} y^1 + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} y x^{n-1-k} y^k + \dots + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} y x^1 y^{n-2} + y^n.$$

Теперь рассуждайте так же, как в решении предыдущего упражнения; в частности, используйте треугольник Паскаля.

**4.2. РЕШЕНИЕ.** Покажем сначала, что  $0^2 = 0$ . В самом деле,

$$0^2 = 00 = 0(0 + 0) = 0^2 + 0^2.$$

Прибавив к обеим частям этого равенства  $-0^2$ , получим, что

$$0 = 0^2 + (-0^2) = (0^2 + 0^2) + (-0^2) = 0^2 + (0^2 + (-0^2)) = 0^2 + 0 = 0^2,$$

как мы и хотели.

Обозначим теперь  $0x$  через  $a$  и заметим, что

$$a0 = (0x)0 = 0(x0) = 0(0x) = 0^2 x = 0x = a.$$

Если предположить, что  $a \neq 0$ , то существует  $a^{-1}$  и тогда

$$1 = a^{-1}a = a^{-1}(a0) = (a^{-1}a)0 = 1 \cdot 0 = 0$$

по определению элемента 1. Но это противоречит условию  $1 \neq 0$ , поэтому  $a = 0$ .



Обозначим теперь  $(-1)x$  через  $b$ . Тогда

$$x + b = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0.$$

А раз так, то

$$-x = -x + 0 = -x + (x + b) = (-x + x) + b = 0 + b = b,$$

как и было обещано.

**4.4. i) УКАЗАНИЕ.** Обратите внимание, что даже проверка ассоциативности нетривиальна! Для доказательства существования обратного элемента используйте тот факт, что для любых целых чисел  $a, b$  найдутся такие целые числа  $c, d$ , что

$$ac + bd = \text{НОД}(a, b).$$

Доказательство этого факта вытекает из алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя. Это доказательство можно найти, к примеру, в [12, гл. 4].

ii) ОТВЕТ. Вот эти таблицы для  $\mathbb{F}_5$  и  $\mathbb{F}_7$ :

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

**4.5. ОТВЕТ.** Пусть это множество состоит из элементов  $a, b, c, d$ . Зададим сложение и умножение так:

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$a$	$c$	$d$	$b$
$d$	$a$	$d$	$b$	$c$

**4.7. РЕШЕНИЕ.** Пусть  $0\bar{x} = \bar{a}$ , тогда

$$\bar{a} = 0\bar{x} = (0 + 0)\bar{x} = 0\bar{x} + 0\bar{x} = \bar{a} + \bar{a}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства вектор  $-\bar{a}$ :

$$\bar{0} = \bar{a} + (-\bar{a}) = (\bar{a} + \bar{a}) + (-\bar{a}) = \bar{a} + (\bar{a} + (-\bar{a})) = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a},$$

как мы и хотели.

С другой стороны, пусть  $(-1)\bar{x} = \bar{b}$ , тогда

$$\bar{0} = 0\bar{x} = (1 + (-1))\bar{x} = 1\bar{x} + (-1\bar{x}) = \bar{x} + \bar{b}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства вектор  $-\bar{x}$ :

$$-\bar{x} = -\bar{x} + \bar{0} = -\bar{x} + (\bar{x} + \bar{b}) = (-\bar{x} + \bar{x}) + \bar{b} = \bar{0} + \bar{b} = \bar{b}.$$

**5.6. РЕШЕНИЕ.** Пусть  $F$  — флаг типа  $(l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + \dots + l_{r-1})$ , образованный цепочкой подпространств

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{r-1}$$

в  $n$ -мерном пространстве  $V$ . Подпространство  $U_{r-1}$ , согласно теореме 5.2, можно выбрать

$$\left[ \begin{matrix} n \\ l_1 + \dots + l_{r-1} \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[l_1 + \dots + l_{r-1}]![n - l_1 - \dots - l_{r-1}]!} = \frac{[n]!}{[l_1 + \dots + l_{r-1}]![l_r]!}$$

способами.

Аналогично число способов выбрать подпространство  $U_{r-2}$  в пространстве  $U_{r-1}$  равно

$$\left[ \begin{matrix} [l_1 + \dots + l_{r-1}] \\ l_1 + \dots + l_{r-2} \end{matrix} \right] = \frac{[l_1 + \dots + l_{r-1}]!}{[l_1 + \dots + l_{r-2}]![l_1 + \dots + l_{r-1} - \dots - l_{r-2}]!} = \frac{[l_1 + \dots + l_{r-1}]!}{[l_1 + \dots + l_{r-2}]![l_{r-1}]!}.$$

Значит, количество способов выбрать в  $V$  пару подпространств  $U_{r-2} \subset U_{r-1}$  нужных размерностей равно

$$\frac{[n]!}{[l_1 + \dots + l_{r-1}]![l_r]!} \cdot \frac{[l_1 + \dots + l_{r-1}]!}{[l_1 + \dots + l_{r-2}]![l_{r-1}]!} = \frac{[n]!}{[l_1 + \dots + l_{r-2}]![l_{r-1}]![l_r]!}.$$

Продолжая этот процесс, получим в конце концов, что количество способов выбрать флаг  $F$  в пространстве  $V$  в точности равно квантовому мультиномиальному коэффициенту  $\left[ \begin{matrix} n \\ l_1, \dots, l_r \end{matrix} \right]$ .

Покажем теперь, что он является многочленом от  $q$  с целыми коэффициентами. Для этого используем индукцию по  $r \geq 2$ . База индукции  $r = 2$  очевидна: это в точности утверждение о том, что квантовое число сочетаний является многочленом от  $q$  с целыми коэффициентами. Предположим теперь, что утверждение доказано для  $r - 1$ . Тогда, по предположению индукции,  $\left[ \begin{matrix} n \\ l_1, \dots, l_{r-2}, l_{r-1} + l_r \end{matrix} \right]$  является многочленом от  $q$

с целыми коэффициентами. Но  $\begin{bmatrix} l_{r-1} + l_r \\ l_{r-1} \end{bmatrix}$  — тоже многочлен от  $q$  с целыми коэффициентами, поэтому таковым будет и

$$\begin{bmatrix} n \\ l_1, \dots, l_{r-2}, l_{r-1} + l_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{r-1} + l_r \\ l_{r-1} \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[l_1]! \dots [l_{r-2}]! [l_{r-1} + l_r]!} \cdot \frac{[l_{r-1} + l_r]!}{[l_{r-1}]! [l_r]!} = \begin{bmatrix} n \\ l_1, \dots, l_r \end{bmatrix}.$$

**6.2. РЕШЕНИЕ.** Если  $e_1, e_2$  — нейтральные элементы, то

$$e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$

Первое равенство вытекает из того, что  $e_2$  нейтрален, а второе — из нейтральности  $e_1$ .

Если теперь  $y, z$  — обратные элементы к какому-то элементу  $x \in G$ , то с учётом ассоциативности бинарной операции в группе

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z.$$

**6.4. РЕШЕНИЕ.** По определению,  $(i, j)$ -й элемент левой части равен

$$\sum_{k=1}^n (AB)_{i,k} c_{k,j} = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n a_{i,l} b_{l,k} \right) \cdot c_{k,j} = \sum_{k,l=1}^n a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j}.$$

Последняя запись означает, что слагаемые в сумме нумеруются двумя индексами,  $k$  и  $l$ , каждый из которых может независимо от другого принимать любое значение от 1 до  $n$ .

Аналогично  $(i, j)$ -й элемент правой части равен

$$\sum_{l=1}^n a_{i,l} (BC)_{l,j} = \sum_{l=1}^n a_{i,l} \left( \sum_{k=1}^n b_{l,k} c_{k,j} \right) = \sum_{l,k=1}^n a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j}.$$

Получаем, что это один и тот же элемент!

Проверка того, что  $E$  — нейтральный элемент, тривиальна.

**6.6. i) УКАЗАНИЕ.** Примените формулу разложения по последней строке (или по первому столбцу) несколько раз.

ii) **РЕШЕНИЕ.** Пусть  $X, Y$  — блочно-треугольные матрицы, имеющие тип  $b_1, \dots, b_r$ ,  $Z = XY$ . Пусть  $k$  — любое число от 1 до  $r$ . Обозначим  $v = b_1 + \dots + b_k$ . Надо показать, что  $c_{i,j} = 0$  при  $j \leq v$  и  $i > v$ . Но

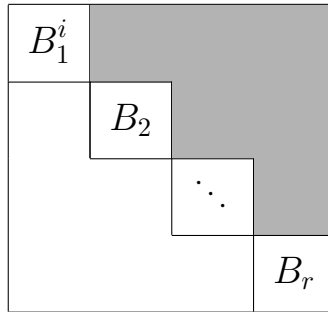
$$z_{i,j} = (x_{i,1}y_{1,j} + \dots + x_{i,v}y_{v,j}) + (x_{i,v+1}y_{v+1,j} + \dots + x_{i,n}y_{n,j}).$$

В первой группе слагаемых равны нулю элементы матрицы  $X$ , а во второй — элементы матрицы  $Y$ .

Для доказательства факта про определители используем индукцию по  $n$ . База индукции  $n = 1$  очевидна. Предположим, что для блочно-треугольных матриц размера  $n - 1$  утверждение уже доказано. Применим к матрице  $A$  формулу разложения по первому столбцу. Если через  $B_1^i$  обозначить матрицу, получающуюся из матрицы  $B_1$  удалением  $i$ -й строки и первого столбца, то мы получим, что

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} M_{i,1} = \sum_{i=1}^{b_1} (-1)^{i+1} a_{i,1} M_{i,1},$$

где  $M_{i,1}$  — определитель матрицы вида



Он, по предположению индукции, равен  $\det B_1^i \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_r$ , поэтому

$$\det A = \left( \sum_{i=1}^{b_1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det B_1^i \right) \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_r = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_r.$$

**6.9. УКАЗАНИЕ.** Воспользуйтесь тем, что определитель матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда её столбцы образуют базис в  $\mathbb{F}_q^n$ .

**6.12. ii) УКАЗАНИЕ.** Для доказательства достаточности не забудьте, что в  $H$  есть хотя бы один элемент. Покажите сначала, что в  $H$  лежит нейтральный элемент, потом — что если  $x \in H$ , то и  $\tilde{x} \in H$ , и, наконец, что если  $x, y \in H$ , то и  $x \circ y \in H$ .

**6.13. ОТВЕТ.** i) Если  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ , то  $|B| = (q - 1)^n \cdot q^{n(n-1)/2}$ .

ii) При  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$

$$\begin{aligned} |P| &= (q^{b_1} - 1) \cdot (q^{b_1} - q) \cdot \dots \cdot (q^{b_1} - q^{b_1-1}) \times \\ &\quad \times (q^{b_2} - 1) \cdot (q^{b_2} - q) \cdot \dots \cdot (q^{b_2} - q^{b_2-1}) \times \dots \times \\ &\quad \times (q^{b_r} - 1) \cdot (q^{b_r} - q) \cdot \dots \cdot (q^{b_r} - q^{b_r-1}) \times q^a, \end{aligned}$$

где  $a = \frac{1}{2} \cdot (n(n-1) - b_1(b_1-1) - b_2(b_2-1) - \dots - b_r(b_r-1))$ .

**6.16.** i) РЕШЕНИЕ. Если  $gH = H$ , то, поскольку  $e \in H$ , мы видим, что  $g = g \circ e \in gH = H$ .

Обратно, пусть  $g \in H$ , тогда для любого элемента  $h \in H$  выполняется  $g \circ h \in H$ , потому что  $H$  — подгруппа. Значит,  $gH \subset H$ . Наконец, каким бы ни был  $x \in H$ , элемент  $h = \tilde{g} \circ x$  лежит в  $H$ , так как  $H$  — подгруппа и  $g, x \in H$ . А тогда  $x = e \circ x = (g \circ \tilde{g}) \circ x = g \circ (\tilde{g} \circ x) = g \circ h$  лежит в  $gH$ , поэтому  $H \subset gH$ . Вывод:  $gH = H$ .

ii) УКАЗАНИЕ. Взаимно однозначное отображение из  $H$  в  $gH$  устроено очень просто: оно переводит  $h \in H$  в  $g \circ h$ .

iii) РЕШЕНИЕ. Покажем, что  $g_1H \subset g_2H$  (обратное включение показывается точно так же). Для этого заметим сначала, что  $g_1 \in g_2H$ . В самом деле, по условию существует такой  $z \in G$ , что  $z \in g_1H \cap g_2H$ . Другими словами, найдутся такие  $h_1, h_2 \in H$ , что  $z = g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$ . Но тогда

$$g_1 = z \circ \tilde{h}_1 = (g_2 \circ h_2) \circ \tilde{h}_1 = g_2 \circ (h_2 \circ \tilde{h}_1) = g_2 \circ h'$$

лежит в  $g_2H$ , так как  $h' = h_2 \circ \tilde{h}_1 \in H$ .

Если теперь  $g_1 \circ h$  — произвольный элемент из  $g_1H$ , то

$$g_1 \circ h = (g_2 \circ h') \circ h = g_2 \circ (h' \circ h)$$

тоже лежит в  $g_2H$ , ибо  $h' \circ h \in H$ .

iv) УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь двумя предыдущими пунктами.

v) ОТВЕТ.  $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot \dots \cdot (q^n - q^{n-1})}{q - 1}$ .

**6.17.** УКАЗАНИЕ. i) Воспользуйтесь упражнениями 6.9 и 6.13 (i).

ii) Воспользуйтесь упражнениями 6.9 и 6.13 (ii).

**7.5.** i) УКАЗАНИЕ. Доказательство должно быть очень похоже на доказательство упражнения 6.16 (iii).

iii) УКАЗАНИЕ. Это отображение переводит левый смежный класс элемента  $g \in G$  в  $g.x$ .

**7.6.** РЕШЕНИЕ. i) Если  $A\bar{x}, A\bar{y}$  лежат в  $AU_i$  для каких-то  $\bar{x}, \bar{y} \in U_i$ , то  $\bar{x} + \bar{y} \in U_i$ , поскольку  $U_i$  — подпространство, поэтому

$$A\bar{x} + A\bar{y} = A(\bar{x} + \bar{y}) \in AU_i.$$

Второе свойство подпространства проверяется аналогично. Итак,  $AU_i$  — подпространство. Включения  $AU_i \subset AU_{i+1}$  очевидны: для любого  $A\bar{x} \in AU_i$  имеем  $\bar{x} \in U_i \subset U_{i+1}$ , а значит,  $A\bar{x} \in AU_{i+1}$ .

Покажем, что  $\dim AU_i = \dim U_i$ . Ясно, что  $\dim AU_i \leq \dim U_i$ . Действительно, предположим, что векторы  $A\bar{x}_1, \dots, A\bar{x}_k \in AU_i$  линейно независимы.

Тогда линейно независимы и векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in U_i$  (докажите это от противного). Значит, в  $AU_i$  не может быть больше линейно независимых векторов, чем в  $U_i$ , откуда и вытекает требуемое неравенство.

Осталось заметить, что в предыдущем рассуждении  $A$  — любая невырожденная матрица, а  $U_i$  — любое подпространство. Легко понять, что  $U_i = A^{-1}(AU_i)$  (проверьте!), поэтому

$$\dim U_i = \dim A^{-1}(AU_i) \leq \dim AU_i,$$

а значит, они равны.

ii) Достаточно доказать, что любой флаг  $F$  типа  $d$  лежит в орбите координатного флага  $F_0$  (почему этого достаточно?). Чтобы это доказать, выберем в  $U_1$  базис, затем дополним его до базиса  $U_2$ , полученный набор векторов дополним до базиса  $U_3$ , и так далее. В конце концов, получим базис  $U_{r-1}$ , который дополним до базиса всего  $\mathbb{F}^n$ . Обозначим через  $A$  матрицу, столбцы которой состоят из координат векторов этого базиса. Легко проверить (проверьте!), что  $A \cdot F_0 = F$ .

iii) Докажем, что  $\text{Stab}(F_0) \subset P$ . Выберем произвольную матрицу  $A$  из стабилизатора флага  $F_0$ . Пусть  $k$  — какое-то число от 1 до  $r$ . Нужно показать, что  $a_{i,j} = 0$  при  $j \leq b_1 + \dots + b_k$  и  $i > b_1 + \dots + b_k$ . Но условие  $A \cdot F_0 = F_0$  означает, в частности, что  $AU_k = U_k$ . Это равносильно тому, что  $A\bar{e}_j \in U_k$  для любого  $j \leq d_k = b_1 + \dots + b_k$ .

Среди прочего,  $A\bar{e}_j \in U_k$  для  $j \leq b_1 + \dots + b_k$ . Но условие  $A\bar{e}_j \in U_k$  означает, что вектор  $A\bar{e}_j$  (а это в точности  $j$ -й столбец матрицы  $A$ ) может быть представлен в виде линейной комбинации первых  $d_k$  векторов стандартного базиса, то есть его координаты  $a_{i,j}$  равны нулю при  $i > d_k$ , как мы и хотели. Итак,  $\text{Stab}(F_0) \subset P$ . Обратное включение проверяется похоже и совсем просто.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2013.
- [2] Вимберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- [3] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, Бинум, 2009.
- [4] Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В. Математический анализ в 57-й школе. Четырёхгодичный курс. М.: МЦНМО, 2008.
- [5] Доценко В. В. Числа Каталана и естественные отображения / С. В. Иванов, К. П. Кохась, А. И. Храбров и др., сост. Петербургские олимпиады школьников по математике 2003–2005. СПб.: Невский диалект, БХВ–Петербург, 2006. С. 328–360.

- [6] Доценко В. В. Числа Каталана и естественные отображения. Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2009. С. 139–165.
- [7] Кац В. Г., Чен П. Квантовый анализ. М.: МЦНМО, 2005.
- [8] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
- [9] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009.
- [10] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
- [11] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007. Электронная версия <http://www.mcsme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf>.
- [12] Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2011.
- [13] Окулов С. М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.
- [14] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2013.
- [15] Jantzen J. C. Lectures on quantum groups // Grad. Stud. in Math. V. 6. AMS, 1996.
- [16] Petkovšek M., Wilf H. S., Zeilberger D.  $A=B$ . A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996. Электронная версия <http://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html>.

# Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений

М. А. Берштейн\*, Г. А. Мерзон

## ВВЕДЕНИЕ

В статье решаются несколько задач перечислительной комбинаторики, связанных с диаграммами Юнга. А именно выводятся формулы для количеств

- стандартных таблиц Юнга данной формы («формула крюков»);
- полустандартных таблиц Юнга данной формы, или, эквивалентно, таблиц Гельфанда — Цетлина («формула Вейля»);
- трёхмерных диаграмм Юнга («формулы Макмагона»).

Все эти задачи интересны не только с точки зрения комбинаторики. Первые две произошли из теории представлений симметрической группы  $S_N$  и полной матричной группы  $GL_n(\mathbb{C})$  соответственно. Трёхмерные диаграммы Юнга сейчас возникают в моделях математической физики и в теории представлений бесконечномерных алгебр.

В статье мы показываем, как перечисленные выше классические задачи решаются при помощи одного и того же метода. Строится биекция между изучаемыми комбинаторными объектами и некоторыми наборами путей на квадратной решётке. Для подсчёта числа этих путей используется *метод отражений*.

Видимо, самым простым и известным применением этого метода является вывод формулы для чисел Каталана (с него мы и начинаем). Излагаемый вывод формулы крюков принадлежит Зильбергеру [18], применения к трёхмерным диаграммам Юнга — Гесселю и Вьено [13].

Другая цель статьи — показать на конкретных примерах важные математические понятия: определители, диаграммы Юнга,  $q$ -биномиальные коэффициенты, производящие функции.

---

\* Работа частично поддержана грантами РФФИ 12-01-00836а и 12-01-31236-мол\_а.



В статье довольно много упражнений; в упражнениях, в частности, вынесена часть доказательств. Мелким шрифтом выделены вставки для более подготовленного читателя. Они несущественны для понимания остальной части текста.

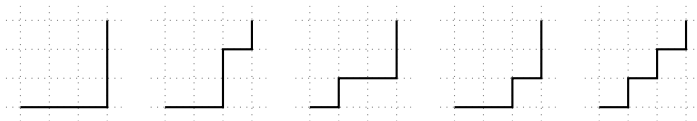
Мы благодарны О. Берштейн и В. Горину, прочитавшим предварительный текст статьи и предложившим много улучшений. Также мы благодарны В. Клепцыну, Е. Смирнову, Б. Фейгину за полезные обсуждения.

## § 1. ЧИСЛА КАТАЛАНА

### 1.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Путиами Дика* называются пути на клетчатой бумаге, идущие вверх и вправо и не поднимающиеся выше прямой  $y = x$ . Количество путей Дика из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  называется  $n$ -м *числом Каталана* и обозначается  $C_n$ .

Например, третье число Каталана (количество путей из  $(0, 0)$  в  $(3, 3)$ ) равно 5:



Начало последовательности чисел Каталана выглядит следующим образом:  $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, \dots$

Помимо путей Дика существует много других комбинаторных объектов, количества которых даются числами Каталана. Один нужный для нас пример приведён в упражнении 1, множество других примеров (включая триангуляции, деревья, неассоциативные произведения) можно найти в статьях Доценко [2] и в упражнении 6.19 книги Стенли [7].

**УПРАЖНЕНИЕ 1.** Установите биекцию между путями Дика и «стандартными таблицами»  $2 \times n$ , т. е. таблицами  $2 \times n$ , заполненными натуральными числами от 1 до  $2n$  так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают,

1	2	3	1	2	5	1	3	4	1	2	4	1	3	5
4	5	6	3	4	6	2	5	6	3	5	6	2	4	6

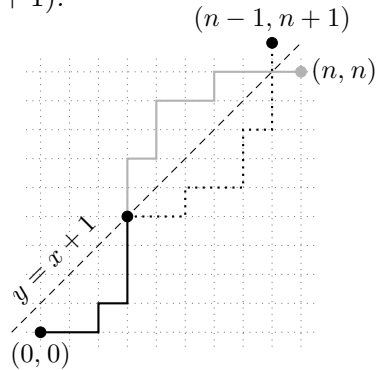
1.2. Существует несколько способов доказать явную формулу для чисел Каталана. Мы приведём один из них, основанный на *методе отражений*.

Любой путь из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  состоит из  $n$  ходов вправо и  $n$  ходов вверх. Поэтому общее число таких путей равно числу способов выбрать из чисел от 1 до  $2n$  номера ходов, идущих вверх, т. е. биномиальному

коэффициенту  $\binom{2n}{n}$ . Осталось найти число «плохих» путей, т. е. путей, заходящих выше диагонали  $y = x$ .

**ЛЕММА 1** (лемма об отражении). *Количество путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$ , поднимающихся выше диагонали  $y = x$ , равно количеству всех путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n - 1, n + 1)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Установим взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами путей. Любой путь из  $(0, 0)$  в  $(n, n)$ , поднимающийся выше диагонали  $y = x$ , пересекает прямую  $y = x + 1$ . Рассмотрим *первую* точку пересечения пути с этой прямой и отразим весь оставшийся путь относительно прямой  $y = x + 1$ . Тогда получим путь из  $(0, 0)$  в  $(n - 1, n + 1)$ . Обратное отображение строится аналогично.  $\square$



Любой путь из  $(0, 0)$  в  $(n - 1, n + 1)$  состоит из  $n - 1$  ходов вправо и  $n + 1$  ходов вверх. Значит, количество таких путей равно количеству способов выбрать из чисел от 1 до  $2n$  номера ходов, идущих вверх, т. е. биномиальному коэффициенту  $\binom{2n}{n + 1}$ .

Таким образом, мы доказали следующую формулу для чисел Каталана:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n - 1} = \frac{(2n)!}{n!(n + 1)!} = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}.$$

Описанный метод доказательства формулы для чисел Каталана восходит к работе Андре 1887 года [10] (в действительности Андре использовал несколько другой вариант этого рассуждения, подробности можно найти в статье [17]).

На самом деле мы доказали даже две формулы для чисел Каталана: одну в виде разности, а другую в виде произведения. Конечно, формально одна из другой легко следует, но можно сказать, что приведённое доказательство *объясняет* только первую из них. Для объяснения второй формулы нужны другие методы.

**1.3.** После приведённого выше доказательства естественно спросить, насколько оно может быть обобщено. Нет ли каких-то других задач, которые можно решить этим красивым методом?

Легко понять, что тем же методом можно найти число путей Дика из точки  $(0, 0)$  в точку  $(a, b)$  (для любых  $a \geq b$ ). Действительно, всего путей по сетке между этими точками  $\binom{a + b}{a}$ . Из них нам не подходят пути,

поднимающиеся выше диагонали, т. е. задевающие прямую  $y = x + 1$  — поэтому их количество равно (проверьте!) количеству всех путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(b - 1, a + 1)$ , т. е.  $\binom{a+b}{a+1}$ . Окончательно получаем ответ

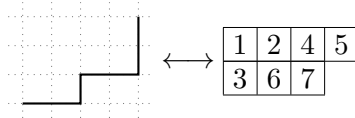
$$\binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+1} = \frac{(a+b)!}{(a+1)!b!}(a-b+1). \tag{1}$$

Отметим, что ответ, полученный в виде разности, снова хорошо переписывается в виде произведения.

1.4. Мы увидели, что количество путей Дика из  $(0, 0)$  в  $(a, b)$  можно посчитать аналогично тому, как считалось количество чисел Каталана. Можно сформулировать аналогичное утверждение и на языке таблиц.

**ЛЕММА 2.** *Количество путей Дика из  $(0, 0)$  в  $(a, b)$  равно количеству таблиц из двух строк длин  $a$  и  $b$ , заполненных числами от 1 до  $a + b$  так, что числа в каждой строке и каждом столбце возрастают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим какой-то путь Дика и будем по нему заполнять таблицу числами от 1 до  $a + b$ , по возрастанию: если  $k$ -й ход проходит по горизонтали, то будем писать число  $k$  в первую строчку, иначе — во вторую.



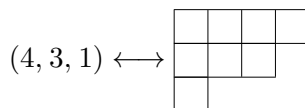
Легко видеть, что это соответствие является взаимно однозначным. □

Достоинство интерпретации через таблицы состоит в том, что видно естественное направление, куда двигаться дальше. А именно, можно не ограничиваться таблицами из двух строк, а рассматривать произвольные таблицы.

## § 2. СТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ И ПУТИ

### 2.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — набор натуральных чисел, упорядоченный так, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ . *Диаграммой Юнга* формы  $\lambda$  называется таблица из  $k$  строк из соответственно  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  клетками.



*Стандартной таблицей* формы  $\lambda$  называется заполнение клеток диаграммы  $\lambda$  числами от 1 до  $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$  так, что числа в каждой строке и каждом столбце возрастают.

На рисунке ниже изображены все 16 стандартных таблиц формы  $(3, 2, 1)$ .

1	2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1	2	5	1	2	5	1	2	6	1	2	6
4	5	4	6	3	5	3	6	3	4	3	6	3	4	3	5	3	4	3	5	3	5	3	5
6		5		6		5		6		4		5		4		5		4		4		4	

1	3	4	1	3	4	1	3	5	1	3	5	1	3	6	1	3	6	1	4	5	1	4	6
2	5	2	6	2	4	2	6	2	4	2	5	2	6	2	5	2	6	2	6	2	5	2	5
6		5		6		4		5		4		3		4		3		3		3		3	

Как мы видели, количество стандартных таблиц формы  $(a, b)$  вычисляется методом отражений и даётся формулой (1). Естественно попытаться обобщить это рассуждение на произвольные диаграммы Юнга.

Аналогично доказательству леммы 2 можно перейти от задачи со стандартными таблицами к задаче про пути. Например, число стандартных таблиц формы  $(a, b, c)$  равно числу путей на трёхмерной решётке из точки  $(0, 0, 0)$  в точку  $(a, b, c)$ , каждым ходом сдвигающихся на  $+1$  по какой-то из координат и не выходящих из области  $x \geq y \geq z$ . Подобным образом можно проинтерпретировать количество стандартных таблиц любой формы.

2.2. Работать с путями в сложной области многомерного пространства не очень удобно. Рассуждения упростятся, если заменить движение одной фишки в  $k$ -мерном пространстве на движение  $k$  фишек в одномерном пространстве (рассмотреть проекции фишки).

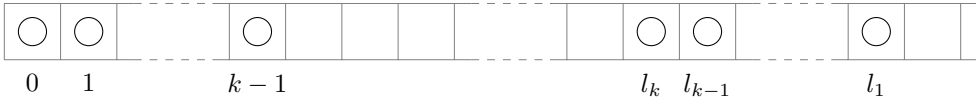
**ЛЕММА 3.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству способов переместить  $k$  (пронумерованных) фишек из клетки 0 в клетки с номерами  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  соответственно, передвигая за ход по одной фишке в следующую клетку так, чтобы фишка с большим номером не обгоняла фишку с меньшим номером.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По каждому такому пути строится стандартная таблица нужной формы: если очередной ход сделала  $i$ -я фишка, запишем номер этого хода в первую свободную клетку  $i$ -й строки. При этом числа по строкам возрастают автоматически, а по столбцам — в силу того, что мы запретили обгоны.

Легко видеть, что это соответствие является взаимно однозначным.  $\square$

Вместо запрета обгонов удобнее запретить фишкам занимать одну и ту же клетку. Для этого достаточно предварительно сдвинуть  $(k - 1)$ -ю фишку на 1 клетку вперёд,  $(k - 2)$ -ю — на две клетки вперёд, и так далее. Таким образом,  $i$ -я фишка будет теперь идти из клетки  $k - i$  в клетку  $\lambda_i + k - i$ .

Предложение 4. Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , а  $l_i = \lambda_i + k - i$ . Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству *правильных перемещений*  $k$  фишек из клеток  $(k - 1, \dots, 0)$  в клетки  $(l_1, \dots, l_k)$ .



Здесь и далее под *правильным перемещением* мы понимаем перемещение, в котором за ход можно передвинуть одну фишку на следующую клетку при условии, что эта клетка свободна.

2.3. Итак, чтобы найти количество стандартных таблиц формы  $\lambda$ , нужно найти количество *правильных перемещений*  $k$  фишек из клеток  $(k - 1, \dots, 0)$  в клетки  $(l_1, \dots, l_k)$ .

Для простоты начнём со случая  $k = 3$ . В любом перемещении трёх фишек из клеток  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$  первая фишка делает  $l_1 - 2$  хода, вторая делает  $l_2 - 1$  ход, третья делает  $l_3$  ходов. Поэтому если убрать условие, что фишки не встречаются, то любое перемещение будет кодироваться перестановкой  $l_1 - 2$  единиц,  $l_2 - 1$  двоек и  $l_3$  троек. Количество таких перестановок равняется мультиномиальному коэффициенту

$$\binom{N}{l_1 - 2, l_2 - 1, l_3} = \frac{N!}{(l_1 - 2)!(l_2 - 1)!l_3!},$$

где  $N = (l_1 - 2) + (l_2 - 1) + l_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  — общее число клеток в диаграмме.

Теперь надо подсчитать количество «плохих» перемещений (перемещений, при которых фишки встречаются). Подобно лемме 1 об отражении легко подсчитать количество перемещений, при которых встречаются первая и вторая фишка. В самом деле, рассмотрим их *первую* встречу и заменим весь дальнейший путь первой фишки на путь второй и наоборот. Мы получим перемещение из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_2, l_1, l_3)$ , т. е. первая фишка придёт в  $l_2$ , а вторая в  $l_1$ . Количество таких путей задаётся мультиномиальным коэффициентом.

Аналогично количество перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$ , при которых встречаются вторая и третья фишка, равно количеству перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_3, l_2)$ . Это количество также задаётся мультиномиальным коэффициентом. Получаем разность

$$\binom{N}{l_1 - 2, l_2 - 1, l_3} - \binom{N}{l_2 - 2, l_1 - 1, l_3} - \binom{N}{l_1 - 2, l_3 - 1, l_2}.$$

Но это ещё не окончательный ответ, так как есть перемещения, в которых и первая фишка встречается со второй, и вторая с третьей — эти переме-

щения мы вычли два раза. Пытаясь учесть подобные эффекты, можно догадаться до ответа:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Количество правильных перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$  равно

$$\binom{N}{l_1-2, l_2-1, l_3} - \binom{N}{l_2-2, l_1-1, l_3} - \binom{N}{l_1-2, l_3-1, l_2} + \\ + \binom{N}{l_2-2, l_3-1, l_1} + \binom{N}{l_3-2, l_1-1, l_2} - \binom{N}{l_3-2, l_2-1, l_1}.$$

Отметим, что количество правильных перемещений для двух фишек (левую часть формулы (1)) можно переписать в похожем виде:

$$\binom{N}{l_1-1, l_2} - \binom{N}{l_2-1, l_1}.$$

2.4. Приведённые выше ответы для  $k = 2, 3$  наводят на мысль, что в общем случае ответ даётся суммой по всем перестановкам чисел  $l_1, \dots, l_k$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Перестановкой*  $k$  элементов называется биекция множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  на себя. *Умножением* перестановок называется их последовательное выполнение. Множество всех перестановок обозначают  $S_k$ , всего перестановок  $k!$ , перестановки обычно обозначаются греческими буквами, например  $\sigma$ .

Для перестановки  $\sigma$  будем называть *инверсией* пару чисел  $i, j$  такую, что  $i < j$ , но  $\sigma(i) > \sigma(j)$  (большее число стоит раньше меньшего). Количество инверсий будем обозначать  $|\sigma|$ . *Чётностью* перестановки называется чётность числа инверсий.

*Транспозицией* называется перестановка, которая меняет местами два элемента и не перемещает остальные.

Можно доказать, что умножение любой перестановки на транспозицию меняет чётность этой перестановки. В частности, если перестановка представлена в виде произведения транспозиций, то чётность числа сомножителей совпадает с чётностью перестановки.

ТЕОРЕМА 1. *Количество правильных перемещений из  $(k-1, k-2, \dots, 0)$  в  $(l_1, l_2, \dots, l_k)$  равно*

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \binom{N}{l_{\sigma(1)} - k + 1, l_{\sigma(2)} - k + 2, \dots, l_{\sigma(k)}}. \quad (2)$$

Легко видеть, что эта теорема является обобщением приведённых выше формул для случаев двух и трёх строк.

Отметим, что числа  $l_{\sigma(i)} - k + i$  в формуле (2) могут оказаться отрицательными. Соответствующие мультиномиальные коэффициенты нужно

считать равными нулю. Например, при  $\lambda = (3, 2, 1)$

$$\begin{aligned} \binom{6}{3, 2, 1} - \binom{6}{1, 4, 1} - \binom{6}{3, 0, 3} + \binom{6}{1, 0, 5} + \binom{6}{-1, 4, 3} - \binom{6}{-1, 2, 5} = \\ = 60 - 20 - 30 + 6 = 16. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Каждое слагаемое в сумме (2) имеет ясный комбинаторный смысл: количество перемещений из  $(k - 1, k - 2, \dots, 0)$  в  $(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)})$ . То есть сумма (2) считает количество способов переместить фишки из точек  $\{k - 1, \dots, 0\}$  в точки  $\{l_1, \dots, l_k\}$  со знаками, зависящими от того, какая фишка в какую точку приходит.

Разобьём все *неправильные* перемещения (т. е. перемещения, при которых фишки встречаются) на пары. А именно пусть первыми встречаются фишки, которые выходят из  $k - i$  и  $k - j$ . Поменяем их пути после первого пересечения. После такой замены фишка  $k - i$  придёт в поле  $l_{\sigma(j)}$ , а фишка  $k - j$  придёт в поле  $l_{\sigma(i)}$ .

Другими словами, новая перестановка  $\sigma'$  отличается от  $\sigma$  на транспозицию. В частности, эти перестановки имеют разную чётность и соответствующая пара перемещений входит в сумму 2 с противоположными знаками и сокращается.

Остаются только слагаемые, соответствующие *правильным* перемещениям. □

Можно перейти назад от перемещений  $k$  фишек к движению одной фишки в  $k$ -мерном пространстве. Тогда разбиение на пары, использованное в доказательстве, будет геометрически задаваться отражениями относительно гиперплоскостей, как в лемме 1.

Такое доказательство формулы для числа стандартных таблиц придумал Зильбергер в 1983 году [18].

Отметим, что материал этого пункта связан с теорией представлений группы  $S_N$ . Неприводимые комплексные представления  $R_\lambda$  группы  $S_N$  параметризуются диаграммами Юнга  $\lambda$ , состоящими из  $N$  клеток (см., например, [8, гл. 7]). При этом размерность представления  $R_\lambda$  равна количеству стандартных таблиц формы  $\lambda$ .

Мультиномиальный коэффициент  $\binom{N}{i_1, i_2, \dots, i_k}$  равен размерности представления группы  $S_N$ , индуцированного с тривиального представления подгруппы  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_k} \subset S_N$ . Поэтому выражение (2) является аргументом в пользу существования комплекса, состоящего из прямых сумм индуцированных представлений  $S_N$ , гомологии которого равны неприводимому представлению  $R_\lambda$ . Знакопеременная сумма (2) тогда возникала бы как эйлерова характеристика этого комплекса. Разбиение на пары, использованное в доказательстве, может рассматриваться как комбинаторный аналог дифференциала комплекса.

Такой комплекс представлений группы  $S_N$  построен в статье [3].

## § 3. ФОРМУЛА КРЮКОВ

3.1. На формулу (2) можно смотреть как на обобщение аддитивной формулы для чисел Каталана

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Оказывается, есть соответствующее обобщение и у мультипликативной формулы

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Начнём со случая диаграмм из  $k=3$  строк. В этом случае ответ задаётся формулой из леммы 5. Вынесем за скобки общий множитель  $N!$  и приведём все дроби к общему знаменателю  $l_3! l_2! l_1!$ .

Останется сумма шести слагаемых вида  $l_i(l_i - 1)l_j = l_i^2 l_j - l_i l_j$ . Члены вида  $l_i l_j$  сокращаются. Поэтому мы получаем выражение

$$\frac{N!}{l_1! l_2! l_3!} (l_1^2 l_2 - l_2^2 l_1 - l_1^2 l_3 + l_2^2 l_3 + l_3^2 l_1 - l_3^2 l_2).$$

Выражение в скобках можно разложить на множители. Таким образом, количество стандартных таблиц из трёх строк может быть вычислено по формуле

$$\frac{N!}{l_1! l_2! l_3!} (l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(l_2 - l_3).$$

Теперь нетрудно угадать и общий ответ.

**ТЕОРЕМА 2** (формула Фробениуса — Юнга). *Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно*

$$\frac{N!}{l_1! \dots l_k!} \cdot \prod_{i < j} (l_i - l_j),$$

где  $N$  — количество клеток диаграммы,  $\lambda_i$  — длины строк, а  $l_i = \lambda_i + k - i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нам нужно вычислить сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \binom{N}{l_{\sigma(1)}-k+1, l_{\sigma(2)}-k+2, \dots, l_{\sigma(k)}} &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \frac{N!}{(l_{\sigma(1)}-k+1)! (l_{\sigma(2)}-k+2)! \dots l_{\sigma(k)}!}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему вынесем за скобку множитель  $\frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!}$  и перепишем выражение в виде

$$\frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \Delta(l_1, \dots, l_k), \quad (3)$$



где

$$\Delta(l_1, \dots, l_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} l_{\sigma(1)}^{\downarrow k-1} \cdot l_{\sigma(2)}^{\downarrow k-2} \cdot \dots \cdot l_{\sigma(k-1)} \cdot 1,$$

а  $x^{\downarrow m}$  обозначает<sup>1)</sup> убывающую факториальную степень,

$$x^{\downarrow m} = x(x-1) \dots (x-m+1).$$

ЛЕММА 6.  $\Delta(l_1, \dots, l_k) = \prod_{i < j} (l_i - l_j)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим, что при перестановке любых  $l_i$  и  $l_j$  многочлен  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  меняет знак. В частности, он обращается в нуль при  $l_i = l_j$ . Следовательно,  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  делится на многочлен  $(l_i - l_j)$  при любых  $i \neq j$ , а значит, делится и на произведение  $\prod_{i < j} (l_i - l_j)$ .

С другой стороны,  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  и это произведение — многочлены одной и той же степени

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = \binom{k}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta(l_1, \dots, l_k) = c \prod_{i < j} (l_i - l_j),$$

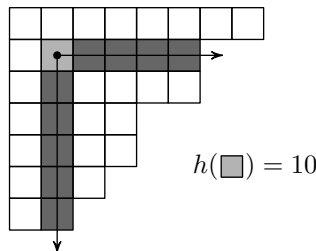
где  $c$  — некоторое число.

Сравнив коэффициенты при мономе  $l_1^{k-1} l_2^{k-2} \dots l_{k-1}$  в левой и правой частях, видим, что  $c = 1$ . □

Из формулы (3) и леммы 6 следует утверждение теоремы. □

3.2. Чтобы переписать доказанную в последней теореме формулу в ещё более замечательном виде, нам потребуется следующее определение.

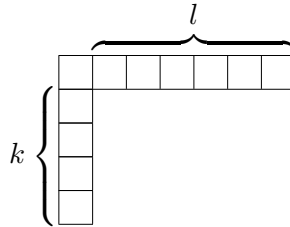
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Крюк* клетки  $s$  в диаграмме Юнга  $\lambda$  состоит из этой клетки и всех клеток, лежащих строго под ней или строго справа от неё. Количество клеток в крюке называется длиной крюка, обозначается  $h_\lambda(s)$  или просто  $h(s)$ .



<sup>1)</sup> В литературе также используются обозначения  $x^{\underline{m}}$ ,  $(x)_m$  и др.

ТЕОРЕМА 3 (формула крюков). *Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно  $\frac{N!}{\prod_{s \in \lambda} h(s)}$ , где произведение берётся по клеткам диаграммы  $\lambda$ ,  $N$  — общее количество клеток.*

Например, для диаграммы  $(3, 2, 1)$  получаем  $\frac{6!}{5!(3!)^2} = 16$ .



В качестве другого примера рассмотрим диаграмму  $\lambda$  в виде уголка с плечами  $k$  и  $l$ . Формула (2) даёт ответ в виде суммы  $(k+1)!$  слагаемых, а по формуле крюков мы сразу получаем

$$\frac{(k+l+1)!}{(k+l+1) \cdot k! \cdot l!} = \binom{k+l}{k}.$$

Этот ответ легко доказать и непосредственно.

Запомнить формулу крюков может помочь следующее рассуждение. Всего способов расставить последовательные числа по клеткам таблицы  $\lambda$  ровно  $N!$ . Стандартными таблицами являются в точности те расстановки, в которых число в каждой клетке является наибольшим в своём крюке. Вероятность такого события для клетки  $s$  равна  $1/h(s)$ . Значит, вероятность того, что случайная расстановка чисел является стандартной таблицей, есть  $1/\prod h(s)$ , а число стандартных таблиц данной формы даётся формулой крюков.

К сожалению, это рассуждение не является доказательством. Можно заметить, например, что в нём можно было бы вместо крюков клеток говорить об «антикрюках» длины  $i+j-1$  (где  $i$  — номер строки, а  $j$  — столбца) — но получающаяся при этом формула почти никогда не верна.

Проблема, конечно, в том, что в рассуждении перемножаются вероятности событий, которые совершенно не являются независимыми.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выведите формулу крюков из формулы Фробениуса — Юнга.

Формула крюков была предложена в работе Фрейма, Робинсона и Трелла [12]. Существует много разных доказательств этой формулы. Доступное изложение ещё одного из них можно найти в статье Спивака [6].

3.3. Можно заметить, что формула (2) фактически выражает число стандартных таблиц в виде определителя.

Напомним, что *матрицей*  $n \times n$  называется квадратная таблица этого размера, заполненная числами. Удобно их нумеровать двумя индексами — номером строки и номером столбца:  $a_{ij}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Определителем* матрицы  $A$  называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (4)$$

Определители матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  имеют вид:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Подробнее про определители и их применения можно прочитать в любом учебнике алгебры, например [1]. В следующих двух упражнениях мы приведём нужные нам свойства определителей (их легко вывести из определения). В упражнении 5 для полноты картины приведена геометрическая интерпретация.

УПРАЖНЕНИЕ 3. а) Докажите, что при умножении строки матрицы на число  $x$  определитель также умножается на  $x$ . Аналогично со столбцами.

б) Докажите, что при перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак. В частности, определитель матрицы с одинаковыми строками равен нулю.

в) Докажите, что если к одной строке матрицы прибавить другую, умноженную на  $\lambda$ , то определитель матрицы не изменится. Аналогично со столбцами.

УПРАЖНЕНИЕ 4. *Транспонированием* называется отражение матрицы относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Докажите, что при транспонировании определитель не меняется.

УПРАЖНЕНИЕ 5. а) На плоскости с началом координат  $O$  даны две точки  $A$  и  $B$  с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $OAB$  равна

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

б) В трёхмерном пространстве с началом координат  $O$  даны три точки  $A, B, C$  с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  соответственно.

Докажите, что объём тетраэдра  $OABC$  равен

$$\frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Вернёмся теперь к задаче о подсчёте числа стандартных таблиц. Выражение (2) можно переписать в виде:

$$N! \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{(l_1-k+1)!} & \frac{1}{(l_2-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(l_k-k+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(l_1-1)!} & \frac{1}{(l_2-1)!} & \cdots & \frac{1}{(l_k-1)!} \\ \frac{1}{l_1!} & \frac{1}{l_2!} & \cdots & \frac{1}{l_k!} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Можно воспользоваться упражнением 3, переставить строки и вынести максимальный знаменатель из каждого столбца. Тогда выражение примет вид

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{\downarrow k-1} & l_2^{\downarrow k-1} & \dots & l_k^{\downarrow k-1} \end{pmatrix}.$$

На языке определителей лемма 6 означает, что

$$\det(l_j^{\downarrow i-1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{\downarrow k-1} & l_2^{\downarrow k-1} & \dots & l_k^{\downarrow k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (l_j - l_i) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta(l_1, l_2, \dots, l_k). \quad (6)$$

Этот определитель называется *определителем Вандермонда*, он нам ещё пригодится.

Отметим, что в стандартном определении матрица Вандермонда состоит из обычных, а не убывающих степеней:

$$\det(l_j^{i-1}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta(l_1, l_2, \dots, l_n).$$

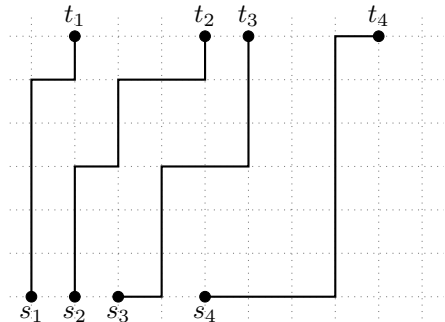
Но легко видеть, что одна матрица получается из другой преобразованиями из упражнения 3в. Также часто матрицей Вандермонда называют транспонированную матрицу  $(l_i^{j-1})$ , определитель у неё такой же по упражнению 4.

§ 4. НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПУТИ

4.1. Рассмотрим теперь другую, быть может более известную задачу, которую помогает решить метод отражений.

Рассмотрим плоскость, разбитую на единичные квадратики. Пусть на одной горизонтальной линии выбраны  $n$  начальных вершин  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , на другой выбраны  $n$  конечных вершин  $t_1, t_2, \dots, t_n$  (точки занумерованы слева направо). Мы хотим посчитать количество *непересекающихся путей* из начальных вершин в конечные, таких, что пути идут по линиям сетки вверх и вправо.

Введём обозначения: через  $P(s \rightarrow t)$  обозначим количество путей из вершины  $s$  в вершину  $t$  (от английских слов path — путь, source — исток, target — цель). Аналогично через  $P(S \rightarrow T)$  обозначим число путей, которые ведут из вершин  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в вершины  $t_1, t_2, \dots, t_n$  соответственно. Понятно, что



$$P(S \rightarrow T) = P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2) \cdot \dots \cdot P(s_n \rightarrow t_n).$$

Мы хотим посчитать количество непересекающихся путей, это количество мы обозначим  $P_{nc}(S \rightarrow T)$  (индекс “nc” от английского non-crossing).

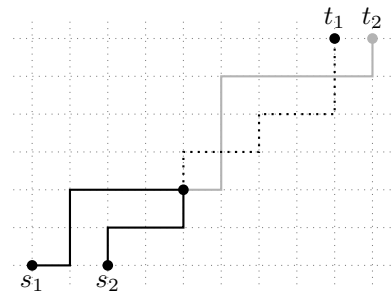
Случай одной точки тривиален: если точка  $t$  лежит на  $k$  выше и на  $l$  правее точки  $s$ , то

$$P_{nc}(s_1 \rightarrow t_1) = P(s_1 \rightarrow t_1) = \binom{k+l}{k}.$$

Случай двух точек уже более интересен. Общее число путей равно

$$P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2).$$

Среди этих путей есть пересекающиеся, метод отражений поможет нам их учесть. Аналогично доказательству леммы об отражениях (лемма 1) можно переставить пути после *первого* пересечения и получить пару путей, которые ведут из  $s_1, s_2$  в  $t_2, t_1$  соответственно.



Таким образом,

$$P_{nc}(s_1, s_2 \rightarrow t_1, t_2) = P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2) - P(s_1 \rightarrow t_2)P(s_2 \rightarrow t_1).$$

Последний ответ удобно переписать в виде определителя матрицы  $2 \times 2$ :

$$P_{nc}(s_1, s_2 \rightarrow t_1, t_2) = \det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Рассуждая по методу отражений, нам нужно учесть пути, которые ведут из множества  $S$  в множество  $T$ , но с некоторой перестановкой. Для перестановки  $\sigma \in S_n$  будем обозначать через  $P(S \rightarrow \sigma(T))$  количество путей, которые ведут из  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в  $t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}$  соответственно.

**ТЕОРЕМА 4.** *Количество непересекающихся путей может быть найдено по формуле*

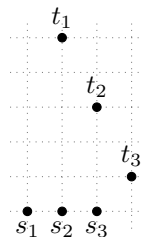
$$\begin{aligned} P_{nc}(S \rightarrow T) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} P(S \rightarrow \sigma(T)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_1 \rightarrow t_n) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_2 \rightarrow t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(s_n \rightarrow t_1) & P(s_n \rightarrow t_2) & \dots & P(s_n \rightarrow t_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Сумма (7) считает пути из  $S$  в  $\sigma(T)$  со знаками  $(-1)^{|\sigma|}$ .

Разобьём все пути с пересечениями на пары. Пусть  $i$  — наименьшее такое число, что путь, выходящий из  $s_i$ , пересекает какой-то другой путь. Пусть его первое пересечение происходит с путём, выходящим из вершины  $s_j$ . Тогда поменяем местами эти пути после их первого пересечения. Теперь путь из  $s_i$  ведёт в  $t_{\sigma(j)}$ , а из  $s_j$  в  $t_{\sigma(i)}$ .

Другими словами, новая перестановка  $\sigma'$  отличается от  $\sigma$  на одну транспозицию  $\sigma(i) \leftrightarrow \sigma(j)$ . Поэтому у  $\sigma'$  и  $\sigma$  разный знак, соответственно эти слагаемые в сумме (2) сокращаются. Остаются только слагаемые, отвечающие непересекающимся путям.  $\square$

4.2. В предыдущем пункте мы предполагали, что начала  $s_i$  и концы  $t_i$  расположены на горизонтальных прямых. Однако в доказательстве это мало использовалось. Рассмотрим следующий пример:



Количество непересекающихся путей из  $s_1, s_2, s_3$  в  $t_1, t_2, t_3$  снова равно определителю

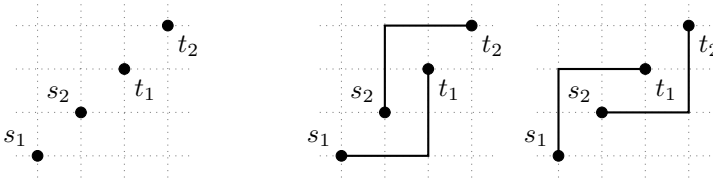
$$\det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & P(s_1 \rightarrow t_3) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & P(s_2 \rightarrow t_3) \\ P(s_3 \rightarrow t_1) & P(s_3 \rightarrow t_2) & P(s_3 \rightarrow t_3) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \binom{6}{1} & \binom{5}{2} & \binom{4}{3} \\ \binom{5}{0} & \binom{4}{1} & \binom{3}{2} \\ 0 & \binom{3}{0} & \binom{2}{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 14.$$

(То, что в ответе получилось число Каталана  $C_3 = 14$ , не случайно, см. упражнение 17.)

Не обязательно даже рассматривать пути на квадратной решётке. Можно взять любой ориентированный граф  $\Gamma$  без циклов (последнее условие нужно для того, чтобы числа  $P(s \rightarrow t)$  были конечны).

Однако ситуация не совсем простая даже на квадратной решётке, как показывает следующий пример:



Легко видеть, что существует два непересекающихся пути, ведущих из  $s_1, s_2$  в  $t_1, t_2$ . Но вычисления с определителем дают совсем другой ответ:

$$\det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \binom{4}{2} & \binom{6}{3} \\ \binom{2}{2} & \binom{4}{2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = -4.$$

Причина в том, что в этом случае есть непересекающиеся пути, ведущие из  $s_1$  в  $t_2$ , а из  $s_2$  в  $t_1$ . Таких путей 6, и определитель как раз и вычисляет разность  $2 - 6 = -4$ .

Мы видим, что надо учесть ещё непересекающиеся пути, ведущие из  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в  $t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}$ . Естественно, количество таких путей мы будем обозначать  $P_{nc}(S \rightarrow \sigma(T))$ . Если граф и набор начальных и конечных вершин таковы, что набор непересекающихся путей существует только для тривиальной перестановки  $\sigma$ , то будем называть такой граф *неперестановочным*. Легко видеть, что случай, описанный в предыдущем пункте и первом примере этого пункта, является неперестановочным.

ТЕОРЕМА 5. Дан ориентированный граф  $\Gamma$  без ориентированных циклов,  $n$  начальных вершин  $s_1, \dots, s_n$  и  $n$  конечных вершин  $t_1, \dots, t_n$ . Обозначим через  $P$  матрицу

$$P = (P(s_i \rightarrow t_j)) = \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_1 \rightarrow t_n) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_2 \rightarrow t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(s_n \rightarrow t_1) & P(s_n \rightarrow t_2) & \dots & P(s_n \rightarrow t_n) \end{pmatrix}.$$

а) Если граф  $\Gamma$  является неперестановочным, то количество непересекающихся путей задаётся формулой

$$P_{nc}(S \rightarrow T) = \det P.$$

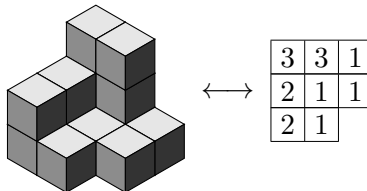
б) В общем случае

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} P_{nc}(S \rightarrow \sigma(T)) = \det P.$$

Несмотря на несложное в общем доказательство, эта теорема является относительно новой. Она независимо появилась в статьях Карлина и Макгрегора 1959 года [14] и Линдстрема 1975 года [15]. Эта теорема стала очень популярна после статей Гесселя и Вьено 1980-х годов [13], в которых при помощи неё были решены несколько знаменитых комбинаторных задач. Двум таким задачам посвящены следующие параграфы статьи.

## § 5. ТРЁХМЕРНЫЕ ДИАГРАММЫ ЮНГА

Трёхмерная диаграмма Юнга — это башня из кубиков, лежащих в углу. Для формального определения удобно отождествить их с плоскими разбиениями — прямоугольными таблицами целых неотрицательных чисел, в которых числа нестрого убывают по строкам и столбцам. Представим, что такая таблица лежит на столе, а на клетке, на которой написано число  $t$ , стоит башня из  $t$  единичных кубиков. Возникающее трёхмерное тело и называется трёхмерной диаграммой Юнга.



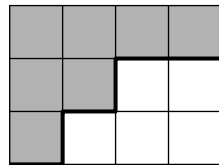
Ряд замечательных результатов про трёхмерные диаграммы Юнга был получен английским математиком Перси Макмагоном в начале XX века [16]. Например, он доказал следующую теорему.



ТЕОРЕМА 6. *Количество трёхмерных диаграмм, лежащих внутри параллелепипеда размера  $a \times b \times c$ , может быть найдено по формуле*

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{i+j+c-1}{i+j-1}. \quad (8)$$

В этом параграфе мы докажем формулу Макмагона. Начнём со случая параллелепипеда высоты 1. Соответствующие трёхмерные диаграммы Юнга суть (утолщённые) двумерные диаграммы, лежащие внутри прямоугольника  $a \times b$ . Количество таких диаграмм равно количеству путей из точки  $(0, -b)$  в точку  $(a, 0)$ , идущих вправо и вверх по линиям сетки, т. е. биномиальному коэффициенту  $\binom{a+b}{b}$ .



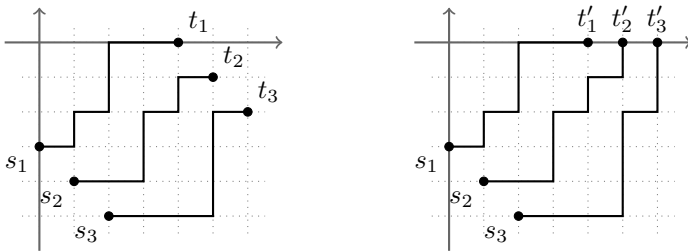
Обобщением этого лёгкого рассуждения на случай параллелепипеда высоты  $c$  является следующая лемма.

ЛЕММА 7. *Количество трёхмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , равно количеству наборов непересекающихся путей из точек  $s_i = (i-1, -b-i+1)$  в точки  $t_j = (a+j-1, -j+1)$ , где  $1 \leq i, j \leq c$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим взаимно однозначное соответствие между соответствующими множествами. Для этого разобьём трёхмерную диаграмму Юнга на горизонтальные слои. Слоёв всего получится  $c$ , каждый слой будет диаграммой Юнга, вписанной в прямоугольник  $a \times b$ . Построим по верхней диаграмме путь из  $s_1$  в  $t_1$ , по второй сверху диаграмме путь из  $s_2$  в  $t_2$  и так далее, нижней диаграмме соответствует путь из  $s_c$  в  $t_c$ .

Как легко видеть, то, что пути не пересекаются, равносильно тому, что каждый верхний слой не больше нижнего, т. е. эти слои действительно образуют трёхмерную диаграмму Юнга.  $\square$

На рисунке слева отмечены начальные и конечные вершины для случая  $a = 4, b = 3, c = 3$ .



Посчитать количество непересекающихся путей нам поможет теорема 5. Легко видеть, что данный набор входов и выходов является непереставля-

емым, и поэтому количество непересекающихся путей равно определителю матрицы  $(P(s_i \rightarrow t_j))$ . Чтобы его посчитать, удобно немного изменить конечные точки, продлив пути до оси абсцисс. А именно можно рассматривать пути, ведущие из точек  $s_i = (i - 1, -b - i + 1)$  в точки  $t'_j = (a + j - 1, 0)$ ,  $(1 \leq i, j \leq c)$ , см. рисунок справа. Ясно, что существует биекция между такими путями и путями из леммы 7.

Таким образом, количество трёхмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , равно определителю

$$\begin{aligned} \det(P(s_i \rightarrow t'_j)) &= \det\left(\binom{a+b+j-1}{b+i-1}\right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b+1}{b} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b} \\ \binom{a+b}{b+1} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{a+b}{b+c-1} & \binom{a+b+1}{b+c-1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как  $\binom{n}{k} = \frac{n \downarrow k}{k!}$ , это есть

$$\det\left(\frac{(a+b+j-1) \downarrow b+i-1}{(b+i-1)!}\right) = \prod_{i=1}^c \frac{1}{(b+i-1)!} \cdot \det((a+b+j-1) \downarrow b+i-1).$$

Напомним, что в § 3 мы вычислили определитель Вандермонда, т. е. доказали, что

$$\det(x_j \downarrow i-1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(см. формулу (6)). Полученный у нас определитель сводится к определителю Вандермонда, если воспользоваться формулой  $x \downarrow k+l = x \downarrow k \cdot (x-k) \downarrow l$ :

$$\begin{aligned} \det((a+b+j-1) \downarrow b+i-1) &= \det((a+b+j-1) \downarrow b (a+j-1) \downarrow i-1) = \\ &= \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)!}{(a+j-1)!} \cdot \det((a+j-1) \downarrow i-1) = \\ &= \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)!}{(a+j-1)!} \cdot (-1)^{\frac{c(c-1)}{2}} \Delta(a, a+1, \dots, a+c-1). \end{aligned}$$

Мы получили явное выражение в виде произведения для количества трёхмерных диаграмм Юнга внутри коробки  $a \times b \times c$ . Осталось преобразовать его к виду (8).

УПРАЖНЕНИЕ 6. Завершите доказательство формулы Макмагона.

Интересно, что хотя и задача, и итоговая формула симметричны по  $a$ ,  $b$  и  $c$ , в доказательстве эта симметрия нарушается: высота играет выделенную роль.

### § 6. ПОЛУСТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ И ТАБЛИЦЫ ГЕЛЬФАНДА — ЦЕТЛИНА

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** *Полустандартной таблицей* формы  $\lambda$  называется заполнение клеток диаграммы Юнга  $\lambda$  числами от 1 до  $n$ , такое что числа в каждом столбце возрастают, а в каждой строке — не убывают.

Количество заполнений, конечно, зависит от  $n$ . Очевидно, что если  $n$  меньше, чем количество строк, то число полустандартных таблиц равно нулю. Для примера внизу приведены 3 полустандартные таблицы формы  $(4, 3, 1)$ , заполненные числами от 1 до 5 (отметим, что не обязательно использовать все числа):

1	2	2	3
2	3	5	
4			

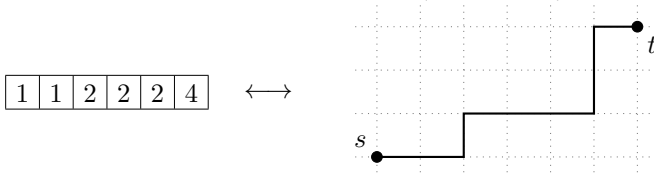
1	2	3	3
2	3	4	
4			

2	2	2	3
4	4	5	
5			

А всего таких таблиц 1050.

В этом параграфе мы найдём явную формулу для количества полустандартных таблиц. И сделаем это при помощи метода отражений.

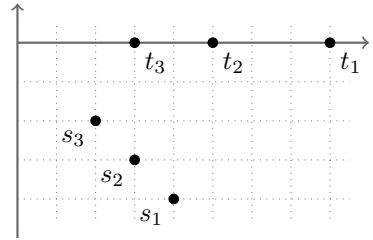
Сначала посмотрим на первую строку. Там стоит (записанный в неубывающем порядке) произвольный набор из  $\lambda_1$  чисел от 1 до  $n$ . Геометрически такие наборы соответствуют путям на квадратной решётке, делающим  $n - 1$  шагов вверх и  $\lambda_1$  вправо: количество единиц соответствует числу горизонтальных ходов на высоте 1, количество двоек — числу горизонтальных ходов на высоте 2 и т. д. Всего существует  $\binom{\lambda_1 + n - 1}{n - 1}$  таких наборов.



Во второй строке стоит набор из  $\lambda_2$  чисел от 2 до  $n$ . Количество таких наборов равно количеству путей, делающих  $n - 2$  ходов вверх и  $\lambda_2$  вправо. Но на числа во второй строке наложено условие: каждое из них должно быть больше стоящего над ним числа из первой строки. Оказывается (при правильном выборе начальных точек), это условие эквивалентно тому, что соответствующие пути не пересекаются.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству непересекающихся путей из точек  $s_i = (n - i, i - n)$  в точки  $t_j = (l_j, 0)$ , где  $l_j = \lambda_j + n - j$ .

На рисунке отмечены начальные и конечные вершины для случая  $\lambda = (4, 3, 1), n = 5$ . Количество вершин равно  $k$  — количеству строк диаграммы.

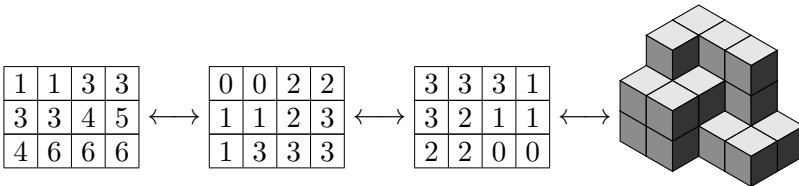


Таким образом, количество полустандартных таблиц равно определителю, в котором на месте  $(i, j)$  стоит  $P(s_i \rightarrow t_j) = \binom{l_j}{n - i}$ . Этот определитель сводится к определителю Вандермонда, как в предыдущем параграфе. Удобно считать, что в диаграмме всего  $n$  строк, последние  $n - k$  из которых пустые. На языке путей это означает, что мы добавляем новые  $n - k$  начал и концов  $s_i = (n - i, i - n), t_i = (n - i, 0)$ , где  $k < i \leq n$ . Количество непересекающихся путей от этого не меняется.

УПРАЖНЕНИЕ 8. Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  может быть найдено по формуле

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (l_i - l_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}. \tag{9}$$

Аналогия с рассуждениями в предыдущем параграфе не случайна. Есть простая биекция между полустандартными таблицами прямоугольной формы  $a \times b$ , заполненными числами от 1 до  $n$ , и трёхмерными диаграммами Юнга внутри параллелепипеда  $a \times b \times (n - b)$ : нужно просто вычестить из всех чисел в  $i$ -й строке по  $i$  — получится (перевёрнутое) плоское разбиение.



Материал этого параграфа связан с теорией представлений группы  $GL_n(\mathbb{C})$ . Конечномерные неприводимые представления этой группы параметризуются наборами из  $n$  целых чисел  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  (старший вес). В этом представлении существует базис, занумерованный полустандартными таблицами формы  $\lambda$ . Формула (9) для количества полустандартных таблиц совпадает с формулой Вейля для размерности неприводимого представления.

Приведём в виде упражнения другой способ описывать такую комбинаторику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Треугольная таблица из  $n(n + 1)/2$  целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего и не больше правого верхнего соседа, называется *таблицей Гельфанда — Цетлина*.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & & a_2 & & \dots & & a_{n-1} & & a_n \\
 & a_{12} & & a_{23} & & \dots & & a_{n-1n} & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & & & a_{1n-1} & & a_{2n} & & & \\
 & & & & a_{1n} & & & & 
 \end{array}$$

Можно задаться вопросом, сколько существует таблиц Гельфанда — Цетлина с первой строкой  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . По такой строке можно построить диаграмму Юнга, в которой  $\lambda_i = a_{n+1-i}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 9. Количество таблиц Гельфанда — Цетлина с верхней строкой  $a$  совпадает с количеством полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами от 1 до  $n$ .

### § 7. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

В предыдущей части статьи мы решали несколько задач перечислительной комбинаторики: считали количества элементов в разных множествах. Часто эти множества могут быть разбиты на части, и естественно считать количества элементов в частях. Наиболее простой пример такой ситуации: множество всех подмножеств  $n$ -элементного множества разбивается на части, состоящие из  $k$ -элементных подмножеств.

В этом параграфе мы будем рассматривать пример такого разбиения: будем считать количество трёхмерных диаграмм Юнга с данным числом кубиков.

Ответ удобно искать в виде производящей функции. Никаких знаний про производящие функции мы использовать не будем, но читатель, впервые встретившийся с этим понятием, может посмотреть [9, гл. 1].

#### 7.1. Мы хотим найти производящую функцию

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = \sum_{Y \subset a \times b \times c} q^{|Y|},$$

где сумма берётся по всем трёхмерным диаграммам Юнга  $Y$  внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , через  $|Y|$  обозначено число кубиков в диаграмме  $Y$ . Другими словами, мы считаем количество трёхмерных диаграмм  $Y$  с весом  $q^{|Y|}$ .

Естественно начать с двумерной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Производящая функция диаграмм Юнга внутри прямоугольника  $a \times b$  называется  $q$ -биномиальным коэффициентом и обозначается

$$\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q := \sum_{Y \subset a \times b} q^{|Y|}$$

(через  $|Y|$  обозначено число клеток диаграммы  $Y$ ). Иногда  $q$ -биномиальные коэффициенты называют ещё *многочленами Гаусса*.

Значение многочлена  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  при  $q = 1$  равно обычному биномиальному коэффициенту  $\binom{n}{k}$ , поэтому  $q$ -биномиальные коэффициенты можно рассматривать как обобщение обычных биномиальных коэффициентов. Нам будет нужно  $q$ -обобщение рекуррентного уравнения:

УПРАЖНЕНИЕ 10. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Здесь интересно, что у равенства  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  есть два разных  $q$ -обобщения (совпадающих при  $q = 1$ ). Из этих уравнений следует, что

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q^k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Пользуясь последним соотношением, уже можно найти явную формулу для  $q$ -биномиальных коэффициентов. Из определения следует, что

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q^k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{(1 - q^{n-k+1}) \cdot \dots \cdot (1 - q^{n-1})}{(1 - q^k) \cdot \dots \cdot (1 - q^2)} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \\ &= \frac{(1 - q^{n-k+1}) \cdot \dots \cdot (1 - q^n)}{(1 - q^k) \cdot \dots \cdot (1 - q)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На это можно смотреть как на часть некоторой игры в « $q$ -деформацию». Для натурального числа  $n$  естественно положить

$$[n]_q = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Далее можно положить  $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n]$  (индексы  $q$  здесь и далее обычно опускаются). Тогда доказанная выше формула для  $q$ -биномиальных коэффициентов может быть переписана в обычном виде:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [n-k+1]}{[k]!} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}.$$

Возникающие функции имеют отнюдь не только комбинаторный смысл. Иллюстрацией этого служат следующие два упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 11 ( $q$ -бином Ньютона). а) Докажите, что

$$(1+x)(1+xq) \cdot \dots \cdot (1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

б) Пусть переменные  $x, y$  не коммутируют, но удовлетворяют соотношению  $yx = qxy$ . Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 12. Пусть  $q$  — простое число (или степень простого числа). Докажите, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  равно числу  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного векторного пространства над полем из  $q$  элементов.

Напомним, что грассманианом  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{F})$  называется многообразие, точками которого являются  $k$ -мерные подпространств  $n$ -мерного пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Предыдущее упражнение означает, что количество точек  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{F}_q)$  равно  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ . Можно также показать, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{-1}$  равно эйлеровой характеристике  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ , а  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1$  равно эйлеровой характеристике  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C})$ .

Интересные комбинаторные следствия упражнения 11 обсуждаются в брошюре [5]. Более подробно про  $q$ -аналоги («квантовые аналоги»), в частности хорошее решение упражнения 12, можно прочитать в статье [4].

7.2. Перейдём теперь к трёхмерным диаграммам Юнга. Мы хотим найти производящую функцию  $\mathbb{Y}_{a,b,c}(q)$  трёхмерных диаграмм Юнга внутри коробки  $a \times b \times c$ . Понятно, что если  $c = 1$ , то

$$\mathbb{Y}_{a,b,1}(q) = \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q.$$

Рассмотрим следующий случай  $c = 2$ .

Аналогично доказательству леммы 7 разобьём трёхмерную диаграмму на слои, по верхнему слою построим путь из  $s_1 = (0, -b)$  в  $t_1 = (a, 0)$ , по нижнему — путь из  $s_2 = (1, -b-1)$  в  $t_1 = (a+1, 1)$ . Количество кубиков в трёхмерной диаграмме Юнга равно сумме количеств клеток в слоях, поэтому  $\mathbb{Y}(a, b, 2)$  равно  $\begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q \cdot \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q$  минус вклад от пересекающихся путей.

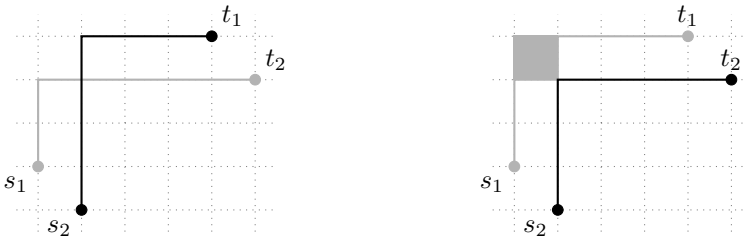
Производящую функцию для пересекающихся путей можно посчитать по методу отражения: отразить относительно первого пересечения и получить пару путей из  $s_1, s_2$  в  $t_2, t_1$ . Таким образом, получаем:

$$\mathbb{Y}(a, b, 2) \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix}.$$

К сожалению, эта формула неверна. Даже для простейшего случая коробки  $1 \times 1 \times 2$  она даёт

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (1 + q)^2 - 1,$$

а должно получаться  $1 + q + q^2$ . Так как при  $q = 1$  всё сходится, причина должна быть в том, что пути считаются с весами. Действительно, легко видеть, что при отражении меняется вес пути. Это достаточно проверить для путей с наименьшим весом, а как видно из рисунка, для них при отражении вес меняется на 1.



Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}(a, b, 2) &= \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{[a+b]!^2}{[a]![a+1]![b]![b+1]!} ([a+1][b+1] - q[a][b]) = \frac{[a+b]![a+b+1]!}{[a]![a+1]![b]![b+1]!}. \end{aligned}$$

Для большей высоты можно попробовать рассуждать аналогично и правильно учесть изменение веса при отражении. Один из способов это сделать описан в книге [11].

Мы поступим несколько по-другому. Как и в § 5, *удлиним пути*: будем рассматривать пути из точек  $s_i = (i - 1, -b - i + 1)$  в точки  $t'_j = (a + j - 1, 0)$ ,  $1 \leq i, j \leq c$ . Такое удлинение меняет вес, к каждой диаграмме Юнга добавляется несколько строчек длины  $a$ . Весь вес меняется на

$$q^{a(1+2+\dots+(c-1))} = q^{a \frac{c(c-1)}{2}}.$$

Но зато теперь отражения не меняют вес! Значит, справедлива

**ТЕОРЕМА 7.** *Производящая функция для трёхмерных диаграмм Юнга имеет вид*

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = q^{-a \frac{c(c-1)}{2}} \det \left( \begin{bmatrix} a+b+j-1 \\ b+i-1 \end{bmatrix} \right)_q.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 13.** Докажите формулу Макмагона:

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}.$$



УКАЗАНИЕ. Можно рассуждать как в § 5. После вынесения общих множителей и сложений строк определитель сведётся к определителю Вандермонда для чисел  $[a]_q, [a+1]_q, \dots, [a+c-1]_q$  или, эквивалентно, для чисел  $q^{a+1}, q^{a+2}, \dots, q^{a+c}$ .

Можно вернуться назад, к неудлиненным путям. Нетрудно понять, что матрица  $(P(s_i \rightarrow t'_j))$  получается из матрицы  $(P(s_i \rightarrow t_j))$  элементарными преобразованиями столбцов. Можно провести обратные преобразования, используя рекуррентные соотношения из упражнения 10. Например, для матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned}
 & q^{-a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix} = q^1 \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \\
 & q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b+1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b+2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & q^{a+2} \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{a-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & q^{2a+4} \begin{bmatrix} a+b \\ b-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{2a+2} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{a-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{2a} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^5 \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{-2} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{-2} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-4} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Рассуждая таким образом для произвольного  $c$ , можно получить, что

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = q^{\sum_{k=0}^{c-1} k^2} \det\left(q^{-(i-1)(j-1)} \begin{bmatrix} a+b \\ b+i-j \end{bmatrix}_q\right). \quad (11)$$

7.3. Мы уже видели, что производящая функция для диаграмм Юнга внутри прямоугольника  $a \times b$  равна  $\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q$ , т. е. коэффициент при  $q^n$  равен количеству диаграмм из  $n$  клеток внутри прямоугольника. Если теперь  $a$  и  $b$  становятся очень большими, то коэффициент при  $q^n$  становится равным количеству всех диаграмм Юнга из  $n$  клеток. Используя формулу (10) для  $\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q$ , легко доказать, что

$$\lim_{a,b \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}.$$

Последнюю формулу можно доказать и сразу комбинаторно (см., например, [9, теорема 1.1]). Удобно обозначить знаменатель через

$$(q)_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i).$$

ТЕОРЕМА 8 (Макмагон). а) *Производящая функция трёхмерных диаграмм Юнга высоты не более  $h$  имеет вид*

$$\mathbb{Y}_h(q) = \prod_{i=1}^{h-1} (1-q^i)^{-i} \prod_{i=h}^{\infty} (1-q^i)^{-h}.$$

б) *Производящая функция для всех трёхмерных диаграмм Юнга имеет вид*

$$\mathbb{Y}(q) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i)^{-i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём  $c=h$  и перейдём к пределу  $a, b \rightarrow \infty$  в формуле (11). Левая часть стремится к  $\mathbb{Y}_h(q)$ . С другой стороны, по показанному выше все  $q$ -биномиальные коэффициенты в правой части стремятся к  $1/(q)_{\infty}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_h(q) &= \frac{q^{\sum_{k=0}^{h-1} k^2}}{(q)_h^h} \det(q^{-(i-1)(j-1)}) = \frac{q^{\sum_{k=0}^{h-1} k^2}}{(q)_h^h} \Delta(1, q^{-1}, \dots, q^{-h+1}) = \\ &= \prod_{i=1}^{h-1} (1-q^i)^{-i} \prod_{i=h}^{\infty} (1-q^i)^{-h}. \end{aligned}$$

Пункт б) получается из пункта а) в пределе  $h \rightarrow \infty$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14. Выведите теорему 8 из результата упражнения 13.

Отметим, что для диаграмм Юнга высших размерностей (4 и больше) аналогичные формулы для производящих функций не известны (см., например, [9, гл. 11]).

### § 8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

УПРАЖНЕНИЕ 15 (теорема Бертрана о выборах). а) Докажите, что вероятность того, что на выборах с участием двух кандидатов, в которых первый набрал  $a$  голосов, а второй набрал  $b < a$ , первый будет опережать второго в течение всего времени подсчёта голосов равна  $\frac{a-b}{a+b}$ .

б) Докажите обобщение для случая, когда кандидатов  $k$  и они набрали  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$  голосов соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 16 (косые диаграммы Юнга). Пусть диаграмма Юнга  $\mu$  лежит внутри диаграммы  $\lambda$ . Тогда разность  $\lambda \setminus \mu$  называется *косой диаграммой Юнга*. Найдите формулу для количества стандартных таблиц формы  $\lambda \setminus \mu$ . Ответ удобно переписать в виде определителя аналогично (5).

УПРАЖНЕНИЕ 17 (диаграммы внутри данной). Число диаграмм Юнга, лежащих внутри прямоугольника  $m \times n$ , равно  $\binom{m+n}{m}$ . Найдите число диаграмм Юнга, лежащих внутри произвольной диаграммы Юнга  $\lambda$ .

УКАЗАНИЕ. Установите взаимно однозначное соответствие между поддиаграммами и непересекающимися путями от точек  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(0, k-1)$  до точек  $(1, l_1)$ ,  $(2, l_2)$ ,  $\dots$ ,  $(k, l_k)$ , где  $l_i = \lambda_i + i - 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 18 (пути в полоске). Рассмотрим пути в полосе  $0 \leq y \leq d$ , состоящие из сдвигов либо на вектор  $(1, 1)$ , либо на вектор  $(1, -1)$ . Докажите, что число путей из точки  $(0, i)$  в точку  $(n, j)$ , где  $0 \leq i, j \leq d$ ,  $n + j - i$  чётно, имеет вид

$$\sum_{k \equiv \frac{n+j-i}{2}} \binom{n}{k} - \sum_{k \equiv \frac{n-i-j-2}{2}} \binom{n}{k}, \quad (12)$$

где сравнения берутся по модулю  $d + 2$ .

**Комментарий.** Если  $d = 0$ , то ясно, что путей нет. Если  $d = 1$ , то путь один. При больших  $d$  ответ не столь тривиален. Например, при  $d = 2$  получаются степени двойки, а при  $d = 3$  получаются числа Фибоначчи.

Таким образом, при  $d = 0$  выражение (12) для нулевого числа путей соответствует известному факту

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod{2}} \binom{n}{k} = \sum_{k \equiv 1 \pmod{2}} \binom{n}{k}.$$

А при  $d = 1$  мы получаем, что три суммы

$$s_i = \sum_{k \equiv i \pmod{3}} \binom{n}{k}$$

попарно отличаются не более чем на 1 и, значит, равны  $2^n/3$ , округлённому в какую-то сторону.

УПРАЖНЕНИЕ 19 (формула крюков для полустандартных таблиц). Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  может быть найдено по формуле

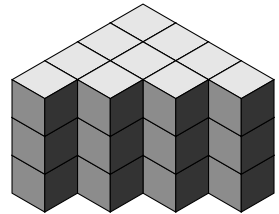
$$\prod_{s \in \lambda} \frac{n+i-j}{h(s)},$$

где  $i, j$  — координаты клетки  $s$ , а  $h(s)$  — длина крюка клетки.

УПРАЖНЕНИЕ 20 ( $q$ -аналог упражнения 8). Весом полустандартной таблицы назовём сумму чисел в ней. Найдите формулу для производящей функции всех полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами от 1 до  $n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21 (числа Каталана — Ганкеля). а) Обозначим через  $C_n^{(h)}$  определитель матрицы  $h \times h$

$$\begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+h-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h-1} & C_{n+h} & \dots & C_{n+2h-2} \end{pmatrix},$$



где  $C_k$  — числа Каталана. Докажите, что  $C_n^{(h)}$  равно количеству трёхмерных диаграмм Юнга внутри призмы высоты  $h$ , основание которой — диаграмма  $(n-1, \dots, 2, 1)$ .

б) Докажите, что  $C_n^{(h)} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \frac{i+j+2h}{i+j}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вимберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- [2] Доценко В. В. Числа Каталана и естественные отображения. Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2009. С. 139–165. [http://www.maths.tcd.ie/~vdots/research/files/Catalan\\_Numbers.pdf](http://www.maths.tcd.ie/~vdots/research/files/Catalan_Numbers.pdf).
- [3] Зелевинский А. В. Резольвенты, дуальные пары и формулы для характеров // Функт. анализ и его прил. 1987. Т. 21, № 2. С. 74–75.

- [4] *Игнатъев М. В.* Квантовая комбинаторика // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 66–111.
- [5] *Смирнов Е. Ю.* Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
- [6] *Спивак А. В.* Формула крюков // Квант. 2009. № 3. С. 44–47.
- [7] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2009. Фрагмент о числах Каталана доступен по ссылке <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf>.
- [8] *Фултон У.* Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М.: МЦНМО, 2006.
- [9] *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
- [10] *André D.* Solution directe du problème résolu par M. Bertrand // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1887. V. 105. P. 436–437.
- [11] *Bressoud D. M.* Proofs and confirmations. The story of the alternating sign matrix conjecture // Math. Assoc. America and Cambridge University Press, 1999.
- [12] *Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M.* The hook graphs of the symmetric group // Canadian J. Math. 1954. V. 6. P. 316–324.
- [13] *Gessel I., Viennot G.* Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae // Advances in Mathematics. 1985. V. 58, № 3. 300–321.
- [14] *Karlin S., McGregor G.* Coincidence probabilities // Pacific J. Math. 1959. V. 9, № 4. P. 1141–1164.
- [15] *Lindström B.* On the vector representation of induced matroids // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. P. 85–90.
- [16] *MacMahon P. A.* Combinatory analysis. 2 vols. Cambridge University Press, 1915–16.
- [17] *Renault M.* Lost (and Found) in Translation: André's Actual Method and Its Application to the Generalized Ballot Problem // Amer. Math. Monthly. 2008. V. 115, № 4. P. 358–363.
- [18] *Zeilberger D.* Andre's reflection proof generalized to the many-candidate ballot problem // Discrete Math. 1983. V. 44. P. 325–326.

---

М. А. Берштейн, ИТФ им. Ландау, ИППИ им. Харкевича, НМУ  
 mbersht@gmail.com

Г. А. Мерзон, МЦНМО  
 merzon@mcsme.ru



---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Неравенство Бернштейна, тождество Рисса и формула Эйлера для ряда обратных квадратов

С. Б. Гашков

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

*Тригонометрия учит нас, что, скажем, Венеру Милосскую можно свести к серии математических формул, а потому, если даже её статую в Лувре и уничтожить, то, проявив некоторое терпение, можно её восстановить с помощью тех же формул, притом любое число раз, абсолютно такую же: все формы, линии, объёмы, текстуру камня, потёртости, вес и эстетический восторг включительно.*

Блез Сандрар, «Принц-потрошитель,  
или Женомор», 1917 г.

В начале прошлого века некоторые серьёзные и известные математики не считали ниже своего достоинства заниматься задачами, которые сейчас производят впечатление олимпиадных, причём чуть ли не школьного типа. Например, академик Сергей Натанович Бернштейн написал ряд статей, посвящённых различным неравенствам для тригонометрических многочленов (см. [2, 3]). Подобными задачами занимались, отчасти соревнуясь

с С. Н. Бернштейном, Марсель Рисс<sup>1)</sup>, Фейер, Юнг, Сегё, Сасс, Эгервари, Джексон и др. Самые простые из доказанных ими теорем действительно превратились в олимпиадные задачи (и их можно найти в различных сборниках подобных задач), но многие замечательные и красивые факты остаются малоизвестными. Невзирая на высказанное знаменитым Ж. Дьёдонне (в книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия») мнение о том, что тригонометрия нужна лишь для астрономов, геодезистов и составителей задачников по тригонометрии, автор статьи надеется, что красивые классические теоремы, которые в ней найдёт читатель, заслуживают большей популярности.

Далее будут приведены формулировки и доказательства некоторых неравенств С. Н. Бернштейна для тригонометрических и алгебраических многочленов. Эти доказательства основаны на использовании разнообразных тригонометрических тождеств, связанных с тождеством М. Рисса, выражающим значение производной тригонометрического многочлена в данной точке через его значения в некоторых других точках. Хотя это тождество не выглядит элементарным из-за вхождения в него производной, оно тесно связано с многими элементарными тождествами, частные случаи которых можно предлагать в качестве задач школьникам.

Для краткости, а также с целью демонстрации простоты применяемых в статье рассуждений, в ней выбрана форма изложения в виде последовательности задач, к которым даются указания или полные решения. Многие из этих задач представляют самостоятельный интерес и могут быть использованы на учебных занятиях со школьниками или студентами. Также для краткости вместо чисто тригонометрических выкладок часто используются равносильные вычисления с комплексными числами.

### Некоторые свойства тригонометрических многочленов

Тригонометрическим многочленом порядка  $n$  называется сумма вида

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где хотя бы одно из чисел  $a_n$  или  $b_n$  отлично от нуля. Коэффициенты  $a_k, b_k$  могут быть как действительными, так и комплексными (в случае необходимости поле коэффициентов указывается).

1. Докажите, что произведение тригонометрических многочленов порядков  $n$  и  $m$  есть тригонометрический многочлен порядка  $n + m$ .

---

<sup>1)</sup> Брат известного математика Ференца Рисса. Чтобы их различать, пишем инициалы. Так как есть несколько математиков с фамилией Бернштейн, также во избежание путаницы пишем инициалы.



УКАЗАНИЕ. Примените формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму.

Далее используется формула Эйлера  $\cos x + i \sin x = e^{ix} = \exp ix$ , где  $i$  — мнимая единица.

2. Действительный тригонометрический многочлен порядка  $n$  имеет не более  $2n$  действительных корней с учётом кратности. Докажите, что если корней ровно  $2n$  и эти корни суть  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , то

$$t_n(x) = A \sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_{2n}}{2}\right).$$

УКАЗАНИЕ. Достаточно воспользоваться представлением тригонометрического многочлена порядка  $n$  в виде  $e^{-inz} P_{2n}(e^{iz})$  и заметить, что  $e^{-inz} \neq 0$  и  $P_{2n}$  не имеет нулевых корней. Представляя корни в виде  $e^{iz_k}$ , имеем

$$\begin{aligned} t_n(z) &= e^{-inz} P_{2n}(e^{iz}) = c_n e^{-inz} \prod_{k=1}^{2n} (e^{iz} - e^{iz_k}) = c_n \prod_{k=1}^{2n} (e^{i\frac{z}{2}} - e^{i\frac{-z+2z_k}{2}}) = \\ &= c_n e^{i\frac{z}{2} \sum_{k=1}^{2n} z_k} \prod_{k=1}^{2n} (e^{i\frac{z-z_k}{2}} - e^{i\frac{z_k-z}{2}}) = A \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{z-z_k}{2}. \end{aligned}$$

3. Докажите, что при чётном  $n$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx + \alpha) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}},$$

а при нечётном  $n$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx + \alpha) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}}$$

там, где эти дроби определены.

РЕШЕНИЕ. Перепишем

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx + \alpha)$$

в виде

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n (-e^{ix})^k\right)$$

и применим формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n (-e^{ix})^k\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - (-e^{ix})^{n+1}}{1 + e^{ix}}\right)$$

(здесь и далее  $\operatorname{Re}(z)$  и  $\operatorname{Im}(z)$  — действительная и мнимая части комплексного числа  $z$ ). При чётном  $n$  имеем

$$(-e^{ix})^{n+1} = -\cos(n+1)x - i \sin(n+1)x,$$

и тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - (-e^{ix})^{n+1}}{1 + e^{ix}}\right) &= \\ &= \operatorname{Re}\left((\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{(1 + \cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)(1 + \cos x - i \sin x)}{2 + 2 \cos x}\right) = \\ &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

При нечётном  $n$ , очевидно,

$$(-e^{ix})^{n+1} = \cos(n+1)x + i \sin(n+1)x,$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - (-e^{ix})^{n+1}}{1 + e^{ix}}\right) &= \\ &= \operatorname{Re}\left((\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{(1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x)(1 + \cos x - i \sin x)}{2 + 2 \cos x}\right) = \\ &= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

4. Докажите для

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_n\left(x + \frac{2\pi k}{n}\right) = n(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу суммирования геометрической прогрессии подобно решению задачи 3.

5. Докажите для любого

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

при  $m > n/3$  тождество

$$t_n(x) - t_n\left(x + \frac{\pi}{m}\right) + t_n\left(x + \frac{2\pi}{m}\right) - \dots + t_n\left(x + \frac{\pi(2m-2)}{m}\right) -$$

$$-t_n\left(x + \frac{\pi(2m-1)}{m}\right) = 2m(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 3. См. также [4, 5].

6. Тригонометрический многочлен  $n$ -го порядка удовлетворяет равенствам

$$t_n(a) = -t_n\left(a + \frac{\pi}{n}\right) = t_n\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) = \dots = -t_n\left(a + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Докажите, что  $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ .

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 5.

Далее будут использованы<sup>2)</sup> интересные сами по себе

### Тождества Валлиса

7. Докажите, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{n} &= n2^{-n+1}, & 2) \quad \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{2n} &= \sqrt{n}2^{-n+1}, \\ 3) \quad \prod_{l=1}^{n-1} \cos \frac{l\pi}{2n} &= \sqrt{n}2^{-n+1}, & 4) \quad \prod_{l=1}^n \sin \frac{(2l-1)\pi}{4n} &= 2^{-n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Третье равенство вытекает из второго в силу следствия формул приведения:

$$\sin \frac{k\pi}{2n} = \cos \frac{(n-k)\pi}{2n}.$$

Перемножив второе и третье равенство и воспользовавшись формулой двойного угла  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , получаем, что первое равенство равносильно второму (или третьему). Четвёртое равенство вытекает из второго, если заметить, что

$$\prod_{l=1}^n \sin \frac{(2l-1)\pi}{4n} = \frac{\prod_{l=1}^{2n-1} \sin \frac{l\pi}{4n}}{\prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{2l\pi}{4n}} = \frac{P_{2n}}{P_n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

где

$$P_n = \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n}2^{-n+1}.$$

Докажем первое равенство. Заметим, что многочлен

$$p_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

<sup>2)</sup> Найденные знаменитым английским математиком XVII века.

имеет комплексные корни  $x_k = \varepsilon^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , где  $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ , так как двучлен  $x^n - 1$  имеет те же корни, а также корень  $x_0 = \varepsilon^0 = 1$ . Из теоремы Безу следует тогда тождество

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k),$$

откуда в силу непосредственно проверяемого тождества  $|1 - e^{2ix}| = 2 \sin |x|$  получаем

$$\begin{aligned} n &= p_n(1) = |p_n(1)| = \\ &= \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - e^{2k\pi i/n}| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

## § 2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЭРМИТА И ТОЖДЕСТВО М. РИССА

*Виноват ты сам, Ральф, — недовольно заметил штурман. — На кой чёрт ты всегда стреляешь с дистанции, на которой нас контузят от собственных взрывов? — Зато не нужно ломать голову в тригонометрии <...>*

В. С. Пикуль, «Реквием конвою PQ-17»

Производной многочлена

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с действительными или комплексными коэффициентами называется многочлен

$$t'_n(x) = \sum_{k=1}^n k(b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Производная удовлетворяет непосредственно проверяемым тождествам

$$f' + g' = (f + g)', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad (cf(x))' = cf'(x), \quad f(x+c)' = f'(x+c),$$

где  $c$  — константа. Производную частного двух многочленов можно определить равенством

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2},$$

в частности, например,  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

Доказательство следующего далее тождества М. Рисса можно найти, например, в [9, 11]. Ниже приводится один из его вариантов, основанный на использовании тригонометрической интерполяции.

8 (М. Рисс). Пусть  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ . Докажите, что

$$\text{а) } \cos nx = A \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - \theta_k}{2};$$

$$\text{б) } Q_n^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} 2^{2n-1} \frac{\sin \frac{x - (\pi + \theta_m)}{2}}{2n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{2n} \sin \frac{x - \theta_m}{2}$$

есть тригонометрический многочлен  $n$ -й степени, такой что

$$Q_n^{(m)}(\theta_k) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m; \end{cases}$$

отметим, что почти всюду

$$Q_n^{(m)}(x) = \frac{\cos nx}{2n} (-1)^m \operatorname{ctg} \frac{x - \theta_m}{2} = (-1)^{m+1} \frac{\cos nx \sin \frac{x - (\pi + \theta_m)}{2}}{2n \sin \frac{x - \theta_m}{2}};$$

в) любой тригонометрический многочлен  $t_n(x)$  можно представить в виде

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{x - \theta_k}{2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{2n} \sin \frac{x - \theta_m}{2},$$

причём почти всюду

$$t_n(x) = a \cos nx + \frac{\cos nx}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left( \operatorname{ctg} \frac{x - \theta_k}{2} \right) t_n(\theta_k),$$

и выполнено равенство

$$t'_n(0) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}};$$

г) справедлива формула М. Рисса (тождество М. Рисса) для производной тригонометрического многочлена:

$$t'_n(x) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(x + \theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}};$$

д) верно тождество

$$n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

УКАЗАНИЕ (к п. а). Примените задачу 2. Можно также найти константу  $A$ , подставив в обе части равенства  $x = 0$ . Слева получим 1, а справа, согласно задаче 7,

$$A \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = A \cdot 2^{1-2n},$$

откуда  $A = 2^{2n-1}$ .

УКАЗАНИЕ (к п. б). Равенство  $Q_n^{(m)}(\theta_k) = 0$  при  $k \neq m$  следует из п. а). При подстановке  $x = \theta_k$ ,  $k \neq m$ , правая часть формулы из условия обращается в нуль. При подстановке  $x = \theta_m$  справа получается с учётом равенства задачи 7

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m 2^{2n-1}}{2n} \prod_{k \neq m} \sin \frac{\theta_m - \theta_k}{2} &= \frac{(-1)^{m+1} 2^{2n-1}}{2n} \prod_{k \neq m} \sin \frac{(k-m)\pi}{2n} = \\ &= \frac{2^{2n-1}}{2n} \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \prod_{k=1}^{2n-m} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{2^{2n-1}}{2n} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = 1. \end{aligned}$$

Из формулы произведения синусов и задачи 1 следует, что

$$\frac{\sin \frac{x - (\pi + \theta_m)}{2}}{2n} \prod_{k \neq m} \sin \frac{x - \theta_k}{2}$$

есть тригонометрический многочлен  $n$ -го порядка.

УКАЗАНИЕ (к п. в). Аналогично построению интерполяционного многочлена Лагранжа положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left( \cos \frac{x - \theta_k}{2} \right) t_n(\theta_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{2n} \sin \frac{x - \theta_m}{2};$$

почти всюду это выражение равно

$$f(x) = \frac{\cos nx}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left( \operatorname{ctg} \frac{x - \theta_k}{2} \right) t_n(\theta_k).$$

Тогда  $f(\theta_k) = t_n(\theta_k)$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ . Поэтому  $f(x) - t_n(x)$  и  $a \cos nx$  совпадают в точках  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , а при подходящем выборе  $a$  и в точке 0, поэтому согласно теореме 2 они тождественно совпадают как тригонометрические многочлены  $n$ -го порядка. Дифференцируя обе части первого равенства п. в) в нуле, замечаем, что производная от слагаемого  $a \cos nx$

в нуле равна нулю, а производная произведения  $\frac{1}{2n} \cos nx$  на

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left( \operatorname{ctg} \frac{x - \theta_k}{2} \right) t_n(\theta_k)$$

в нуле равна

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k t_n(\theta_k) \operatorname{ctg}' \left( \frac{x - \theta_k}{2} \right) \Big|_{x=0}$$

согласно правилам дифференцирования произведения и суммы. Остаётся вычислить производную  $\operatorname{ctg}((x - \theta_k)/2)$  и получить согласно правилу дифференцирования дроби

$$\operatorname{ctg}' \frac{x - \theta_k}{2} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{x - \theta_k}{2}}, \quad \operatorname{ctg}' \left( \frac{x - \theta_k}{2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{-\theta_k}{2}} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

УКАЗАНИЕ (к п. г). Примените к  $f_n(x) = t_n(x + y)$  вторую формулу п. в). Тогда, дифференцируя  $f_n(x)$  в нуле при любом  $y$ , имеем

$$t'_n(y) = f'_n(0) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{f_n(\theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k + y)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

УКАЗАНИЕ (к п. д). Примените вторую формулу п. в) к  $t_n(x) = \sin nx$ . Справа получим  $n$ , а слева

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

### § 3. НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА

*<...> основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами.*

Эдвин Беккенбах, Ричард Беллман,  
«Введение в неравенства»

Здесь речь пойдёт о неравенстве для тригонометрических производных<sup>3)</sup>. Оно (а также некоторые его варианты и обобщения) будет сформулировано в следующей далее задаче 11, но вначале необходимо привести некоторые предварительные сведения.

<sup>3)</sup> Это уточнение необходимо, так как с именем С. Н. Бернштейна связано много различных неравенств.

Назовём нормой и обозначим  $\|t_n\|$  максимум модуля тригонометрического многочлена  $t_n$ . Величину  $\max |t_n(x)|$  также называют равномерной или чебышёвской нормой. В силу периодичности очевидно равенство

$$\max |t_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |t_n(x)|.$$

Кроме неё, используются нормы

$$\|t_n\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

а норму  $\|t_n\|$  обозначают  $\|t_n\|_{\infty}$ . Можно проверить, что  $\|t_n\|_p \leq \|t_n\|_{\infty}$ . Очевидно, что для любой константы  $c$  и любого  $p \geq 1$ , в том числе и  $p = \infty$ , справедливо равенство  $\|ct_n\|_p = |c| \cdot \|t_n\|_p$  и что для нормы  $\|f\|$  справедливо неравенство выпуклости  $\|\alpha f + \beta g\| \leq |\alpha| \cdot \|f\| + |\beta| \cdot \|g\|$ .

**9.** Докажите для  $2\pi$ -периодических функций свойство инвариантности нормы относительно сдвига на произвольное число  $a$ :

$$\|f(x+a)\|_p = \|f(x)\|_p.$$

Далее нам понадобится классическое неравенство Минковского. Оно тоже сформулировано в виде задачи, решение которой можно найти, например, в [1, 11–13, 16]. Ввиду широкой известности решения оно здесь не приводится.

**10.** Докажите, что при  $p \geq 1$  справедливо неравенство Минковского

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \cdot \|f\|_p + |\beta| \cdot \|g\|_p,$$

которое обращается в равенство только при выполнении тождества  $f(x) = cg(x)$ , где  $c \in \mathbb{R}$  — константа.

Всё сказанное выше справедливо для многочленов как с действительными, так и с комплексными коэффициентами (можно определить нормы и доказать все указанные их свойства).

Различные доказательства неравенств С. Н. Бернштейна можно найти в [2, 3, 6, 8–12, 16]. Здесь приводится доказательство, основанное на использовании тождества М. Рисса. Известно также несколько полиномиальных неравенств типа С. Н. Бернштейна (см., например, [16]), но они выходят за рамки данного изложения.

**11.** Докажите для тригонометрических многочленов  $t_n$  порядка  $n$  (как с действительными, так и с комплексными коэффициентами)

а) неравенство С. Н. Бернштейна  $\max_{x \in \mathbb{R}} |t'_n(x)| \leq n \max_{x \in \mathbb{R}} |t_n(x)|$ ;



- б) неравенство С. Н. Бернштейна  $\|t'_n(x)\|_p \leq n\|t_n(x)\|_p$ ;  
 в) неравенство С. Н. Бернштейна для кратных производных

$$\|t_n^{(k)}(x)\|_p \leq n^k \|t_n(x)\|_p.$$

УКАЗАНИЕ (к п. а). Вычисляя у обеих частей тождества М. Рисса норму  $\|f\|$  и пользуясь неравенством выпуклости  $\|\alpha f + \beta g\| \leq |\alpha| \cdot \|f\| + |\beta| \cdot \|g\|$  и равенством  $\|t(x + \alpha)\| = \|t(x)\|$ , получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|t'_n(x)\| &\leq \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\|t_n(x + \theta_k)\|}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\|t_n(x)\|}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \\ &= \|t_n(x)\| \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{4n \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = n\|t_n(x)\|, \end{aligned}$$

где на последнем шаге использовано равенство п. д) задачи 8.

УКАЗАНИЕ (к п. б). Для нормы  $\|t\|_p$  справедливы неравенство

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \cdot \|f\|_p + |\beta| \cdot \|g\|_p$$

и равенство  $\|t(x + \alpha)\| = \|t(x)\|$ . Поэтому неравенство  $\|t'_n(x)\|_p \leq n\|t_n(x)\|_p$  доказывается аналогично п. а).

УКАЗАНИЕ (к п. в). Примените  $k$  раз доказанное в п. б) неравенство.

**12.** Докажите, что все неравенства С. Н. Бернштейна 11 а)–в) обращаются в равенства для многочленов  $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$  и только для них.

УКАЗАНИЕ. В случае нормы  $\|f\|$  согласно приведённому в п. а) доказательству равенство возможно, лишь когда для некоторого  $x$  справедливы равенства

$$t_n(x) = -t_n\left(x + \frac{\pi}{n}\right) = t_n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \dots = -t_n\left(x + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Применяя задачу 6, отсюда выводим, что  $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ . В случае нормы  $\|f\|_p$ ,  $p > 1$ , согласно задаче 10 равенство  $\|t'_n(x)\|_p = n\|t_n(x)\|_p$  возможно, лишь если тождественно  $t_n(x + \theta_1) = ct_n(x + \theta_1 + \pi/n)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , но тогда  $t_n(x + \theta_1) = c^{2n}t_n(x + \theta_1 + 2n\pi/n) = c^{2n}t_n(x + \theta_1)$ , откуда следует, что либо тождественно  $t_n(x) = 0$ , либо  $c^{2n} = 1$ , что возможно лишь при  $c = \pm 1$ . В случае  $c = -1$  имеем  $t_n(x) = -t_n(x + \pi/n)$ , откуда согласно задаче 6 следует, что  $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ . В случае  $c = 1$  имеем  $t_n(x) = t_n(x + \pi/n)$ , и в силу той же задачи  $t_n(x)$  равен константе. Но тогда равенство  $\|t'_n(x)\|_p = n\|t_n(x)\|_p$  возможно лишь для  $t_n(x) = 0$ .

В случае  $p = 1$  равенство в неравенстве  $\|af + bg\|_1 \leq a\|f\|_1 - b\|g\|_1$  при  $a > 0 > b$  возможно лишь при  $f = 0$  или  $g = 0$  или когда  $f/g < 0$  при любом  $x$ . Отсюда следует, что равенство

$$\|t'_n(x)\|_1 = \frac{1}{4n} \left\| \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(x + \theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \right\|_1 = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\|t_n(x + \theta_k)\|_1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}$$

возможно, лишь когда  $t_n(x)$  и его сдвиги  $t_n(x + \theta_k)$ , где  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ , имеют общие корни и таковы, что между соседними корнями  $t_n(x)/t_n(x + \theta_k) \in \mathbb{R}$  и не меняет знака, значит, все эти промежутки (рассматриваемые по модулю  $2\pi$ ) имеют равную длину, а именно  $\pi/n$ , и их количество равно  $2n$ , а это возможно, согласно п. а) задачи 8, только для функции

$$A \cos n(x - \alpha) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

**13.** Докажите неравенство С. Н. Бернштейна для алгебраических многочленов: при  $|x| < 1$  для любого многочлена  $p_n$  степени  $n$

$$|p'_n(x)| \leq \frac{n \max_{|x| \leq 1} |p_n(x)|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

УКАЗАНИЕ. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$t_n(x) = p_n(\cos x).$$

Его степень не выше  $n$  согласно, например, задаче 1. Очевидно,

$$p_n(x) = t_n(\arccos x), \quad \|p_n\| = \max_{|x| \leq 1} |p_n(x)| = \|t_n\|.$$

В силу неравенства С. Н. Бернштейна при  $|x| < 1$  имеем

$$|p'_n(x)| = |t'_n(\arccos x) \arccos' x| = \left| \frac{t'_n(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{n\|t_n\|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n\|p_n\|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Неравенство С. Н. Бернштейна имеет много приложений. В частности, из него можно вывести следующее неравенство П. Л. Чебышёва, которое равносильно экстремальному свойству тригонометрических многочленов: среди всех таких многочленов порядка  $n$  с фиксированными старшими коэффициентами  $a_n, b_n$  наименьшую норму  $\|t_n\|$  (т. е. минимальное отклонение от нуля) имеет  $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ .

**14.** Выведите из неравенства С. Н. Бернштейна неравенство П. Л. Чебышёва  $\|t_n\| \geq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ .

УКАЗАНИЕ. Так как у производной  $t'_n(x)$  старшие члены имеют коэффициенты, равные по модулю  $n|a_n|$ ,  $n|b_n|$ , то, используя тождество задачи 4 и неравенство С. Н. Бернштейна при подходящем выборе  $\alpha_n$ , имеем:

$$n^2 \|t_n\| \geq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| t'_n \left( \alpha_n + \frac{2\pi k}{n} \right) \right\| \geq \left\| \sum_{k=0}^{n-1} t'_n \left( \alpha_n + \frac{2\pi k}{n} \right) \right\| = n^2 \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

У указанного неравенства Чебышёва (и равносильного ему неравенства для алгебраических многочленов) известно много доказательств (см., например, [2, 5, 8, 10–12, 15]). Применяя неравенство Минковского и задачу 9, аналогично решению задачи 14 можно доказать следующее обобщение неравенства Чебышёва для произвольной нормы  $\|f(x)\|_p$ :

$$\|t_n\|_p \geq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \|\cos x\|_p.$$

#### § 4. СУММА ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ И ЕЩЁ ОДНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА М. РИССА

*Имейте в виду, что существует ещё и седьмое доказательство, и уж самое надёжное. И сейчас оно вам будет предъявлено.*

М. А. Булгаков, «Мастер и Маргарита»

Это доказательство появляется в конце длинной цепочки задач, продолжающейся в нескольких секциях этого раздела. Первая задача совсем простая.

15. Проверьте тождество  $\frac{1}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1}{2} + i \frac{\operatorname{ctg}(\varphi/2)}{2}$ .

16. Докажите при  $\alpha \neq m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \left( \alpha + \frac{k\pi}{n} \right) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{i(2\alpha + \frac{2k\pi}{n})}}.$$

УКАЗАНИЕ. Примените тождество из задачи 15.

17. Докажите при  $\alpha \neq 2m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{i(\alpha + \frac{2k\pi}{n})}} = \frac{n}{1 - e^{in\alpha}} = \frac{n}{2} + i \frac{n \operatorname{ctg}(n\alpha/2)}{2}.$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

где  $f(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ . При  $x_k = e^{i(\alpha + \frac{2k\pi}{n})}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , согласно теореме Безу  $f(x) = x^n - e^{in\alpha}$ . Другое решение можно получить, заметив, что корни многочлена

$$(1+x)^n - x^n e^{in\alpha}$$

есть  $1/(x_k - 1)$ , где  $x_k = e^{i(\alpha + \frac{2k\pi}{n})}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , причём это верно и при  $\alpha = 2m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, нужно только проверить, что тогда уравнение принимает вид  $(1+x)^n - x^n$ , имеет степень  $n - 1$  и корни  $1/(x_k - 1)$ , где  $x_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ . После этого применяем теорему Виета и получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{i(\alpha + \frac{2k\pi}{n})}} = \frac{n}{1 - e^{in\alpha}} = \frac{n}{2} + i \frac{n \operatorname{ctg}(n\alpha/2)}{2}.$$

**18** (Гобсон). Докажите, что корнями уравнения  $(z - 1)^n = (z + 1)^n$  являются комплексные числа  $z_k = i \operatorname{ctg}(k\pi/n)$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ .

**РЕШЕНИЕ.** Уравнение  $(z - 1)^n = (z + 1)^n$  равносильно  $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$ , значит,  $(z_k - 1)/(z_k + 1) = \varepsilon^k$ ,  $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ . Проверим, что  $z_k = i \operatorname{ctg}(k\pi/n)$  является корнем уравнения  $(z - 1)/(z + 1) = \varepsilon^k$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ . Очевидно, что  $|z_k - 1| = |z_k + 1|$ . Положим  $\alpha_k = \pi/2 - k\pi/n$ , тогда  $\arg(z_k + 1) = \alpha_k$ ,  $\arg(z_k - 1) = \pi - \alpha_k$ . Отсюда

$$\arg \frac{z_k - 1}{z_k + 1} = \arg(z_k - 1) - \arg(z_k + 1) = \pi - 2\alpha_k = \frac{2k\pi}{n},$$

поэтому  $(z_k - 1)/(z_k + 1) = \varepsilon^k$ , так как у этих чисел совпадают и модули, и аргументы.

**19.** Вычислите  $\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{n}$ .

**РЕШЕНИЕ**<sup>4)</sup>. Применим теорему Виета к уравнению  $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ . Это уравнение можно записать в виде  $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$  и, пользуясь формулой бинома, в виде

$$\binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{3} z^{n-3} + \dots + \binom{n}{2k+1} z^{n-2k-1} + \dots = 0.$$

Его корнями являются числа  $z_k = i \operatorname{ctg}(k\pi/n)$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , согласно задаче 18. Из теоремы Виета следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = 0, \quad \sum_{1 \leq k < l < n} z_k z_l = \binom{n}{3} / \binom{n}{1} = \frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

<sup>4)</sup> Идея решения принадлежит Н. М. Коробову, как мне сообщил А. В. Устинов.

откуда

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 = \left( \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq k < l < n} z_k z_l = -\frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{n} = -\sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

**20.** Докажите равенство  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{n}} = \frac{n^2-1}{3}$ .

УКАЗАНИЕ. Примените тождество  $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ .

**21.** Докажите при  $\alpha \neq m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \left( \alpha + \frac{k\pi}{n} \right) = n \operatorname{ctg} n\alpha.$$

РЕШЕНИЕ. Используя тождество

$$\frac{1}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1}{2} + \frac{i \operatorname{ctg}(\varphi/2)}{2}$$

задачи 15 и выделяя мнимые части, получаем при  $\alpha \neq m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, тождество

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \left( \alpha + \frac{k\pi}{n} \right) = n \operatorname{ctg} n\alpha.$$

**22.** Докажите при  $\alpha \neq m\pi/n$ , где  $m$  — целое число, тождество

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{1 - e^{i(2\alpha + \frac{2k\pi}{2n})}} &= \frac{n}{1 - e^{in\alpha}} - \frac{n}{1 - e^{i(n\alpha + \pi/2)}} = \\ &= \frac{in \operatorname{ctg} n\alpha}{2} - \frac{in \operatorname{ctg} \left( n\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{2} = \frac{in}{\sin(2n\alpha)}. \end{aligned}$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 21.

### Формула Эйлера для ряда обратных квадратов

Эта формула появляется в конце следующей цепочки задач.

**23.** Докажите тождества

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} \right) = 4n^2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n} \right) = 2n^2.$$

УКАЗАНИЕ. Примените тождество п. д) задачи 8. Для доказательства второго тождества заметить, что в первой сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) = \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{(2n-k-1)\pi}{2n}\right).$$

**24.** Докажите тождества

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) = 4n^2 - 2n, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) = 2n^2 - n.$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 23 и тождество  $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ .

В следующей задаче, наконец, появляется формула Эйлера.

**25.** Выведите из задач 23, 24 формулы Эйлера для ряда обратных квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

РЕШЕНИЕ. Применим при  $0 < x \leq \pi/2$  неравенства  $\operatorname{ctg}^2 x < 1/x^2 < \operatorname{cosec}^2 x$  (вытекающие из неравенств  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ ) и тождества задач 23, 24. Тогда имеем

$$2n^2 - n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)^2} = \frac{16n^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1+2k)^2}$$

и аналогично

$$2n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right) > \frac{16n^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1+2k)^2},$$

откуда следует, что

$$\pi^2 \frac{1 - \frac{1}{2n}}{8} < \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(1+2k)^2} < \frac{\pi^2}{8},$$

значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

получаем

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Аналогично и первое равенство можно вывести из второго.

Эйлер нашёл также формулы для ряда обратных четвёртых степеней и т. д. Эти формулы дают явные выражения значения в точках вида  $2k$  дзета-функции Римана (её называют иногда функцией Эйлера — Римана). Доказательства этих формул используют ряды Фурье и поэтому недостаточно элементарны, так же как и большинство доказательств приведённой выше формулы Эйлера. Ещё одно элементарное доказательство можно найти в [14, 15]. Большое количество других доказательств (не все из которых совсем уж элементарны) имеется в [7].

В конце этого раздела указывается ещё одно доказательство тождества п. д) задачи 8. В нём используется следующая задача.

**26.** Докажите формулу Виета — Муавра кратных углов

$$\cos na = \cos^n a - \binom{n}{2} \sin^2 a \cos^{n-2} a + \binom{n}{4} \sin^4 a \cos^{n-4} a - \dots$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу Муавра — Эйлера  $e^{inx} = (e^{ix})^n$  и формулу бинома Ньютона.

Частным случаем при  $n = 2m$  первого тождества следующей задачи является тождество п. д) задачи 8.

**27.** Докажите тождества

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n^2, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n^2 - n.$$

РЕШЕНИЕ. Согласно задаче 26

$$\cos na = \cos^n a - \binom{n}{2} \sin^2 a \cos^{n-2} a + \binom{n}{4} \sin^4 a \cos^{n-4} a - \dots$$

При подстановке в обе части равенства  $a = \frac{\pi(1+2k)}{2n}$  получаем с обеих сторон нули. Деля обе части на  $\sin^n a \neq 0$ , заменяя везде дроби  $\frac{\cos a}{\sin a}$  на  $\operatorname{ctg} a$  и в случае нечётного  $n$  деля ещё раз полученное равенство на  $\operatorname{ctg} a \neq 0$  при  $k = 0, \dots, \lfloor (n-2)/2 \rfloor$ , получаем равенства

$$0 = x^{2m} - \binom{n}{2} x^{2m-2} + \dots,$$

где  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $x = \operatorname{ctg} a$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ . Значит, уравнение

$$x^m - \binom{n}{2} x^{m-1} + \dots = 0$$

имеет в точности  $m$  корней  $x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n}$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ . Поэтому по теореме Виета имеем, что их сумма

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Применяя тождество  $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ , отсюда имеем при  $n = 2m + 1$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n(n-1)}{2} + m = 2m^2 + 2m = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Поскольку при  $k = m$ , очевидно,

$$\operatorname{cosec} \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = 1, \quad \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) &= \frac{n^2 + 1}{2}, \\ \sum_{k=0}^m \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} &= \frac{n(n-1)}{2}, \\ \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi(1+2k)}{2n} = n(n-1), \end{aligned}$$

так как в последней сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-k-1)\pi}{n} \right).$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{2m} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = 2 \frac{n^2 - 1}{2} + 1 = n^2. \end{aligned}$$

В случае  $n = 2m$  получаем равенства задач 23, 24, например

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = n(n-1) + 2m = n^2,$$

так как в последней сумме слагаемые можно разбить на пары равных:

$$\operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-k-1)\pi}{n} \right).$$



**Тригонометрические тождества,  
равносильные тождеству М. Рисса**

Их появлению также предшествует цепочка задач.

**28.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , и  $m \leq n$  тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 0.$$

УКАЗАНИЕ. Достаточно применить формулу п. г) задачи 8 к функции  $t_n(x) = \cos mx$ .

**29.** Докажите тождество

$$\frac{z^m}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{m}{z-1} + m-1 + (m-2)z + \dots + z^{m-2}.$$

РЕШЕНИЕ. Применяя формулу

$$z^n - 1 = (z-1)(1+z+\dots+z^{n-1}),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{m}{z-1} &= \frac{z^m - 1}{(z-1)^2} - \frac{m}{z-1} = \frac{1+z+\dots+z^{m-1}}{z-1} - \frac{m}{z-1} = \\ &= 1 + \frac{z^2-1}{z-1} + \dots + \frac{z^{m-1}-1}{z-1} = 1 + (z+1) + \dots + (1+z+\dots+z^{m-2}) = \\ &= m-1 + (m-2)z + \dots + z^{m-2}. \end{aligned}$$

**30.** Докажите тождество

$$\frac{1}{2 \sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{1 - \cos \varphi} = -\frac{2e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - 1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ. Первое равенство следует из формулы двойного угла. Так как модуль  $e^{i\varphi} - 1$  равен  $2 \sin(\varphi/2)$  (у треугольника с вершинами в точках  $0, 1, e^{i\varphi}$  боковые стороны равны единице, а угол при вершине равен  $\varphi$ ), модуль дроби  $\frac{-2e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - 1)^2}$  равен  $\frac{1}{2 \sin^2(\varphi/2)}$ . Аргумент числа  $e^{i\varphi} - 1$  равен  $(\varphi + \pi)/2$ , значит, аргумент его квадрата равен  $\varphi + \pi$ , поэтому аргумент указанной дроби равен  $(\varphi + \pi) - (\varphi + \pi) = 0$ , т. е. дробь равна  $1/(2 \sin^2(\varphi/2))$ .

**31.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = -\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{e^{i\theta_k} - 1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - e^{i\theta_k}} = in.$$

РЕШЕНИЕ. Равенство

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - e^{i\theta_k}} = in$$

следует из задачи 22 при подстановке  $\alpha = \pi/(4n)$ . Используя тождество задачи 29 при  $m = 1$  и тождество задачи 30, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{e^{i\theta_k} - 1} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 0, \end{aligned}$$

так как слагаемые в сумме можно разбить на пары взаимно противоположных:

$$(-1)^{k+1} \sin^2 \frac{\theta_k}{2} = -(-1)^{2n-k+2} \sin^2 \frac{\theta_{2n-k+1}}{2}.$$

**32.** Докажите при  $m < n$  и при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} e^{mi\theta_k} = 0.$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу  $1 + z + \dots + z^{2n-1} = (z^{2n} - 1)/(z - 1)$  при  $z = -e^{im\pi/n}$ .

**33.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , и  $m \leq n$  тождества

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = im, \quad \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\sin m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = m.$$

РЕШЕНИЕ. Тождество

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\sin m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = m$$

вытекает из тождества

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = im,$$

если в нём заменить  $e^{im\theta_k}$  согласно формуле Эйлера на  $i \sin m\theta_k + \cos m\theta_k$  и взять от обеих сторон мнимые части. Если взять действительные части,

то получим ещё раз тождество задачи 28. Для доказательства тождества

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = imn,$$

заменяя в нём  $\frac{e^{im\theta_k}}{4 \sin^2(\theta_k/2)}$  на  $-\frac{e^{i(m+1)\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2}$  согласно тождеству задачи 30 и далее на

$$-\frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} - \frac{m+1}{e^{i\theta_k} - 1} - m - (m-1)e^{i\theta_k} - \dots - (e^{i\theta_k})^{m-1}$$

согласно тождеству задачи 29, получим в левой части сумму

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} - \frac{m+1}{e^{i\theta_k} - 1} - m - (m-1)e^{i\theta_k} + \dots + (e^{i\theta_k})^{m-1} \right) = \\ & = - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{m+1}{e^{i\theta_k} - 1} - \\ & \quad - (m-1) \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} e^{i\theta_k} - \dots - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} e^{i(m-1)\theta_k}. \end{aligned}$$

Применяя тождества задач 31 и 32, получаем при  $m \leq n$  в правой части  $imn$ , что и требовалось доказать.

**34.** Выведите из задачи 33 тождество М. Рисса.

УКАЗАНИЕ. Заменяем в сумме

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}$$

тригонометрический многочлен  $t_n(x)$  на  $a_0 + \sum_{k=1}^n (b_k \sin kx + a_k \cos kx)$ . Затем разобьём её естественным образом на  $2n+1$  сумму и вычислим каждую из них, пользуясь тождествами

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\sin m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = m, \quad \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 0$$

задачи 33 (первое из них применяем при  $1 \leq m \leq n$ , а второе — при  $0 \leq m \leq n$ ), получаем равенство п. г) задачи 8:

$$\frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{t_n(\theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \sum_{k=1}^n kb_k = t'_n(0),$$

потому что производная

$$t'_n(x) = \sum_{k=1}^n k(b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Из доказанного равенства следует п. г) задачи 8, т. е. тождество М. Рисса.

**35.** Докажите, что тождество М. Рисса равносильно системе тождеств

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = 0, \quad \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\sin m\theta_k}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = m, \quad m \leq n,$$

где  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ .

**РЕШЕНИЕ.** В задаче 34 показано, как из данных тождеств выводится тождество М. Рисса. Их вывод из тождества М. Рисса получается путём прямой подстановки в него вместо  $t_n(x)$  функций  $\sin mx$  и  $\cos mx$  (см. также задачу 28).

### § 5. ЕЩЁ ОДНО ТОЖДЕСТВО ТИПА ТОЖДЕСТВА М. РИССА

И это тождество появляется в конце цепочки задач.

**36.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^{i\theta_k} - 1} = -\frac{n^2}{4}.$$

**УКАЗАНИЕ.** Из задачи 27 следует, что

$$\sum_{k=1}^n \sin^{-2} \frac{\theta_k}{2} = n^2.$$

Поэтому (согласно задаче 30)

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = -\frac{n^2}{4}.$$

**37.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{i\theta_k}} = \frac{n}{2}.$$

**УКАЗАНИЕ.** Примените задачу 17.

**38.** Докажите при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} = -\frac{n^2 - 2n}{4}.$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 36, 37.

**39.** Докажите при  $m < n$  и при  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , тождество

$$\sum_{k=1}^n e^{mi\theta_k} = 0.$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу суммирования геометрической прогрессии.

**40.** Докажите при  $m \leq n$  тождество

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = n - 2m,$$

где  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

РЕШЕНИЕ подобно решению задачи 33. Для доказательства тождества

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = n(n - 2m),$$

где  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , заменим в нём  $\frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2(\theta_k/2)}$  на  $-\frac{4e^{i(m+1)\theta_k}}{(e^{i\theta_k} - 1)^2}$  согласно тождеству задачи 30, и далее на

$$-4 \left( \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \frac{m+1}{e^{i\theta_k} - 1} + m + (m-1)e^{i\theta_k} + \dots + (e^{i\theta_k})^{m-1} \right)$$

согласно тождеству задачи 29. Получим в левой части сумму

$$\begin{aligned} & -4 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \frac{m+1}{e^{i\theta_k} - 1} + m + (m-1)e^{i\theta_k} + \dots + (e^{i\theta_k})^{m-1} \right) = \\ & = -4mn + \sum_{k=1}^n \frac{-4}{(e^{i\theta_k} - 1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{-4(m+1)}{e^{i\theta_k} - 1} - 4(m-1) \sum_{k=1}^n e^{i\theta_k} - \dots - 4 \sum_{k=1}^n e^{i(m-1)\theta_k}. \end{aligned}$$

Применяя тождества задач 37, 38, 39, получаем при  $m \leq n$  в правой части

$$-4mn + (-4) \left( -\frac{n^2 - 2n}{4} \right) + (-4(m+1)) \frac{-n}{2} = n^2 - 2mn,$$

что и требовалось доказать.

41 (О'Хара). Докажите для любого алгебраического многочлена  $f(z)$  с комплексными коэффициентами степени  $n$  тождество

$$zf'(z) = \frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}$$

(здесь, как и в следующих задачах,  $z$  принимает комплексные значения).

РЕШЕНИЕ. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Тогда по формуле Муавра – Эйлера

$$f(e^{i\theta_k} z) = \sum_{m=0}^n a_m e^{im\theta_k} z^m.$$

Подставляя полученные равенства в сумму

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}},$$

где  $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и меняя порядок суммирования в полученной повторной сумме, получаем, что она равна

$$\sum_{m=0}^n A_m z^m, \quad A_m = \frac{a_m}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{im\theta_k}}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

Из утверждения задачи 40 следует равенство

$$A_m = a_m \left( \frac{n}{2} - m \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} &= \frac{n}{2} \sum_{m=0}^n a_m z^m - \sum_{m=0}^n A_m z^m = \\ &= \sum_{m=0}^n m a_m z^m = z \sum_{m=1}^n m a_m z^{m-1} = z f'(z). \end{aligned}$$

Ещё одно доказательство тождества О'Хары имеется в [10].

## § 6. НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И НЕРАВЕНСТВО СЕГЁ

*Кратчайший путь между двумя истинами в действительной области часто лежит через комплексную плоскость.*

Жак Адамар

Определим  $\|f\|_{p,R}$  как

$$\left( \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |f(R e^{ix})|^p dx \right)^{1/p}$$

при  $p \geq 1$ ,  $R > 0$ . При  $p = \infty$  определим  $\|f\|_{p,R}$  как  $\max_{|z|=R} |f(z)|$ .

**42.** Докажите для любого алгебраического многочлена  $f(z)$  с комплексными коэффициентами степени  $n$  и  $R > 0$  неравенства С. Н. Бернштейна

$$\max_{|z|=R} |f'(z)| \leq \frac{n}{R} \max_{|z|=R} |f(z)|, \quad \|f'(z)\|_{p,R} \leq \frac{n}{R} \|f(z)\|_{p,R}.$$

Равенство достигается только при  $f(z) = az^n$ .

УКАЗАНИЕ. Случай  $p = \infty$ . Воспользуемся тождеством задачи 41

$$zf'(z) = \frac{n}{2} f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и вычислим у обеих его частей максимум по всем  $z$  при условии  $|z| = R$ . Слева получим  $R \max_{|z|=R} |f'(z)|$ , а справа, в силу неравенства треугольника  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , имеем

$$\max_{|z|=R} \left| \frac{n}{2} f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \right| \leq \left| \frac{n}{2} \max_{|z|=R} |f(z)| + \max_{|z|=R} |f(z)| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \right|.$$

Из первого тождества задачи 27 следует, что

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \frac{n}{2},$$

откуда имеем

$$R \max_{|z|=R} |f'(z)| \leq n \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Случай  $1 \leq p < \infty$  рассматривается аналогично, но надо использовать неравенство Минковского (задача 10).

Используя принцип максимума для аналитических функций или лемму Д'Аламбера для многочленов, можно из задачи 42 вывести неравенство С. Н. Бернштейна в следующем виде:

$$\max_{|z| \leq R} |f'(z)| \leq \frac{n}{R} \max_{|z| \leq R} |f(z)|.$$

Обобщение этого неравенства можно найти в [6]. Другие обобщения имеются в [8].

**43.** Выведите из неравенств задачи 42 аналогичные неравенства для производных произвольного порядка.

УКАЗАНИЕ.  $\|f^{(k)}(z)\|_{p,R} \leq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{R^k} \|f(z)\|_{p,R}.$

**44.** Докажите, что если многочлен  $f(z)$  удовлетворяет неравенству  $|f(z)| \leq 1$  при всех  $|z| \leq 1$ , то его старший коэффициент по модулю не больше 1. Такое же неравенство справедливо при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{ix})| dx \leq 2\pi.$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 43.

**45.** Выведите неравенства задачи 42 из неравенства п. б) задачи 11.

УКАЗАНИЕ. Случай произвольного  $R > 0$  следует из случая  $R = 1$  с помощью замены переменных  $w = z/R$ . В случае  $R = 1$  замена переменных  $z = e^{ix}$  переводит комплексный алгебраический многочлен  $f_n(z)$  в тригонометрический многочлен  $t_n(x)$  с комплексными коэффициентами, такой что  $t_n(x) = f_n(e^{ix})$ . При этом  $t'_n(x) = f'_n(z)iz$ , откуда

$$\|f'_n(z)\|_{p,1} = \|t'_n(x)\|_p, \quad \|f_n(z)\|_{p,1} = \|t_n(x)\|_p.$$

Пусть

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тригонометрический многочлен

$$t_n^* = \sum_{k=0}^n (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

называется сопряжённым к  $t_n(x)$ .



46. Пусть  $p_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ ,  $c_k = a_k - ib_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Докажите, что для действительных и мнимых частей справедливы равенства

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right) = \sum_{k=0}^n (a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

УКАЗАНИЕ. Примените формулу Муавра — Эйлера.

Обозначим многочлен

$$\sum_{k=1}^n (ka_k \cos kx + kb_k \sin kx)$$

через  $n * t_n$ .

47. Проверьте, что

$$t_n^{**} = -t_n, \quad t_n^{****} = t_n, \quad (t^*)_n' = (t'_n)^* = n * t, \quad t'_n = -n * t^*,$$

$$(at_n)^* = at_n^*, \quad t_n^*(x+a) = (t_n(x+a))^*, \quad (f_n + g_n)^* = f_n^* + g_n^*.$$

48. Выведите из задачи 41 для любого тригонометрического многочлена порядка  $n$  тождества

$$(t'_n)^*(x) = \frac{n}{2} t_n(x) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{t_n(\theta_k + x)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}},$$

$$t'_n(x) = -\frac{n}{2} t_n^*(x) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{t_n^*(\theta_k + x)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

РЕШЕНИЕ. Подставим в тождество задачи 41

$$z f'(z) = \frac{n}{2} f(z) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{f(e^{i\theta_k} z)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

вместо  $z$  число  $e^{ix}$ , а вместо  $f(z)$  — сумму  $t_n(x) + it_n^*(x)$  согласно задаче 46. Тогда вместо

$$z f'(z) = \sum_{k=1}^n k c_k z^k,$$

согласно задаче 47, можно подставить  $(t_n^*)' - it'_n(x)$ . Так как  $f(e^{i\theta_k} z)$  при  $z = e^{ix}$ , согласно задаче 47, равно

$$f(e^{i(x+\theta_k)}) = t_n(x + \theta_k) + it_n^*(x + \theta_k) = t_n(x + \theta_k) + i(t_n(x + \theta_k))^*,$$

приравнивая мнимые и действительные части тождества задачи 41, имеем

$$(t'_n)^*(x) = \frac{n}{2}t_n(x) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{t_n(\theta_k + x)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}},$$

$$t'_n(x) = -\frac{n}{2}t_n^*(x) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{t_n^*(\theta_k + x)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}.$$

49. Докажите неравенства Сегё

$$\|t'_n(x)\| \leq n\|t_n^*(x)\|, \quad \|t'_n(x)\|_p \leq n\|t_n^*(x)\|_p.$$

Они обращаются в равенство только при  $t_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ .

УКАЗАНИЕ. Случай  $p = \infty$ . Применяя второе тождество задачи 48 и первое равенство задачи 27, имеем

$$|t'_n(x)| \leq \frac{n}{2}\|t_n^*(x)\| + \frac{\|t_n^*(x)\|}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = n\|t_n^*(x)\|.$$

Случай  $1 \leq p < \infty$  рассматривается аналогично, но надо использовать неравенство Минковского.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965 (переиздано УРСС, 2007).
- [2] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшие приближения непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.-М.: ОНТИ, 1937.
- [3] Бернштейн С. Н. Сочинения. М.: АН СССР. Т. 1, 1952. Т. 2, 1954.
- [4] Гашков С. Б. О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля с фиксированным средним коэффициентом // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 56–68.
- [5] Гашков С. Б. Проблема Чебышева и тригонометрические многочлены // Квант. № 6. 1990.
- [6] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [7] Кохась К. П. Сумма обратных квадратов // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 142–163.
- [8] Лебедев Н. А., Смирнов В. И. Конструктивная теория функций комплексной переменной. М.: Физматгиз, 1964.

- [9] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [10] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.
- [11] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [12] *Тихомиров В. М.* Теория приближений. М.: МГУ, 1976.
- [13] *Харди Г. Х., Литтлвуд Д. И., Поля Д.* Неравенства. М.: URSS, 2008.
- [14] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы арифметики и алгебры. М.: Физматлит, 2001.
- [15] *Яглом И. М., Яглом А. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.: URSS, 2010.
- [16] *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. Springer-Verlag, 1995.
- [17] *Hobson E. W.* A treatise on plane trigonometry. Cambridge: University Press, 1925.

# Итерации квадратных радикалов и косинусы дуг, соизмеримых с окружностью

Н. Н. Осипов

Этой небольшой заметкой мы хотим обратить внимание читателя на некоторые интересные связи между алгеброй, тригонометрией и теорией чисел. Хорошо известно, например, что корни кубического уравнения

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами  $a$ ,  $b$  в так называемом *неприводимом случае* могут быть записаны в тригонометрическом виде. Эта связь алгебры с тригонометрией становится более глубокой, если коэффициенты уравнения (1) считать рациональными. Здесь можно получить примеры, когда корни совсем просто выражаются через тригонометрические функции — они являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами косинусов дуг, соизмеримых с окружностью (т. е. чисел вида  $\cos(2\pi k_i/m)$  с целыми  $k_i$  и фиксированным натуральным  $m$ )<sup>1)</sup>. Более того, иногда эти линейные комбинации косинусов могут иметь весьма специальный вид — здесь в игру вмешивается уже теория чисел. Рассказать об этом и является основной целью заметки.

## ПАРА ИЗВЕСТНЫХ ПРИМЕРОВ

Сначала напомним читателю две хорошо известные (и, на первый взгляд, стандартные) алгебраические задачи с совершенно неожиданными решениями и красивыми ответами.

Первый пример — это одна из задач, предлагавшихся на V Соросовской олимпиаде в 1998 году.

ПРИМЕР 1. Требуется решить уравнение  $\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x$ .

<sup>1)</sup> Как следствие, возникают изящные числовые тождества типа тождеств Рамануджана (см., например, [6]).

Удивительно, но единственным корнем этого иррационального уравнения оказывается число  $x = 2 \cos(2\pi/9)$ .

Проще всего обнаружить это можно с помощью специальной *тригонометрической* замены неизвестного. А именно, так как  $0 \leq x \leq 2$ , можно положить

$$x = 2 \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{2+x} &= 2 \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \sqrt{2-\sqrt{2+x}} &= 2 \sin \frac{\varphi}{4} = 2 \cos \frac{2\pi-\varphi}{4}, \\ \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} &= 2 \cos \frac{2\pi-\varphi}{8}, \end{aligned}$$

и наше уравнение примет вид

$$\cos \frac{2\pi-\varphi}{8} = \cos \varphi.$$

Отсюда легко находим  $\varphi = 2\pi/9$ .  $\square$

Тот же трюк с тригонометрической заменой помогает и в следующем примере.

**ПРИМЕР 2.** Речь идёт о решении системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ y^2 - z = 2, \\ z^2 - x = 2. \end{cases}$$

Казалось бы, что здесь необычного? Однако, рассуждая стандартно (т.е. исключая неизвестные), мы получим уравнение восьмой степени:

$$((x^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 = x. \quad (3)$$

Снова будем искать корни этого уравнения, имеющие вид (2), где теперь  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Имеем

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= 2 \cos 2\varphi, & (x^2 - 2)^2 - 2 &= 2 \cos 4\varphi, \\ ((x^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 &= 2 \cos 8\varphi, \end{aligned}$$

поэтому уравнение принимает вид  $\cos 8\varphi = \cos \varphi$  или, после преобразований,

$$\sin \frac{9\varphi}{2} \sin \frac{7\varphi}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\varphi \in \Phi = \left\{ 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7} \right\}.$$

Таким образом, мы нашли восемь различных корней уравнения (3), а значит, это и есть все корни этого уравнения. Теперь все решения исходной системы можно представить в виде

$$(x, y, z) = (2 \cos \varphi, 2 \cos 2\varphi, 2 \cos 4\varphi), \quad \text{где } \varphi \in \Phi. \quad \square$$

...КОТОРЫЕ ХОТЕЛОСЬ БЫ ОБОБЩИТЬ

Прежде чем перейти к обобщениям, сделаем несколько наблюдений.

Избавление от радикалов в примере 1 также приводит к уравнению (3). Левую часть этого уравнения можно разложить на множители и получить квадратное уравнение и два кубических уравнения:

$$\text{а) } x^3 - 3x + 1 = 0, \quad \text{б) } x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Корни каждого из уравнений а)–б) имеют красивую тригонометрическую форму (2), причём, как можно проверить,

$$\varphi \in \begin{cases} \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right\} & \text{для уравнения а),} \\ \left\{ \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \right\} & \text{для уравнения б).} \end{cases}$$

Кстати, добраться до этой формы в случае уравнения а) можно напрямую — в лоб применив *формулу Кардано*. Уравнение б) более хитрое, здесь нужны дополнительные трюки.

Пример 1 можно было бы дать в более экзотическом виде — как равенство

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2 \cos \frac{2\pi}{9},$$

где набор знаков (+, −, +) периодически повторяется. *Бесконечный вложенный радикал* в левой части следует понимать как *предел* последовательности конечных вложенных радикалов<sup>2)</sup>. В данном случае этот предел оказывается равным одному из корней уравнения а). Можно указать аналогичное равенство, в котором участвует один из корней уравнения б), например

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}. \quad (4)$$

<sup>2)</sup> Вопрос о существовании предела в подобного рода конструкциях заслуживает отдельного внимания и разбирается, например, в брошюре [3]. Мы не будем на этом останавливаться.

Есть ли другие примеры подобных равенств? Что за тригонометрические выражения могут оказаться в правой части и можно ли выявить какие-нибудь закономерности?

В этой связи вспомним одно хрестоматийное равенство: если  $a > 0$ , то

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Здесь правая часть есть корень квадратного уравнения  $x^2 - x - a = 0$ . Если  $a$  рационально, то этот корень при желании также можно записать в тригонометрической форме. Это делается на основе формулы для значения *квадратичной суммы Гаусса*

$$g(p) = \sum_{k=0}^{p-1} \left( \cos \frac{2\pi k^2}{p} + i \sin \frac{2\pi k^2}{p} \right),$$

где  $p$  — нечётное простое число (см. [1, стр. 98]):  $g(p) = \sqrt{p}$  при  $p \equiv 1 \pmod{4}$  и  $g(p) = i\sqrt{p}$  при  $p \equiv -1 \pmod{4}$ <sup>3)</sup>. Так, например, при  $a = 1$  получим

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5},$$

однако при других  $a$  тригонометрическое выражение справа будет довольно громоздким и не сможет конкурировать с простым алгебраическим выражением  $(1 + \sqrt{1 + 4a})/2$ .

В случае корней кубических уравнений такой альтернативы нет. Так, если уравнение б) решать по формуле Кардано, то в правой части равенства (4) появится малосимпатичное выражение типа

$$\frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \left( \frac{\arccos(\sqrt{7}/14)}{3} \right) - \frac{1}{3}$$

с обратными тригонометрическими функциями.

## НОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Возьмём целое число  $a \geq 2$  и рассмотрим бесконечный вложенный радикал

$$R(a, e_1, e_2, e_3) = \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 \sqrt{\dots}}}}}}}$$

<sup>3)</sup> На самом деле эта формула справедлива для любого нечётного натурального числа  $p$ , но основная трудность в доказательстве содержится именно в случае простого  $p$ .

с повторяющимся набором  $(e_1, e_2, e_3)$  знаков  $e_i \in \{+, -\}$ . Будем считать, что этот набор отличен от  $(+, +, +)$  и  $(-, -, -)$ . Число  $R(a, e_1, e_2, e_3)$  является единственным корнем уравнения

$$x = \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 x}}}.$$

Очевидно, этот корень находится среди корней уравнения

$$((x^2 - a)^2 - a)^2 - (a + e_3 x) = 0.$$

Обозначим  $t = e_3 x$ . Имеем

$$((t^2 - a)^2 - a)^2 - (a + t) = (t^2 - t - a)F(t),$$

где *дискриминант* многочлена  $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$  равен

$$D(F) = (16a^2 - 4a + 7)^2(4a - 7)^3.$$

Число  $D(F)$  будет точным квадратом при  $a = a_n$ , где

$$a_n = n^2 - n + 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для  $a = a_n$  многочлен  $F(t)$  допускает разложение

$$F(t) = f_n(t)g_n(t),$$

где кубические многочлены  $f_n(x)$  и  $g_n(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1, \\ g_n(t) &= t^3 - (n - 1)t^2 - (n^2 + 2)t + n^3 - n^2 + 2n - 1. \end{aligned}$$

Поскольку  $g_n(t) = f_{1-n}(t)$ , можно рассматривать только семейство многочленов  $f_n(t)$ . Таким образом,

$$R(a_n, e_1, e_2, e_3) = e_3 t^*,$$

где  $t^*$  — корень либо  $f_n(t)$ , либо  $f_{1-n}(t)$ . Более точно, при  $n \geq 1$  набор чисел

$$R(a_n, -, -, +), \quad -R(a_n, -, +, -), \quad -R(a_n, +, -, -)$$

является набором корней  $f_n(t)$ , а набор чисел

$$-R(a_n, +, +, -), \quad R(a_n, +, -, +), \quad R(a_n, -, +, +)$$

есть набор корней  $f_{1-n}(t)$ .



ТЕОРЕМА 1. При любом  $n \in \mathbb{Z}$  многочлен  $f_n(t)$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что уравнение

$$t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1 = 0$$

неразрешимо в целых числах  $t, n$ . Поскольку старшая однородная часть

$$t^3 + nt^2 - n^2t - n^3 = (t - n)(t + n)^2$$

разлагается на множители, можно было бы применить метод Рунге [5]. Но здесь ещё проще: легко видеть, что левая часть уравнения всегда нечётна.  $\square$

Имеем

$$D(f_n) = (4n^2 - 6n + 9)^2,$$

поэтому группа Галуа кубического многочлена  $f_n(t)$  есть  $A_3$  [4, стр. 227], а значит, является абелевой. По теореме Кронекера — Вебера (см., например, [2, стр. 357]) корни многочлена  $f_n(t)$  могут быть выражены через косинусы дуг, соизмеримых с окружностью. Но при каких условиях эти выражения можно указать явно? Ниже мы предьявим некоторую серию значений  $n$ , для которых это возможно.

Для простого числа  $p \equiv 1 \pmod{3}$  рассмотрим кубическую сумму Гаусса

$$G(p, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos \frac{2\pi \varepsilon k^3}{p}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$ . Предположим, что число

$$p_n = 4n^2 - 6n + 9$$

является простым. Тогда все корни  $f_n(t)$  суть числа

$$\frac{\pm G(p_n, \varepsilon_n^j) - n}{3}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где  $\varepsilon_n$  — кубический невычет по модулю  $p_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим утверждением (см. [1, стр. 164]): если для простого  $p \equiv 1 \pmod{3}$  имеет место представление

$$4p = A^2 + 27B^2, \quad (5)$$

где  $A \equiv 1 \pmod{3}$ , то числа  $G(p, \varepsilon^j)$  ( $j = 0, 1, 2$ ), где  $\varepsilon$  — кубический невычет по модулю  $p$ , являются корнями уравнения

$$x^3 - 3px - Ap = 0.$$

I. Пусть  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . В этом случае для  $p = p_n$  имеем представление (5) при  $A = 4n - 3$ ,  $B = 1$ . Осталось заметить, что при  $x = 3t + n$  верно тождество  $x^3 - 3px - Ap = 27f_n(t)$ .

II. Пусть  $n \equiv -1 \pmod{3}$ . В этом случае для  $p = p_n$  справедливо представление (5) при  $A = -4n + 3$ ,  $B = 1$ . Теперь при  $x = -3t - n$  верно тождество  $x^3 - 3px - Ap = -27f_n(t)$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 3. В условиях предыдущей теоремы можно взять  $\varepsilon_n = 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим следующий факт (см. [1, стр. 148]): число 2 является кубическим вычетом по модулю  $p$  тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$p = C^2 + 27D^2. \quad (6)$$

Кроме того, известно, что в представлении (5) числа  $|A|$  и  $|B|$  определены однозначно. Для  $p = p_n$  число  $|A| = |4n - 3|$  нечётно, поэтому представление (6) невозможно.  $\square$

Продемонстрируем примеры равенств, которые можно получить с помощью доказанных теорем для значений  $n = -4$  и  $n = 5$ :

$$\sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \dots}}}}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{96} \cos \frac{2\pi k^3}{97},$$

$$\sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \dots}}}}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{78} \cos \frac{2\pi k^3}{79}.$$

### ...И НОВЫЕ ЗАДАЧИ

Во-первых, в условиях теоремы 2 хотелось бы установить, какому именно бесконечному вложенному радикалу  $R(a_n, e_1, e_2, e_3)$  соответствует каждый корень  $f_n(t)$ . По-видимому, это сложный вопрос, связанный с *проблемой Куммера* (см. [1, стр. 164]).

Во-вторых, было бы интересно найти ещё какие-нибудь серии значений  $n$ , для которых корни  $f_n(t)$  допускают явные выражения через косинусы. Вероятно, при поиске таких серий нужно учитывать разложение дискриминанта  $D(f_n)$  на простые множители (мы рассмотрели случай, когда дискриминант есть квадрат простого числа). Здесь могут быть полезны компьютерные эксперименты. Например, следующее равенство ( $n = 631$ ), найденное с помощью компьютера, можно попытаться правильно сформулировать и затем обобщить:

$$\sqrt{397532 + \sqrt{397532 - \sqrt{397532 - \sqrt{397532 + \sqrt{397532 - \sqrt{397532 - \dots}}}}}} =$$

$$= 190 + 610 \cos \frac{\pi}{7} - 488 \cos \frac{3\pi}{7}.$$

Здесь дискриминант равен  $(7 \cdot 61^3)^2$ .

Во-вторых, можно ставить подобные задачи для других «периодических» бесконечных вложенных радикалов.

Некоторые правдоподобные гипотезы и интересные примеры по теме статьи заинтересованный читатель может найти по ссылке [7].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
- [2] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
- [3] *Вавилов В. В.* Итерации радикалов. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, «Самобразование», 2000.
- [4] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [5] *Осипов Н. Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. № 1. С. 64–69.
- [6] *Прасолов В. В.* Тождества Рамануджана // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 104–107.
- [7] <http://dxdy.ru/topic78185.html>.

# Бильярдные шары вычисляют $\pi$

Г. А. Гальперин

Подсчёт числа соударений в простой динамической системе с двумя бильярдными шарами позволяет вычислить число  $\pi$  с любой заданной точностью. Описание этой изобретённой автором системы приводилось в его заметке «Бильярдная динамическая система для числа  $\pi$ » [3]. В настоящей статье приводится доказательство этого утверждения и обсуждается «тонкая структура» числа  $\pi$ .

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В самом начале замечательной книги В. И. Арнольда о дифференциальных уравнениях [2] можно найти следующее высказывание: «уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу»<sup>1)</sup>. Далее указанная задача формулируется и решается. Результат данной статьи подкрепляет высказывание Арнольда о полезности фазового пространства на примере ещё одной задачи — задачи вычисления числа  $\pi$  с любой точностью.

Существует много способов вычисления  $\pi$  с хорошей точностью; некоторые из них известны с античных времён, другие придуманы относительно недавно. Эти методы используют различные, подчас довольно элегантные идеи [8]: *геометрические* (вписывание и описывание правильных многоугольников вокруг окружности даёт, в частности, известные в античности значения  $3\frac{1}{7}$  и  $3\frac{10}{71}$  для  $\pi$ ); *теоретико-числовые* (теория непрерывных дробей позволяет найти обыкновенную дробь  $\frac{355}{113}$  — простейшую аппроксимацию числа  $\pi$  с точностью до одной миллионной); *аналитические* (с использованием рядов, интегралов и бесконечных произведений); и многие другие, требующие использования современных электронных устройств — мощных калькуляторов или компьютеров.

Имеется также любопытный *экспериментальный* метод для нахождения  $\pi$ , открытый французским математиком Жоржем-Луи Леклерком

---

<sup>1)</sup> Фазовое пространство понимается обобщённо, как пространство состояний системы. В этой статье мы пользуемся понятием *конфигурационного* пространства, состоящего из положений точек, но не включающего их скоростей.

де Бюффеном (1707–1788) в статье «Мемуар об игре franc-carreau»<sup>2)</sup> [9], опубликованной в 1777 году<sup>3)</sup>. Бюффон рассматривал случайные бросания иглы длины  $L = D/2$  на решётку параллельных линий с шагом  $D$ . Иглу бросают  $N$  раз и подсчитывают число пересечений  $R$  с линиями решётки (заметим, что, поскольку игла короче, чем расстояние между двумя последовательными линиями, она каждый раз либо пересекает ровно одну линию, либо не пересекает ни одной). Частота появления пересечений с линиями равна  $R/N$ ; с другой стороны, можно показать, что вероятность того, что игла пересекает некоторую линию решётки, равна  $1/\pi$  (для иглы произвольной длины  $L$  вероятность равна  $2L/(\pi D)$ ). Сравнивая частоту и вероятность пересечений, мы заключаем, что  $\pi$  приблизительно равняется  $N/R$  — отношению числа попыток к числу зафиксированных пересечений с линиями плоскости. Разумеется, увеличение точности достигается за счёт увеличения числа попыток<sup>4)</sup>.

Читатель может поэкспериментировать с «иглой Бюффона» и найти хорошее приближение для  $\pi$  на интернет-сайте [13]. Он вскоре убедится, что требуется достаточно много бросаний, чтобы получить более-менее хорошую оценку для  $\pi$ ; к тому же необходимо обеспечить условия, при которых бросания являются *равновероятными*. Недостаток метода Бюффона связан с его вероятностной природой и невозможностью гарантировать получение какой-либо заданной точности в вычислениях  $\pi$  с использованием этого метода.

В этой статье мы представим абсолютно новую идею вычисления числа  $\pi$ , которую можно назвать *бильярдной*. Как и метод Бюффона, наш метод является экспериментальным и совершенно не требует использования каких-либо современных устройств. Однако, в отличие от метода Бюффона, этот метод полностью *детерминистический*: единственное, что нужно сделать — это «запустить» динамическую систему, состоящую всего из двух бильярдных шаров и абсолютно упругой преграды (стенки), подсчитать общее число соударений  $\Pi$  в такой системе и затем выписать это число на (возможно, достаточно длинном!) листе бумаги. Древние греки так именно и поступили бы; в наш же компьютерный век процедуру подсчёта числа ударов в описанной динамической системе естественно доверить компьютеру — и на этом пути даже создать наглядный мультфильм. (См. вебсайт [14] под названием «Billiard balls count  $\pi$ ».)

---

<sup>2)</sup> Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, *Le Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau*.

<sup>3)</sup> По другим данным, статья опубликована в 1733 году.

<sup>4)</sup> Элементарное доказательство этого утверждения, без вычислений, имеется в книге В. И. Арнольда [1]. Его идею он позаимствовал из книги Я. И. Перельмана [5].

Это выписанное на листе целое число будет равно

$$314159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$$

Оно всегда начинается с цифры 3 и содержит первые  $N$  десятичных цифр числа  $\pi = 3,14159265 \dots$ , которые требуется узнать.

С другой стороны, наш метод чисто теоретический и, по всей вероятности, никогда не будет использоваться как практический способ для нахождения аппроксимаций числа  $\pi$ . Однако он является простейшим среди всех известных методов (начиная с древних греков!). Более того, этот метод даёт возможность вычислить  $\pi$  с любой точностью, т. е. позволяет найти каждую отдельную цифру<sup>5)</sup> числа  $\pi$ .

Чтобы получить точность в  $N$  десятичных знаков, необходимо лишь взять шары с соответствующими массами; *отношение масс должно быть выбрано*<sup>6)</sup> как  $N$ -я степень числа 100.

## § 2. ПРОЦЕДУРА

Рассмотрим два шара как материальные точки с массами  $m$  и  $M$ . (Таким образом, размеры шаров и их «округлость» во внимание вообще не принимаются; название «шары» мы используем для наглядности изложения.) Шары будут перемещаться вдоль положительной  $x$ -полуоси и сталкиваться друг с другом при каждой встрече. Кроме того, меньший шар  $m$  будет отражаться от вертикальной стенки, расположенной в точке  $x = 0$ .

Каждое столкновение в этой системе, как между шарами, так и шара  $m$  со стенкой, считается *абсолютно упругим*. Это означает, что столкновение между шарами удовлетворяет двум законам механики: закону сохранения *импульса* и закону сохранения *кинетической энергии*. Кроме того, при отражении малого шара от стенки его вектор скорости меняется на противоположный. Другими словами, стенку можно представлять себе как неподвижный бильярдный шар бесконечной массы.

Будем следовать описанной ниже ПРОЦЕДУРЕ.

1. Пусть  $N$  — фиксированное натуральное число. Возьмём два бильярдных шара с отношением масс  $M/m = 100^N$ .

<sup>5)</sup> Отметим сразу, что вычисление  $\pi$  с заданной точностью — это не совсем то же самое, что нахождение каждой отдельной цифры  $\pi$ . В параграфах 2–8 мы доказываем, что шары «вычисляют»  $\pi$  с любой заданной точностью, а в оставшихся параграфах 9–11 отдельно обсуждаем интригующий вопрос о «тонкой структуре» числа  $\pi$  — о вычислении *всех его цифр* в десятичной записи.

<sup>6)</sup> Как вскоре станет ясно читателю, число  $100 = 10^2$  берётся лишь потому, что мы находим *десятичное* представление  $\pi$ . Для представления  $\pi$  в системе счисления с основанием  $b$  необходимо положить  $M/m = b^{2N}$ .

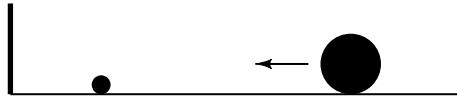


Рис. 1. Большой шар  $M$  движется в сторону малого шара  $m$

2. Поместим меньший шар  $m$  между стенкой, расположенной в начале координат, и ббльшим шаром  $M$ .
3. Толкнём<sup>7)</sup> большой шар с произвольной скоростью по направлению к малому (см. рис. 1).
4. Сосчитаем полное число ударов в системе: число столкновений между шарами плюс число отражений малого шара от стенки.
5. Запишем число  $\Pi$  ударов, найденное в пункте 4, на листе бумаги.

(Заметим, что нам неизвестно априори, будет ли число ударов конечным или бесконечным; мы докажем, что оно всегда конечно.)

### § 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

Для различных значений  $N$  предшествующая процедура даёт различные значения числа  $\Pi$  (некоторые из которых могли бы оказаться бесконечными). Таким образом,  $\Pi = \Pi(N)$  является функцией показателя степени  $N$  числа  $100^N$ .

Рассмотрим простейший случай  $N = 0$ , который соответствует равенству масс:  $m = M$ . Законы сохранения приводят к следующему поведению системы: если один из шаров покоится, а другой сталкивается с ним, то после столкновения неподвижный шар начинает двигаться в точности с той же скоростью и в том же направлении, как двигался до столкновения второй шар, тогда как второй шар останавливается. Это выглядит так, будто движущийся шар проходит сквозь неподвижный без изменения скорости и какого либо влияния на неподвижный шар<sup>8)</sup>.

<sup>7)</sup> Величина скорости не важна: если правильно изменить масштаб времени, то быстро движущийся большой шар станет двигаться медленно в новом масштабе. Изменение масштаба времени меняет энергию всей системы, что эквивалентно изменению масштаба энергии. Как мы увидим позднее, изменение масштаба времени сохраняет параллельность развёртки конфигурационной траектории с осью  $Oy$  в конфигурационном пространстве и поэтому не меняет числа пересечений развёрнутой траектории с границей развёртки конфигурационного пространства.

<sup>8)</sup> На самом деле, то же самое наблюдается, когда оба одинаковых шара движутся: после столкновения они просто обмениваются скоростями; или, что эквивалентно, проникают друг сквозь друга без какого-либо взаимного влияния. Это рассуждение поз-

Затем движущийся шар ударяется о стенку и отражается от неё. Скорость шара меняется на противоположную, после чего он проходит через «прозрачный» неподвижный шар и улетает на бесконечность.

Мы видим, что общее число соударений в нашей системе с  $m = M$  равно 3: два столкновения и одно отражение. Следовательно,  $\Pi = \Pi(0) = 3$ .

Заметим, что цифра 3 — это первая цифра числа  $\pi$ . Далее мы убедимся, что число соударений  $\Pi$  равно 31 (первые два знака  $\pi$ ) и 314 (три знака  $\pi$ ) для случаев  $M = 100m$  и  $M = 100^2m$  соответственно, т. е.  $\Pi(1) = 31$  и  $\Pi(2) = 314$ . Ну а если  $M = 100^{50}m$ , то компьютер напечатает астрономическое число  $\Pi(50)$ , первые 50 цифр которого выписаны в теореме 1 и совпадают с первыми 50 цифрами числа  $\pi$ .

#### § 4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**ТЕОРЕМА 1.** *Количество соударений  $\Pi = \Pi(N)$  в динамической системе, описанной в процедуре, всегда конечно и выражается числом с  $N+1$  знаками  $\Pi(N) = 314159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$ , где первые  $N$  цифр, идущие после цифры 3, совпадают с первыми  $N$  десятичными знаками числа  $\pi$ .*

Остаток статьи посвящён доказательству этого утверждения.

#### § 5. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО СИСТЕМЫ. ПОВЕДЕНИЕ КОНФИГУРАЦИОННОЙ ТОЧКИ

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  шары  $m$  и  $M$  расположены в точках  $x_0$  и  $y_0$  на горизонтальной прямой  $\ell$ . В ходе перемещения шаров их координаты  $x$  и  $y$  меняются во времени  $t$ , так что  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$  (см. рис. 2).

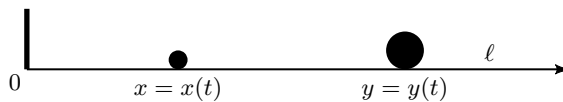


Рис. 2. Координаты шаров

воляет мгновенно решить следующую достаточно сложную (на первый взгляд) задачу:  $n$  одинаковых шаров движутся на некотором расстоянии друг от друга с одинаковыми скоростями вдоль горизонтальной прямой слева направо, а  $m$  других таких же шаров движутся аналогичным образом с одинаковыми скоростями (возможно, отличными от скоростей «левых»  $n$  шаров) вдоль той же прямой справа налево; вопрос: сколько столкновений произойдёт в этой системе? После всего сказанного ответ очевиден: общее число ударов в системе будет  $mn$ , поскольку можно считать, что каждый шар из первой группы проникает беспрепятственно сквозь каждый шар второй группы.



В частности,  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = y_0$ . Заметим, что в каждый момент времени  $t$  малый шар расположен между стенкой и большим шаром  $M$ . Следовательно,

$$0 \leq x(t) \leq y(t) \quad \forall t \geq 0.$$

В момент отражения малого шара  $m$  от стенки этот шар всегда расположен в начале координат:  $x(t) = 0$ .

Рассмотрим упорядоченную пару  $(x(t), y(t))$  позиций шаров. Её можно представлять себе как точку на  $xy$ -плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Такая точка называется *конфигурационной точкой*, а о множестве всех конфигурационных точек говорят как о *конфигурационном пространстве*<sup>9)</sup>. (См. книгу [4].)

Конфигурационное пространство для рассматриваемой динамической системы из двух шаров представляет собой угол  $45^\circ$  с его внутренними точками, образованный осью  $y$  и биссектрисой первого квадранта плоскости  $xy$ , т. е. лучом  $\{(x, y) \mid x = y, x \geq 0\}$  (см. рис. 3).

Таким образом, наряду с исходной («физической») системой двух шаров на полупрямой, мы будем рассматривать также другую («математическую») систему — математическую «тень» или «образ» исходной системы. Обе эти системы называются *динамическими системами*; они являются различными формальными описаниями одного и того явления. В наших рассуждениях мы будем свободно переходить от одного описания к другому<sup>10)</sup>.

Рассмотрим поведение фазовой точки  $P(t) = (x(t), y(t))$ .

**Шаг 0 (до первого столкновения).** В начальный момент  $t = 0$  конфигурационная точка  $P$  имеет координаты  $(x_0, y_0)$ . С началом отсчёта времени точка  $P = P(t)$  начинает двигаться в плоскости  $Oxy$ . Малый шар до первого столкновения неподвижен, следовательно,  $x$ -координата движущейся точки  $P$  не меняется. С другой стороны, большой шар  $M$  движется в сторону малого шара  $m$ , а следовательно, его координата  $y$  уменьшается, оставаясь, однако, большей чем  $x_0$  в течение всего отрезка

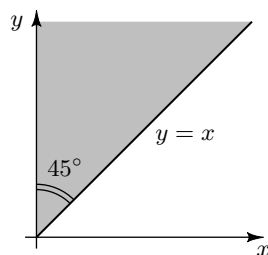


Рис. 3. Конфигурационное пространство системы

<sup>9)</sup> Конфигурационное пространство может иметь размерность как меньшую трёх, так и большую или равную 3; мы сохраняем стандартный термин «пространство» даже для случая двумерной плоскости.

<sup>10)</sup> Эта идея часто используется в математических исследованиях. Заданная модель подменяется её математическим кодом, который формально описывает модель в новых терминах. Подобное описание помогает исследовать проблему в целом. Другим ярким примером является игра в шахматы и её символическое описание в буквенно-цифровой форме.

времени перед первым столкновением. Следовательно, конфигурационная точка  $P$  движется строго вниз к оси  $x$  (параллельно оси  $y$ ) вплоть до первого столкновения шаров.

Шаг 1 (*первое столкновение шаров*). Затем большой шар сталкивается с малым; в этот момент времени  $t_1$  мы имеем  $y(t_1) = x_0$ . Далее шары отскакивают друг от друга, и начинается следующая стадия движения.

Шаг 2 (*между первым столкновением и первым отражением*). В момент времени  $t_1$  оба шара начинают двигаться вдоль горизонтальной прямой  $\ell$ . Малый шар движется с некоторой скоростью  $u$ , а большой — со скоростью  $v$ , причём выполняются законы сохранения импульса и энергии:

$$tu + Mv = MV, \quad \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2}, \quad (1)$$

где  $V$  — начальная (возможно, весьма большая!) скорость шара  $M$ . Мы не станем решать эту систему уравнений относительно переменных  $u$  и  $v$ . Наша цель состоит лишь в том, чтобы описать поведение фазовой точки *после* первого соударения.

Возвращаясь к исходной динамической системе и пользуясь системой уравнений (1), мы приходим к заключению, что после первого столкновения шар  $t$  будет очень быстро двигаться в сторону стенки (поскольку большой шар сообщил ему большой импульс); шар  $M$  также продолжит своё движение в сторону стенки, но будет двигаться несколько медленнее, чем раньше. Обе координаты  $x(t)$  и  $y(t)$  конфигурационной точки  $P$  убывают на временном отрезке между первым столкновением и отражением шара  $t$  от стенки. Следовательно, конфигурационная точка  $P(t)$  движется

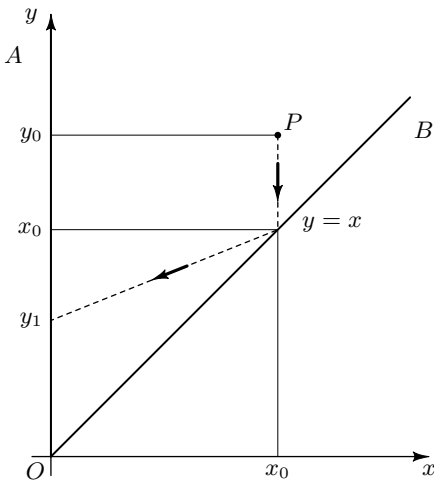


Рис. 4. Движение до и после первого столкновения шаров

вдоль прямолинейного отрезка внутри угла  $AOB$ , где  $O$  — начало системы координат,  $OA$  — вертикальная полуось  $y$ , а  $OB$  — луч  $y = x$ , исходящий из начала координат и лежащий в первом квадранте. Точка  $P(t)$  перемещается со стороны  $OB$  на сторону  $OA$ , приближаясь к началу системы координат  $O$  (см. рис. 4).

Шаг 3 (*отражение шара  $t$  от стенки*). Несложно проверить, что малый шар  $t$  движется после первого столкновения быстрее, чем большой шар, т. е.  $u > v$ .

В самом деле, заметим для начала, что  $v < V$ . Это объясняется тем, что большой шар передал некоторый импульс малому шару и поэтому скорость  $v$  большого шара оказывается меньше исходной.

Умножая первое уравнение системы (1) на  $V$  и вычитая из полученного равенства удвоенное второе равенство (чтобы избавиться от двоек в знаменателях), получаем

$$\begin{array}{r} mu \cdot V + Mv \cdot V = MV^2 \\ - \\ mu^2 + Mv^2 = MV^2 \\ \hline mu(V - u) + Mv(V - v) = 0 \\ \downarrow \\ Mv(V - v) = mu(u - V). \end{array}$$

Поскольку  $V - v > 0$ ,  $Mv > 0$  и  $mu > 0$ , мы приходим к выводу, что  $u - V > 0$ , т. е.  $u > V$ . Таким образом,  $u > V > v$ <sup>11)</sup>.

Далее, шар  $m$  достигает стенки в некоторый момент  $t_2$ , при этом большой шар все ещё продолжает своё движение по направлению к стенке. В момент  $t_2$  малый шар отражается от стенки, его скорость мгновенно изменяется с  $u$  на  $-u$ ; импульс шара становится равным  $-mu$ , тогда как его энергия остаётся прежней:

$$\frac{m(-u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2}.$$

Поэтому угол падения  $\varphi$  и угол отражения  $\psi$ , образованные отрезками траектории и осью  $y$ , равны друг другу:  $\varphi = \psi$  (см. рис. 5).

**Шаг 4** (после первого отражения от стенки). После первого отражения точка  $P(t)$  движется от оси  $y$  по прямолинейному отрезку к диагонали  $y = x$ , приближаясь к началу координат  $O$ : её  $x$ -координата увеличивается, а  $y$ -координата уменьшается. Это соответствует тому, что шары сближаются после отражения шара  $m$  от стенки.

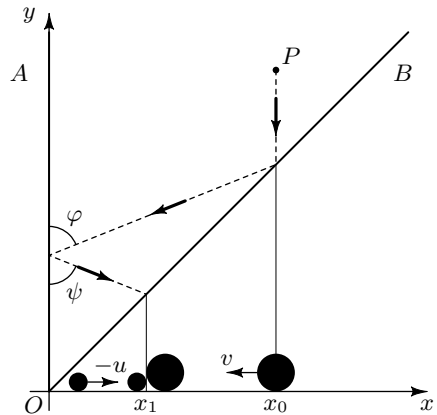


Рис. 5. Равенство  $\varphi = \psi$  и второе столкновение шаров

<sup>11)</sup> Для упрощения мы рассматриваем скорость шара, движущегося справа налево, как положительную величину, а при его движении слева направо считаем скорость отрицательной. Вместо векторов скорости можно оперировать просто с числами — с абсолютными значениями скоростей.

Важно отметить, что поскольку стенка не рассматривается как часть системы шаров, полный импульс системы меняется при отражении от стенки с величины  $tu + Mv = MV$  на  $-tu + Mv$ , тогда как полная энергия остаётся той же  $-MV^2/2$ . Полный импульс системы остаётся неизменным в промежутке времени между двумя последовательными отражениями от стенки.

Шаг 5 (второе столкновение шаров). В тот момент, когда точка  $P$  достигает стороны  $y = x$  фазового угла  $AOB$ , происходит второе столкновение шаров. Пусть оно происходит в точке прямой  $\ell$  с координатой  $x_1$ . Скорости шаров изменяются в результате столкновения; если  $u_1$  и  $v_1$  суть новые значения скоростей, то выполняются равенства

$$tu_1 + Mv_1 = -tu + Mv, \quad \frac{tu_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{tu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$

В силу рассуждений, аналогичных вышеприведённым, мы имеем

$$|u_1| > |v| > |v_1|.$$

Шаги 6, 7, ... После шага 5 повторяется исходная ситуация:

1. Малый шар  $t$  движется со скоростью  $u_1$  в сторону стенки, тогда как большой шар  $M$  меняет свою скорость с  $v$  на  $v_1$ , но, как и ранее, продолжает двигаться в сторону стенки.
2. Малый шар отражается от стенки, в результате чего его скорость меняется с  $u_1$  на  $-u_1$ .
3. Малый шар встречает большой и взаимодействует с ним.

После этого процесс повторяется заново. Такое поведение системы находит отражение в движении конфигурационной точки  $P$  внутри угла (см. рис. 6).

Однако абсолютно неясно, какого рода поведение демонстрирует точка  $P$ :

- (i) приближается ли она к вершине  $O$  конфигурационного угла  $AOB$  бесконечно долго;
- (ii) или же точка  $P$  приближается к вершине  $O$  конечное время и затем удаляется от  $O$ , отражаясь от сторон угла  $AOB$  бесконечно много раз<sup>12)</sup>;

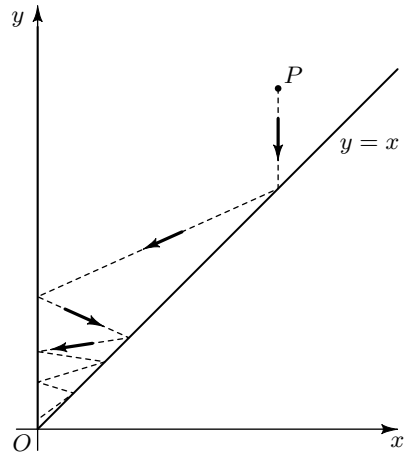


Рис. 6. Конфигурационная траектория

<sup>12)</sup> Кстати говоря, даже если точка  $P$  и будет приближаться к вершине  $O$  конечное время, она могла бы за это конечное время совершить бесконечное число столкновений со сторонами угла  $AOB$ , прежде чем начать удаляться от  $O$ .

(iii) или же, наконец, точка  $P$  совершает в сумме лишь конечное число отражений от сторон угла и, начиная с некоторого момента  $T_0$ , движется равномерно и прямолинейно.

Случаи (i) и (ii) соответствуют *бесконечному* числу соударений в системе, т. е. столкновений между шарами и отражений малого шара от стенки, а случай (iii) — *конечному* числу столкновений и отражений. Теорема утверждает, что реализовываться будет всегда только третий случай, причём полное число соударений в системе будет равно  $\Pi = 314159265 \dots$

## § 6. РЕДУКЦИЯ К ЗАДАЧЕ О БИЛЬЯРДЕ ВНУТРИ УГЛА

Чтобы доказать теорему, мы сведём задачу о движении фазовой точки  $P$  в угле  $AOB$  с раствором  $45^\circ$  к задаче о бильярде внутри некоторого другого угла со специальным раствором  $\alpha$ .

*Бильярдной системой* называется динамическая система, состоящая из области (замкнутой, подобно кругу или квадрату, или открытой, как угол) и точки, движущейся внутри этой области. Точка движется прямолинейно с постоянной скоростью и отражается от границы области по бильярдному (или оптическому) закону: *угол падения равен углу отражения*. Иначе говоря, точка в бильярдной системе ведёт себя как луч света в комнате (области) с зеркальными стенами (границей).

Чтобы перейти к бильярдной задаче, выполним специальное линейное преобразование  $T$  плоскости  $xy$ . Это преобразование было впервые рассмотрено Я. Г. Синаем в книгах [6] и [10]. Матрица преобразования  $T$  в  $xy$ -координатах есть

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \sqrt{M} \end{pmatrix}.$$

Преобразование  $T$  растягивает  $x$ -координату любого вектора в  $\sqrt{m}$  раз и  $y$ -координату — в  $\sqrt{M}$  раз. Введём новые переменные

$$\begin{cases} X = \sqrt{m} \cdot x, \\ Y = \sqrt{M} \cdot y. \end{cases} \quad (3)$$

Линейное преобразование  $T$  отображает угол  $AOB$ ,  $\angle AOB = 45^\circ$ , в угол  $A'O'B'$ ,  $\angle A'O'B' = \alpha$ , где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{m} \cdot x}{\sqrt{M} \cdot y} = \sqrt{\frac{m}{M}},$$

поскольку  $y = x$  для точек луча  $OB$  (см. рис. 7).

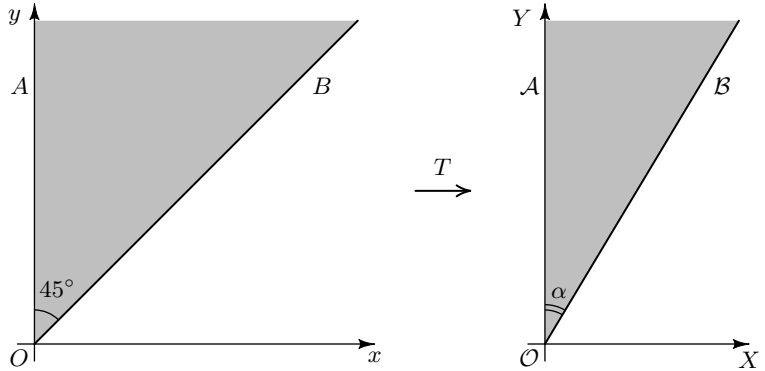


Рис. 7. Линейное преобразование  $T$  конфигурационного пространства

Ломаная, соответствующая траектории конфигурационной точки  $P(x, y)$  внутри угла  $AOB$ , отобразится в ломаную, соответствующую траектории отображённой точки  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(\sqrt{m}x, \sqrt{M}y)$  внутри угла  $AOB$ .

**ЛЕММА 1.** *Поведение новой конфигурационной точки  $\mathcal{P}$  внутри угла  $\alpha$  подчиняется бильярдному закону.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что точке  $P(x, y)$  соответствует вектор скорости  $(u, v) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  в момент времени  $t$  (отличный от времени отражения), то точка  $\mathcal{P}(t)$  имеет в тот же момент времени вектор скорости

$$\mathbf{w} = (\sqrt{m}\dot{x}(t), \sqrt{M}\dot{y}(t)) = (\sqrt{m}u, \sqrt{M}v).$$

Таким образом, линейное преобразование  $T$  конфигурационного пространства  $\{(x, y)\}$  индуцирует то же самое линейное преобразование в пространстве скоростей  $\{(\dot{x}, \dot{y})\}$ .

Рассмотрим следующие два случая: случай 1, когда точка  $\mathcal{P}(X, Y)$  отражается от вертикальной стороны  $X = 0$  угла  $AOB$  (т. е. от оси  $Y$ ), и случай 2, когда точка  $\mathcal{P}(X, Y)$  отражается от наклонной стороны угла  $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ .

**Случай 1: отражение от оси  $Y$ .**

Когда малый шар отражается от стенки, его скорость  $u$  меняется на  $(-u)$ . Тогда вектор  $\mathbf{w}$  переходит в вектор

$$\mathbf{w}' = (\sqrt{m}(-u), \sqrt{M}v),$$

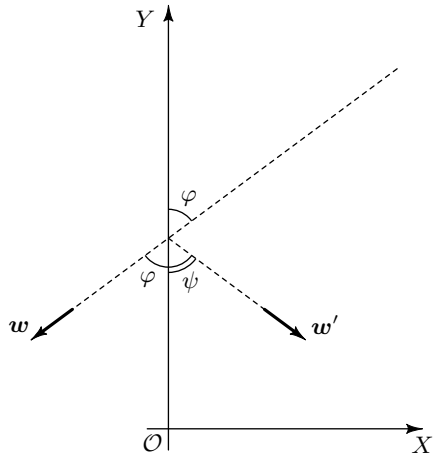


Рис. 8. Отражение от оси  $Y$

что означает выполнение равенства  $\varphi = \psi$  — т. е. бильярдный закон отражения (см. рис. 8).

**Случай 2: отражение от стороны**  $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ . Отражение этого типа соответствуют столкновению шаров в исходной динамической системе. Мы будем рассматривать интервал времени, в течение которого происходит только это столкновение (т. е. интервал времени между двумя последовательными отражениями шара  $m$  от стенки). В течение этого интервала времени система движущихся шаров имеет неизменный импульс, и столкновение шаров не меняет его. Энергия также сохраняется (она постоянна в ходе всего процесса).

Для удобства обозначим импульс  $p$  через  $\text{const}_1$ , а удвоенную энергию  $2E$  — через  $\text{const}_2$ . Предположим, что малый шар имеет скорость  $u$ , а большой шар имеет скорость  $v$ . Система (1) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} mu + Mv = \text{const}_1, \\ mu^2 + Mv^2 = \text{const}_2. \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) скрыта интересная геометрия. А именно рассмотрим постоянный вектор

$$\mathbf{n} = (\sqrt{m}, \sqrt{M})$$

в плоскости  $xy$  (он направлен вдоль прямой  $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ ) и зависящий от времени вектор

$$\mathbf{w} = (\sqrt{m}u, \sqrt{M}v).$$

Тогда систему (4) можно переписать так:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \bullet \mathbf{w} = \text{const}_1, \\ |\mathbf{w}| = \text{const}_2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь « $\bullet$ » — скалярное произведение в плоскости  $xy$ , а « $|\cdot|$ » — евклидова длина вектора. Формулы (5) отражают тот факт, что евклидова метрика заменена на другую риманову метрику — так называемую «метрику кинетической энергии» (в которой квадрат длины вектора  $(u, v)$  есть удвоенная кинетическая энергия  $mu^2 + Mv^2$ ).

В силу равенств

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{w}| \cos \varphi = \text{const}_1,$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{m + M}, \quad |\mathbf{w}| = \text{const}_2$$

мы имеем

$$\cos \varphi = \frac{\text{const}_1}{\text{const}_2} \cdot (m + M)^{-1/2} = \text{const}_3.$$

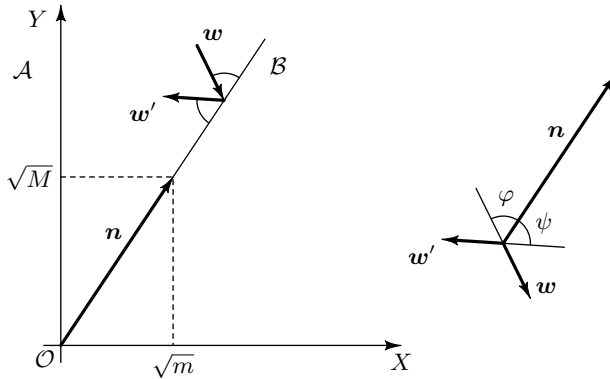


Рис. 9. Отражение от стороны  $OB$  ( $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ )

После отражения точка  $\mathcal{P}$  движется с новой скоростью  $w'$ , удовлетворяющей этой же системе уравнений (5). Поэтому из тех же самых соображений для угла отражения  $\psi$  точки  $\mathcal{P}$  от стороны  $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$  угла  $AOB$  следует равенство (см. рис. 9)

$$\cos \psi = \text{const}_3.$$

Следовательно,

$$\psi = \varphi,$$

и бильярдный закон доказан для этого отражения. Сведение к бильярдной системе внутри угла с раствором  $\alpha$  закончено. Мы будем называть угол  $AOB$  «бильярдным конфигурационным пространством» исходной динамической системы.  $\square$

## § 7. ЧИСЛО БИЛЬЯРДНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ВНУТРИ УГЛА $AOB$

ЛЕММА 2. 1. Максимальное число отражений бильярдной точки внутри угла  $AOB$  по всем возможным бильярдным траекториям конечно.

2. Это число равно  $\pi/\alpha$ , если  $\pi/\alpha$  — целое число, и равно  $[\pi/\alpha] + 1$ , если  $\pi/\alpha$  не является целым (здесь  $[\cdot]$  означает целую часть числа).

3. Если начальный луч бильярдной траектории параллелен одной из сторон угла  $\alpha$ , то полное число отражений для траектории такого вида на единицу меньше максимального (т. е. равно  $\pi/\alpha - 1$  при  $\pi/\alpha \in \mathbb{Z}$  и  $[\pi/\alpha]$ , если  $\pi/\alpha \notin \mathbb{Z}$ ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим развёртку угла  $AOB$  вместе с бильярдной траекторией  $\gamma$  внутри него. Для этого нужно просто отразить угол относительно его сторон и рассмотреть образ траектории  $\gamma$  при этих



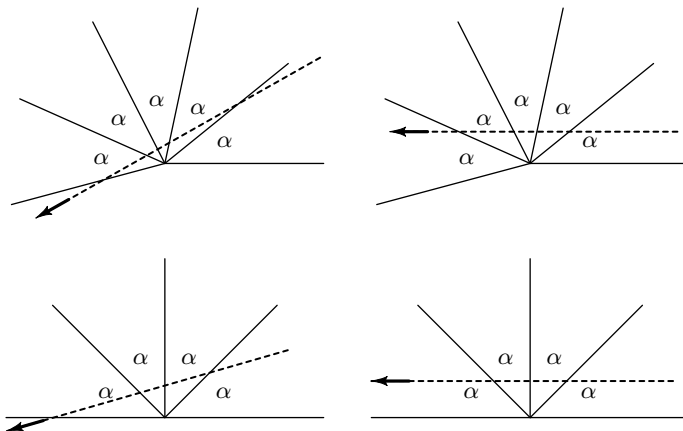


Рис. 10. Развёртка бильярдной траектории

отражениях. Образ траектории представляет собой прямую  $k$ , проходящую через всю последовательность отражённых углов — «коридор» (см. рис. 10).

Прямая  $k$  пересекает, очевидно, лишь конечное число копий угла  $\alpha$  в этом коридоре. Но число пересечений со сторонами отражённых углов в коридоре равно числу отражений траектории  $\gamma$  от сторон исходного угла. Следовательно, число бильярдных отражений конечно. Если  $n$  — максимально возможное число отражений, то либо  $n\alpha = \pi$ , либо  $n\alpha > \pi > (n - 1)\alpha$  (см. рис. 10). В первом случае мы имеем  $n = \pi/\alpha$ , тогда как во втором случае прямая  $k$  не пересекает последнюю сторону угла в коридоре, и, стало быть, число пересечений будет на единицу меньше:  $n = [\pi/\alpha] - 1$ . Если же прямая  $k$  параллельна стороне угла  $\alpha$ , то последнее возможное пересечение со стороной угла исключается. Тем самым лемма доказана.  $\square$

## § 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ: $\Pi = 314159265\dots$

Мы хотели бы обратить внимание читателя на следующую существенную особенность системы «стенка — шар — шар». Движение в этой системе соответствует особому лучу  $r$  на развёртке бильярдного конфигурационного пространства  $\alpha = AOB$ : этот луч должен быть параллелен оси  $Y$  (см. рис. 11).

В самом деле, первый отрезок бильярдной траектории направлен вниз к оси  $X$ , и следовательно, параллелен оси  $Y$ , поскольку малый шар был неподвижен в самом начале процесса. Значит, луч  $k$  — развёртка бильярдной траектории  $\gamma$ , т. е. продолжение первого, вертикального её отрезка, — параллелен оси  $Y$ . Заметим, что указанная параллельность луча  $k$  оси  $Y$  имеет место вне зависимости от значения начальной скорости  $V$  шара  $M$  (смотри сноску к пункту 3 Процедуры).

Таким образом, в соответствии с леммой 2, пункт 2, число отражений от сторон угла  $\alpha$  равно  $[\pi/\alpha]$ , за исключением того случая, когда  $\pi/\alpha$  — целое число. В нашем случае имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{M}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{m \cdot 100^N}} = \operatorname{arctg} 10^{-N}.$$

Для  $N=0$  получаем  $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$  и  $\pi/\alpha = 4 \in \mathbb{Z}$ , так что выполнена лемма 2, пункт 3: число отражений равно  $[4] - 1 = 3$ . Однако в случае  $N \geq 1$  угол  $\alpha = \operatorname{arctg} 10^{-N}$  не может быть представлен в виде  $\pi/k$ , где  $k \geq 1$  целое; в действительности этот угол, так же как и произвольный угол вида  $\operatorname{arctg}(p/q)$ , где  $p$  и  $q$  — различные натуральные числа, не может измеряться рациональным числом градусов, в частности числом  $(180/k)^\circ$  (доказательство этого факта приведено в [7]). Следовательно, в этом случае работает вторая часть леммы 2: число отражений равно

$$\Pi(N) = \left\lceil \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right\rceil. \tag{6}$$

Это — точная формула; сейчас мы воспользуемся аппроксимацией для числа  $\operatorname{arctg} 10^{-N}$ , чтобы упростить выражение (6).

Основная идея оставшейся части этого параграфа состоит в следующем. Если мы заменим знаменатель дроби  $\pi/\operatorname{arctg} 10^{-N}$  на немного большее число  $10^{-N}$ , то получим несколько меньшее отношение  $\frac{\pi}{10^{-N}} = \pi \cdot 10^N$ ; в том случае, когда целая часть исходной дроби совпадает с целой частью уменьшенной дроби, мы можем заменить её на  $\left\lfloor \frac{\pi}{10^{-N}} \right\rfloor$ . Это и даст нам  $N$  точных знаков числа  $\pi$ .

Однако ситуация немного сложнее, чем это может показаться на первый взгляд:

*целые части двух дробей, исходной (6) и аппроксимированной  $[\pi/10^{-N}]$ , могут, вообще говоря, оказаться различными!*

К счастью, если число  $N$  достаточно велико, то они всегда будут отличаться самое большее на 1. Объясним, почему это так.

Обозначим  $x = 10^{-N}$ . Напомним, что

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

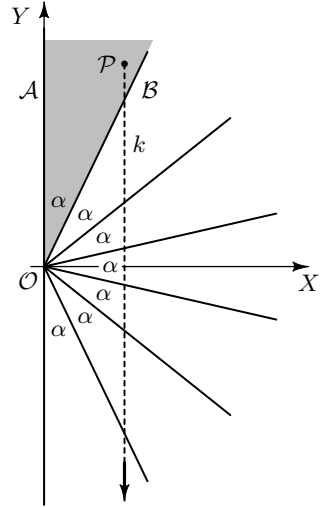


Рис. 11. Луч  $k$  параллелен оси  $Y$

а следовательно,  $\operatorname{arctg} x \approx x$  когда  $x \rightarrow 0$ . Мы собираемся подставлять  $x$  вместо  $\operatorname{arctg} x$  в формулу (6).

ЛЕММА 3. (а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) = 0$ ; (б)  $\left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) < x$  для  $x > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Заменяя  $\operatorname{arctg} x$  его тейлоровским разложением, получаем

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x \operatorname{arctg} x} = \frac{x - \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)}{x \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)} = x \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3} + \dots} \rightarrow 0$$

при  $x \rightarrow 0$ , поскольку предел дробного сомножителя равен  $1/3$ .

(б) Это неравенство можно легко вывести из доказательства пункта (а). Однако есть другое, независимое, доказательство. Рассмотрим функцию  $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x$ . Поскольку  $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x > 0$  для  $x > 0$  и  $f(0) = 0$ , мы имеем  $f(x) > 0$  для всех  $x > 0$ . Ч. т. д.  $\square$

Из пункта (а) леммы 3 следует, что

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} - \frac{\pi}{10^{-N}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \approx \pi \cdot 10^N,$$

если  $N$  достаточно велико. Поэтому либо

$$\begin{aligned} \Pi(N) &= \left\lfloor \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right\rfloor = \lfloor \pi \cdot 10^N \rfloor = \\ &= \lfloor (3,1415 \dots a_{N-1} a_N \dots) \cdot 10^N \rfloor = 31415 \dots a_{N-1} a_N, \end{aligned} \quad (7)$$

либо

$$\Pi(N) = \left\lceil \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right\rceil = \lceil \pi \cdot 10^N \rceil + 1 = 31415 \dots a_{N-1} a_N + 1. \quad (8)$$

Последняя возможность создаёт дополнительную проблему. Действительно, формулы (7) и (8) гарантируют, что  $(N+1)$ -значное число  $\Pi(N)$  содержит либо первые  $N$ , либо первые  $N + 1$  точных цифр числа  $\pi$  (начиная с цифры 3),

**за исключением случая,  
когда какие-то  $k \geq 1$  последних цифр  
числа  $31415 \dots a_N$  суть девятки.**

Ниже (см. конец § 10) мы придём к заключению, что последний случай не может иметь места (по крайней мере когда  $N$  не превосходит 200

миллионов) или же реализуется с ничтожной вероятностью. Так или иначе,

$$\Pi(N) - [\pi \cdot 10^N] = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, не считая этого последнего предположения, теорема доказана:

**бильярдные шары вычисляют  $\pi$   
с произвольной наперёд заданной точностью.**

### § 9. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ЧИСЛА $\pi$

Если

$$\pi = 3,1415 \dots a_k \underbrace{999 \dots 9}_{N-k \text{ девяток}} a_{N+1} \dots,$$

причём  $a_k < 9$ ,  $a_{N+1} < 9$ , то из формулы (8) следует равенство

$$\Pi(N) = [\pi \cdot 10^N] + 1 = 31415 \dots a_k \underbrace{999 \dots 9}_{N-k \text{ девяток}} + 1 = 31415 \dots (a_k + 1) \underbrace{000 \dots 0}_{N-k \text{ нулей}}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае  $\Pi(N)$  даёт только  $k < N$  точных цифр  $\pi$ , тогда как последние  $N - k$  цифр в  $\Pi(N)$  не совпадают с соответствующими цифрами числа  $\pi$ .

К счастью, это случается (если вообще случается!) чрезвычайно редко и не влияет на общий результат, касающийся *полной последовательности целых чисел*  $\Pi(N)$  при  $N \rightarrow \infty$ : последовательность первых цифр чисел  $\Pi(0)$ ,  $\Pi(1)$ ,  $\Pi(2)$ , ...,  $\Pi(N)$ , ... стабилизируется, начиная с некоторого числа  $\Pi(N)$ , поэтому мы в конечном счёте всё-таки сможем узнать **все цифры** числа  $\pi$  (увеличивая массу  $M = m \cdot 100^N$  в 100 раз для каждого следующего приближения).

Однако намного более вероятно, что формула (8) ложна для всех  $N$ . В этом случае всегда работает формула (7), и тогда число  $\Pi(N)$  даёт ровно  $N$  точных десятичных цифр числа  $\pi$ . Мы обсудим эту, более вероятную, возможность в следующем параграфе.

### § 10. НЕСКОЛЬКО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ И ОДНА ГИПОТЕЗА: «ТОНКАЯ СТРУКТУРА ЧИСЛА $\pi$ »

Было бы прекрасно, если бы при всех  $N$  правильной оказывалась формула (7), дающая точное значение  $\Pi(N)$ , а равенство (8) никогда бы не имело места.

В этой связи можно поставить следующие четыре вопроса.

**Вопрос 1.** Верна ли формула (7)

$$\left[ \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[ \frac{\pi}{10^{-N}} \right]$$

для всех достаточно больших  $N$ ?

**Вопрос 2.** Верно ли, что для любого положительного *иррационального* числа  $a$  и для любого достаточно малого положительного  $x$  имеет место равенство

$$\left[ \frac{a}{\operatorname{arctg} x} \right] = \left[ \frac{a}{x} \right] ?$$

**Вопрос 3.** Выполняется ли для всех достаточно больших  $N$  равенство

$$\left[ \frac{\pi}{\operatorname{arctg}(1/N)} \right] = \left[ \frac{\pi}{1/N} \right] ?$$

**Вопрос 4.** Верно ли равенство

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[ \frac{\sqrt{2}}{10^{-N}} \right]$$

для всех достаточно больших  $N$ ?

Вопрос 2 представляет собой далеко идущее обобщение вопроса 1, тогда как вопросы 3 и 4 вполне аналогичны вопросу 1 и получаются, если заменить  $10^{-N}$  на  $1/N$  или же  $\pi$  на  $\sqrt{2}$  соответственно. Автор уверен, что ответ на вопрос 1 — «ДА», хотя и не может этого доказать. В то же время автору известны точные ответы со строгими доказательствами на остальные три вопроса (см. следующий параграф).

Что касается вопроса 1, то современная математика не в состоянии на него ответить; во всяком случае, несколько ведущих специалистов в теории чисел и смежных вопросах убеждали автора этой статьи, что современная математика куда как далека от решения данной проблемы. Вот перевод на русский язык цитаты из электронного письма известного австралийского математика Алфа ван дер Пууртена (Alf van der Poorten) автору: «...Сегодняшний уровень знаний настолько слаб, что, лишь обнаружив примерно  $7N$  девяток, следующих подряд вслед за  $N$  первыми десятичными цифрами числа  $\pi$ , я мог бы утверждать, что такого быть не может. Но к моему глубокому сожалению, уровень развития современной математики не позволяет сказать (а тем более доказать), что вслед за  $N$  первыми десятичными знаками числа  $\pi$  не могут идти  $N + \varepsilon$  (где  $\varepsilon \ll N$ ) девяток подряд. Говорю об этом с сожалением, поскольку для Вас это — возвращение к исходному предположению. Простейшая известная мне работа на данную тему — моя

старая статья [11] „Доказательство, которое пропустил Эйлер“, опубликованная в журнале „Mathematical Intelligencer“ в 1979 г.».

Иными словами, Алф ван дер Пуртен утверждает, что в числе  $\pi$  за первой цифрой 3 не идут 7 девяток; за цифрами 31 не идут 14 девяток, и так далее, как бы далеко мы ни продвинулись в десятичной записи  $\pi$ . Авторский вопрос 1 состоит в том, что сразу же за первыми  $N$  цифрами числа  $\pi$  не может идти набор из  $N$  девяток; дать ответ на этот вопрос математика пока бессильна, что с сожалением и отмечает ван дер Пуртен в своём письме.

С другой стороны, имеется ряд фактов, которые оправдывают уверенность автора в том, что ответ на вопрос 1 положителен. Прежде всего, можно показать, что

*равенство (8) (когда к ответу (7) добавляется лишняя единица) справедливо в том и только том случае, когда строка первых  $2N$  десятичных знаков числа  $\pi$  содержит  $N-1$  девяток в своей правой половине.*

В самом деле, для  $x > 0$  согласно лемме 3, пункт 2,

$$\frac{1}{\arctg x} - \frac{1}{x} < x.$$

Подставляя  $x = \pi \cdot 10^{-N}$ , получаем

$$\frac{\pi}{\arctg 10^{-N}} - 10^N \pi < \frac{\pi}{10^N}.$$

Для того чтобы числа  $[10^N \pi]$  и  $\left[ \frac{\pi}{\arctg 10^{-N}} \right]$  были различны (а значит, отличались бы ровно на 1), необходимо, чтобы за первыми  $N$  цифрами в десятичном представлении  $\pi$  следовали  $N-1$  девяток. Но если бы это выполнялось для бесконечного множества значений  $N$ , то (верхнее) значение плотности девяток в десятичном представлении  $\pi$  составило бы по крайней мере  $1/2$ . А это весьма неправдоподобно!

Читатель может легко проверить, используя интернет-сайт

[mathoverflow.net/questions/62868](http://mathoverflow.net/questions/62868),

что

*«последовательность 999999999 (9 девяток) ни разу не встречается в строке первых 200 000 000 цифр числа  $\pi$ , начиная с позиции 0».*

То же самое относится вообще ко всем десятичным цифрам, кроме цифры 6, которая появляется в этой же строке из 200 000 000 цифр 9 раз подряд, начиная с позиции 45 681 781 от начала десятичного разложения  $\pi$ .

Таким образом, не только **половина** из первых 200 миллионов цифр числа  $\pi$  не состоит из девяток (как должно было бы случиться, если бы равенство (8) выполнялось), но максимальная цепочка из последовательных девяток имеет лишь длину восемь!

Это показывает, прежде всего, что наш метод для нахождения числа  $\pi$  точен, по крайней мере до 200 миллионов знаков.

Кроме того, несложно подсчитать вероятность события, состоящего в том, что некоторое целое число содержится в объединении всех интервалов с концами  $\pi/10^{-n}$  и  $\pi/\operatorname{arctg} 10^{-n}$  для  $n > 2 \cdot 10^8$ . Длина одного такого интервала составляет примерно  $\pi \cdot 10^{-n}/3$ ; будем считать, что это как раз и есть вероятность того, что в интервал попадает некоторое целое число. Суммируя величины этих вероятностей по всем значениям  $n \geq 2 \cdot 10^8$ , получаем оценку для полной вероятности

$$p = \sum_{n=2 \cdot 10^8}^{\infty} \pi \cdot \frac{10^{-n}}{3} = \frac{\pi \cdot 10^{-2 \cdot 10^8 + 1}}{27}.$$

Это практически нуль!

Все эти рассуждения позволяют нам сформулировать вопрос 1 в виде следующей гипотезы.

**Гипотеза:** (А). Для любого натурального числа  $N$  имеет место равенство

$$\left[ \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[ \frac{\pi}{10^{-N}} \right].$$

(Б). Для любого натурального числа  $N$  последовательность  $2N$  первых цифр числа  $\pi$  не может оканчиваться  $N-1$  последовательными девятками:

$$\pi \neq 3, \underbrace{1415 \dots a_N}_{N \text{ цифр}} \underbrace{99 \dots 99}_{N-1 \text{ девяток}} \dots$$

Таким образом, мы доказали эту гипотезу для всех  $N$ , не превосходящих 200 миллионов, и с вероятностью

$$1 - \frac{\pi \cdot 10^{-2 \cdot 10^8 + 1}}{27} \approx 1$$

для всех  $N$ , больших 200 миллионов.

## § 11. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ 2, 3 и 4

**Вопрос 2.** Ответ на вопрос 2 отрицателен.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Равенство  $\left[ \frac{a}{\operatorname{arctg} x} \right] = \left[ \frac{a}{x} \right]$  не может выполняться для всех значений  $x$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $a$  — положительное число (неважно, рациональное или нет). Положим  $x = \operatorname{tg}(a/n)$ . Тогда левая часть равенства принимает значение  $n$ , в то время как правая часть строго меньше  $n$  (поскольку  $a/n < \operatorname{tg}(a/n)$ ). (Малое изменение значения  $x = \operatorname{tg}(a/n)$  не меняет неравенства  $\left[\frac{a}{\operatorname{arctg} x}\right] > \left[\frac{a}{x}\right]$ , так что для целого интервала значений  $x$  равенство из утверждения 1 не может выполняться.)  $\square$

**Вопрос 3.** Введём обозначение  $L_N = \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}(1/N)}\right]$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Для всех значений  $N \geq 23$  выполняется одно из двух равенств — либо  $L_N = [\pi N]$ , либо  $L_{N+1} = [\pi(N+1)]$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим противное:  $L_N \neq [\pi N]$  и  $L_{N+1} \neq [\pi(N+1)]$ . Тогда  $L_N > \pi N$  и  $L_{N+1} > \pi(N+1)$ . Согласно лемме 3, пункт 2,

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x} < \pi x + \frac{\pi}{x},$$

откуда, полагая  $x = 1/N$  и  $x = 1/(N+1)$ , получаем два неравенства:

$$\pi N + \frac{\pi}{N} > L_N > \pi N \quad \text{и} \quad \pi(N+1) < L_{N+1} < \pi(N+1) + \frac{\pi}{N+1}.$$

Вычитание этих неравенств даёт

$$\pi - \frac{\pi}{N} < L_{N+1} - L_N < \pi + \frac{\pi}{N+1}.$$

Если  $N \geq 23$ , то  $\pi - \frac{\pi}{N} > 3$  и  $\pi + \frac{\pi}{N+1} < 4$ , так что мы получаем неравенство

$$3 < L_{N+1} - L_N < 4,$$

которое невозможно, ибо  $L_{N+1} - L_N$  целое. Утверждение доказано.  $\square$

**Вопрос 4.** Ответ на вопрос 4 — «ДА».

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Для достаточно больших целых  $N$  имеет место равенство  $\left[\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} 10^{-N}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{10^{-N}}\right]$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы пишем  $g(x) = \bar{o}(f(x))$  при  $x \rightarrow 0$ , если  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ .

При  $x \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x} = \frac{\sqrt{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{x}}{1 - \frac{x^2}{3} + \bar{o}(x^3)} = \frac{\sqrt{2}}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \bar{o}(x^3)\right).$$

Положим

$$M_N = \left[\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x_N}\right], \quad \text{где } x_N = 10^{-N}.$$



Тогда

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x_N} \geq M_N,$$

и значит,

$$\frac{\sqrt{2}}{x_N} \left( 1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3) \right) \geq M_N \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{x_N} \geq \frac{M_N}{1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3)}.$$

Допустим, что, напротив,  $[\sqrt{2}/x_N] < M_N$  для некоторого  $N$ . (Заметим, что в этом случае  $M_N - [\sqrt{2}/x_N] = 1$ .) Тогда выполняется также неравенство  $\sqrt{2}/x_N < M_N$  (целое число  $M_N$  лежит между нецелыми  $\sqrt{2}/x_N$  и  $\sqrt{2}/\operatorname{arctg} x_N$ ), а значит,

$$M_N > \frac{\sqrt{2}}{x_N} \geq \frac{M_N}{1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{\sqrt{2}}{x_N} \left( 1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3) \right) \geq M_N > \frac{\sqrt{2}}{x_N}.$$

Подставим вместо  $x_N$  значение  $10^{-N}$ ; получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot 10^N < M_N &\leq \sqrt{2} \cdot 10^N \left( 1 + \frac{10^{-2N}}{3} + \bar{o}(10^{-3N}) \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left( 10^N + \frac{10^{-N}}{3} + \bar{o}(10^{-2N}) \right). \end{aligned}$$

Возводя в квадрат, получаем неравенство

$$2 \cdot 10^{2N} < M_N^2 \leq 2 \left( 10^{2N} + \frac{2}{3} + \frac{10^{-2N}}{9} + \bar{o}(10^{-N}) \right) = 2 \cdot 10^{2N} + \frac{4}{3} + \bar{o}(10^{-N}).$$

В интервале

$$\left( 2 \cdot 10^{2N}, 2 \cdot 10^{2N} + \frac{4}{3} \right)$$

имеется лишь одно целое число, а именно  $2 \cdot 10^{2N} + 1$ . Значит,

$$M_N^2 = 2 \cdot 10^{2N} + 1.$$

Но

$$2 \cdot 10^{2N} + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

и

$$2 \cdot 10^{2N} + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 3 \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Это противоречит тому факту, что если полный квадрат делится на 3, то он должен делиться и на 9. Следовательно,  $M_N = \left[ \frac{\sqrt{2}}{10^{-N}} \right]$ , и утверждение доказано.  $\square$

## § 12. РОДСТВЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ТАКЖЕ ВЫЧИСЛЯЮЩАЯ $\Pi$

Система «стенка — малый шар — большой шар» может быть заменена другой системой, которая тоже считает число  $\Pi(N)$ . Эта новая система состоит только из шаров и не содержит неподвижного отражателя-преграды.

Представим себе преграду как плоское зеркало. Двум шарам исходной системы соответствуют их зеркальные отражения по другую сторону зеркала. Когда шар  $m$  отражается от зеркала, то же самое происходит и с его зеркальным образом (только с другой стороны зеркала). Когда шары сталкиваются друг с другом, сталкиваются и их отражения.

Теперь удалим это зеркало, а шары-отражения заменим парой настоящих шаров с теми же массами  $m$  и  $M$ , что и массы исходных шаров-образов. Когда два малых шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и затем сталкиваются, они просто обмениваются своими скоростями или, другими словами, проходят друг сквозь друга без какого-либо взаимного влияния (мы уже обсуждали это выше). Пары шаров  $(M - m)$  и  $(m - M)$  сталкиваются одновременно, и мы фиксируем это событие как одно столкновение. При этих условиях в системе  $(M - m - m - M)$  насчитывается то же число столкновений  $\Pi$ , что и в ранее рассмотренной системе «стенка —  $m - M$ ».

Между двумя системами — исходной со стенкой и расширенной с четырьмя шарами — имеется ряд различий.

1. Стенка в первой системе играет роль шара бесконечной массы, тогда как во второй системе нет ни неподвижного препятствия, ни шаров бесконечной массы.
2. Конфигурационное пространство первой системы двумерно, тогда как для расширенной системы конфигурационное пространство имеет размерность 4: оно представляет собой прямую сумму двух идентичных копий конфигурационного пространства первой системы и обладает естественными симметриями.
3. В исходной системе необходимо различать отскоки от стенки (т. е. отражения) и соударения шаров. После столкновения со стенкой импульс системы (пары шаров) изменяется, а при соударении шаров друг с другом этого не происходит. Во второй же системе наблюдаются только столкновения шаров, а потому используется только формула (1) или (4).

Объединяет две системы то, что они выполняют одну и ту же функцию:

**подсчитывают число  $\Pi$ !**

## § 13. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Автор изобрёл бильярдный метод для нахождения числа  $\pi$ , когда готовил для математического коллоквиума в Eastern Illinois University доклад о столкновениях шаров (по так называемой проблеме Синая). Когда процедура вычисления  $\pi$  с помощью двух шаров была представлена аудитории, в результате поначалу никто не поверил. Но затем автор привёл доказательство, простота которого убедила всех и каждого.

Позднее автор рассказывал о своём открытии ещё в нескольких американских и европейских университетах с неизменной реакцией аудитории: поначалу полное недоверие, а затем полное принятие ввиду очевидности доказательства.

С экспериментальной (физической) точки зрения основная теорема данной статьи (см. §§ 2–4) полностью доказана: отношение двух реальных масс  $M/m$ , использующееся в процедуре вычисления  $\pi$ , не может превосходить числа атомов во Вселенной, которое много меньше чем  $10^{200\,000\,000}$  (на самом же деле это число не превосходит даже  $10^{200}$ ); но мы знаем (из сети Интернет), что наш метод даёт точную последовательность первых 200 000 000 цифр числа  $\pi$ . Однако с математической точки зрения сформулированная здесь гипотеза представляется нам по-настоящему сложной математической проблемой, в настоящее время совершенно недоступной.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Прежде всего, мне хочется поблагодарить профессора Айру Розенгольца (Ira Rosenholtz, Eastern Illinois University), который убедил меня написать и опубликовать эту статью.

Я признателен также всем, кто приглашал меня с докладом на математические и физические семинары, коллоквиумы и заседания математических клубов. Особо я хотел бы упомянуть американских профессоров: John Wetzel; Anatoly Katok; Michael Bosherniatzan; Nikolai Chernov; Keith Burns; Paul Sally; George Berzsenyi, а также европейских профессоров: Sergio Albeverio; Yuri Kondratiev; Phillip Blanchard; Aleksandr Plakhov; Carlo Boldrighini. Я также делал доклады на эту тему в нескольких летних математических лагерях для школьников, которые проводились в Nebraska University, — в этом лагере ежегодно готовят американскую команду для участия в Международной математической олимпиаде; в «Zoom Academy», California State Fullerton; а также в летней школе «Современная математика» (Дубна, Россия). Я приношу благодарность всем организаторам этих лагерей и летней школы.

Хочу выразить также признательность моему другу профессору Чарльзу Делману (C. Delman, Eastern Illinois University), который прочитал исходную рукопись в английском варианте и предложил множество улучшений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. Математическое понимание природы. М.: МЦНМО, 2011. С. 85–87 (*Задача Бюффона и интегральная геометрия*).
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012. С. 4–15 (*Задача 1*).
- [3] Гальперин Г. А. Биллиардная динамическая система для числа  $\pi$  // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 137–138.
- [4] Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды // Библиотечка «Квант». Вып. 77. М.: Наука, 1990.
- [5] Перельман Я. И. Занимательная геометрия (на вольном воздухе и дома). Второе исправленное издание. Л.: Время, 1927. С. 190–193 (*Бросание иглы*).
- [6] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.
- [7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: Физматлит. 2001. С. 56 (*Задача 239(б)*).
- [8] Beckmann P. A History of  $\pi$ . Golem Press, 1971.
- [9] de Buffon G. L. L. Comte Sur le jeu de franc-carreau, 1777.  
См. также веб-сайт <http://www.cut-the-knot.com/fta/Buffon/buffon9.htm>.
- [10] Sinai Ya. G. Introduction to Ergodic Theory. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976.
- [11] van der Poorten A. A proof that Euler missed // Math. Intelligencer. 1979. V. 1, № 4. P. 195–203.
- [12] Веб-сайт, посвящённый числу  $\pi$ : [mathoverflow.net/questions/62868](http://mathoverflow.net/questions/62868).
- [13] Веб-сайт, посвящённый игле Бюффона:  
<http://stud4.tuwien.ac.at/~e9527412/Buffon.html>.
- [14] Веб-сайт, посвящённый соударению шаров в системе «стенка — шар  $m$  — шар  $M$ » (мультфильм создан Верой Рощиной): <http://youtu.be/4UhPTnIprk>.

# Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах

Н. Н. Осипов

В произвольном треугольнике провели биссектрисы и в каждый из шести образовавшихся треугольников вписали окружность. Теорема об инцентрах утверждает, что центры этих шести окружностей лежат на одной кривой второго порядка. В статье приводится вычислительное доказательство этой теоремы и её обобщения с использованием системы компьютерной алгебры Maple. Для эффективной реализации вычислений применяется алгебра комплексных чисел.

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней статье [5] был приведён целый ряд сходных между собой геометрических гипотез, которые, вероятно, родились в результате экспериментов с какой-нибудь *системой динамической геометрии* типа GeoGebra [7]. Настоящая статья посвящена доказательству одной из этих гипотез, которую мы будем называть *гипотезой об инцентрах*<sup>1)</sup>. Сформулируем её.

Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — его биссектрисы,  $I$  — инцентр треугольника  $ABC$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  — инцентры треугольников  $AB_1I$ ,  $A_1BI$ ,  $BC_1I$ ,  $B_1CI$ ,  $CA_1I$ ,  $C_1AI$  соответственно. Гипотеза утверждает, что шесть инцентров  $P_j$  лежат на одном эллипсе.

Эта гипотеза верна. Точнее, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА ОБ ИНЦЕНТРАХ.** *Шесть инцентров  $P_j$  лежат на одной кривой второго порядка.*

Интуитивно очевидно, да и рисунки в GeoGebra показывают, что этой кривой будет эллипс. Почему именно эллипс, а не, скажем, гипербола? Этим вопросом мы не будем заниматься, но дадим некое естественное (в рамках применяемого здесь метода) обобщение теоремы об инцентрах.

<sup>1)</sup> *Инцентром* треугольника называется центр его вписанной окружности.

Наш способ доказательства теоремы об инцентрах будет опираться на *алгебру комплексных чисел и символичные вычисления*. О применении комплексных чисел в планиметрии хорошо и давно известно (см., например, книги [2] и [4]). Поскольку придётся иметь дело с громоздкими буквенными выражениями, нам понадобится какая-нибудь *система компьютерной алгебры*, например Maple [8]. Как всё это работает, мы предварительно поясним на более простых примерах. Читатель должен уметь выполнять стандартные алгебраические операции над комплексными числами и понимать геометрический смысл этих операций.

Подчеркнём принципиальное отличие технических инструментов, которые можно применять для проверки геометрических гипотез. С помощью системы динамической геометрии мы можем доказательно опровергнуть гипотезу, выполнив все необходимые построения с достаточной точностью. Так, можно показать, что первые две гипотезы из [5] ошибочны: при варьировании соответствующих рисунков нетрудно обнаружить явные контрпримеры. Однако для строгого обоснования правдоподобной гипотезы приближённых построений, даже очень точных, недостаточно. Система компьютерной алгебры позволяет в определённом смысле осуществлять абсолютно точные геометрические построения, и у нас появляется шанс доказать гипотезу.

Разумеется, *автоматический метод* доказательства с его символьными вычислениями — не самый лучший способ обоснования геометрической гипотезы. Но что делать, когда по-другому не получается, а доказательно судить о гипотезе хочется. Гипотеза об инцентрах на данный момент имеет именно такой статус. Отметим, что некоторые гипотезы из [5] допускают чисто геометрическое обоснование, и заинтересованный читатель может попытаться найти что-то подобное и для гипотезы об инцентрах (по-видимому, разгадать загадку эллипса можно только геометрическими рассуждениями).

В конце статьи мы кратко обсудим ещё две гипотезы из [5], связанные с конструкцией хорошо известной *теоремы Морлея*. Автоматический метод проверки показывает, что эти гипотезы также верны, причём даже в более общем виде.

## § 2. ПАРА ПРИМЕРОВ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИХ МЕТОД

Чтобы показать читателю, как работает автоматический метод, основанный на алгебре комплексных чисел, мы решим две относительно новых геометрических задачи<sup>2)</sup>. Первая из них предлагалась на региональном

---

<sup>2)</sup> На самом деле эти задачи просто первыми подвернулись под руку. Иллюстрировать метод можно задачами из довольно широкого класса, при этом, что интересно, метод нечувствителен к тому, насколько сложным может оказаться геометрическое решение задачи.

этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников (задача 11.4), а вторая — это задача 5296, опубликованная в журнале «Математика в школе» (№ 2 за 2013 год).

Введём на плоскости систему декартовых координат. Если точка этой плоскости имеет координаты  $(a, b)$ , то отождествим её с комплексным числом  $a + bi$ . Двумерный вектор  $(a, b)$  также отождествим с этим числом. Саму плоскость при этом будем называть *комплексной*, имея в виду такую интерпретацию точек и векторов.

Пусть  $l(P, v)$  обозначает прямую, проходящую через точку  $P$  в направлении вектора  $v$ . Основная процедура в автоматическом методе — это вычисление точки пересечения  $Z$  прямых  $l(P, v)$  и  $l(Q, w)$  по формуле, которую читателю предлагается вывести самостоятельно:

$$Z = \frac{v(Q\bar{w} - \bar{Q}w) - w(P\bar{v} - \bar{P}v)}{v\bar{w} - \bar{v}w}$$

(здесь и далее черта сверху означает *комплексное сопряжение*).

**ЗАДАЧА 1** (Ф. А. Ивлев). В окружность  $\Omega$  вписан треугольник  $ABC$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — середины двух дуг  $AC$  окружности  $\Omega$ . Пусть  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $Q$  на прямую  $AB$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $BMC$ , делит пополам отрезок  $BP$ .

Из формулировки задачи мы убрали несущественные для автоматического метода требования (типа остроугольности треугольника  $ABC$ ), которые в некотором смысле необходимы при традиционном способе решения задачи.

**РЕШЕНИЕ.** Будем считать треугольник  $ABC$  расположенным на комплексной плоскости так, что  $\Omega$  — это единичная окружность  $|z| = 1$ , причём  $P = 1$ . Положим

$$A = z_1, \quad B = z_2,$$

где  $z_1, z_2$  — комплексные числа, для которых  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Тогда

$$Q = -P = -1, \quad C = \bar{A} = \frac{1}{z_1},$$

а точку  $M$  можно получить как точку пересечения прямых  $l(Q, (B - A)i)$  и  $l(A, B - A)$ :

$$M = \frac{z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1}{2}.$$

Вычислим центр  $O$  окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $BMC$ , и середину  $L$  отрезка  $BP$ :

$$O = -\frac{z_2 - 1}{2(z_1 - 1)}, \quad L = \frac{z_2 + 1}{2}.$$

Достаточно убедиться, что  $L \in \omega$ , т. е. что  $|OL|$  равно, например,  $|OB|$ . Рассмотрим число

$$w = \frac{L - O}{B - O} = \frac{z_1 z_2 + z_1 - 2}{2z_1 z_2 - z_2 - 1}$$

и покажем, что  $|w| = 1$ . В самом деле, имеем

$$\bar{w} = \frac{z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1^{-1} - 2}{2z_1^{-1} z_2^{-1} - z_2^{-1} - 1} = \frac{1 + z_2 - 2z_1 z_2}{2 - z_1 - z_1 z_2} = \frac{1}{w},$$

что и требовалось.  $\square$

В этом примере все выкладки легко проделать вручную, но так бывает крайне редко: при автоматическом подходе обычно приходится иметь дело с громоздкими выражениями.

**Задача 2** (С. С. Тасмуратов). В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $CL$ , а в треугольники  $CAL$  и  $CBL$  вписали окружности, которые касаются прямой  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите равенство

$$\frac{2}{|CL|} = \frac{1}{|LN|} - \frac{1}{|AM|}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Примем окружность, вписанную в треугольник  $CAL$ , за единичную; в частности, её центр  $I = 0$ . Пусть она касается сторон  $CA$  и  $CL$  в точках  $L_1$  и  $A_1$  соответственно. Положим

$$A_1 = z_1, \quad L_1 = z_2, \quad M = z_3,$$

где  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Тогда

$$A = \frac{2z_2 z_3}{z_2 + z_3}, \quad L = \frac{2z_1 z_3}{z_1 + z_3}, \quad C = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Для вычисления точки  $N$  сначала найдём центр  $J$  окружности, вписанной в треугольник  $CBL$ . Он может быть найден как точка пересечения прямых  $l(L, (L - I)i)$  и  $l(C, I' - C)$ , где  $I'$  — точка, симметричная точке  $I$  относительно прямой  $CL$ . Получим

$$J = \frac{2z_1 z_3 (z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Теперь точку  $N$  можно найти как проекцию точки  $J$  на прямую  $AL$ :

$$N = \frac{z_1 z_3 (2z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + 3z_2 z_3 - z_3^2)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Из геометрических соображений треугольник  $A_1 L_1 M$  всегда будет остроугольным. Если его считать *положительно ориентированным*, то будут



справедливы равенства

$$|AM| = \frac{i(z_2 - z_3)}{z_2 + z_3}, \quad |CL| = -\frac{2iz_1(z_2 - z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}$$

(доказательство оставляем читателю в качестве упражнения). Очевидно, равенство, которое требуется доказать в задаче, равносильно равенству

$$\left(\frac{1}{|AM|} + \frac{2}{|CL|}\right)^2 = \frac{1}{|LN|^2}. \quad (1)$$

Поскольку  $|LN|^2 = (L - N)(\bar{L} - \bar{N})$ , нам достаточно загрузить в (1) найденные выше выражения для  $|AM|$ ,  $|CL|$ ,  $L$ ,  $N$  и затем убедиться, что получится тождество относительно  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Эту рутину, конечно, следует предоставить компьютеру.  $\square$

Мы привели примеры задач из класса планиметрических теорем так называемого *рационального типа*. Читатель, который хотел бы познакомиться с алгоритмическими аспектами данного подхода более детально, может посмотреть статью [3].

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ ИНЦЕНТРАХ

Сначала поясним, зачем нужны комплексные числа, т. е. почему стандартный метод координат не приводит к успеху. Ведь первое, что приходит на ум, — это воспользоваться известными формулами для координат инцентра треугольника. Для инцентра  $I$  треугольника  $ABC$  они таковы:

$$I_x = \frac{|AB|C_x + |BC|A_x + |CA|B_x}{|AB| + |BC| + |CA|}, \quad I_y = \frac{|AB|C_y + |BC|A_y + |CA|B_y}{|AB| + |BC| + |CA|}$$

( $A_x$  и  $A_y$  обозначают координаты точки  $A$  и т. д.). На первый взгляд применение этих формул кажется безобидным, но оптимизм поубавится, как только мы получим итоговые выражения для координат шести инцентров  $P_j$  — это довольно громоздкие *квадратные радикалы* (из-за расстояний  $|AB|$  и т. п.), причём *вложенные* (потому что формулами нужно пользоваться дважды). Они останутся громоздкими даже тогда, когда мы, экономя на буквенных переменных, введём систему координат так, чтобы

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0).$$

Впрочем, надежда на успех ещё будет, поскольку возможности современных систем компьютерной алгебры действительно велики. Но не в нашей ситуации, когда нужно некий определитель (зависящий от координат

точек  $P_j$  и составленный по аналогии с определителем (4), см. ниже) проверить на тождественное равенство нулю. Этот определитель оказывается «несъедобным» для Maple — при попытке его вычислить программа довольно быстро исчерпывает всю доступную память и зависает, не выдав никакого результата<sup>3)</sup>.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы предварительно представить координаты инцентров  $P_j$  в удобоваримом виде. Как кажется, комплексные числа — адекватный и, главное, общедоступный инструмент для решения этой задачи<sup>4)</sup>.

Обозначим углы треугольника  $ABC$  через  $\alpha, \beta, \gamma$ . Будем считать, что наш треугольник расположен на комплексной плоскости так, что

$$A = 0, \quad B = 1$$

(вещественную ось представим себе горизонтальной и идущей слева направо, мнимую ось — направленной вертикально вверх, точку  $C$  — лежащей в верхней полуплоскости).

Положим

$$a = \cos \frac{\alpha}{4} + i \sin \frac{\alpha}{4}, \quad b = \cos \frac{\beta}{4} + i \sin \frac{\beta}{4}, \quad c = \cos \frac{\gamma}{4} + i \sin \frac{\gamma}{4}.$$

Пусть также  $\zeta = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$  — число, для которого выполнено равенство

$$\zeta^4 + 1 = 0. \quad (2)$$

Числа  $a, b, c$  имеют простой геометрический смысл: они отвечают за повороты на четверть углов  $\alpha, \beta, \gamma$ . Поскольку  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , справедливо тождество  $abc = \zeta$ . Используя наши стандартные обозначения для переменных, положим  $a = z_1, b = z_2$ . Тогда

$$c = \frac{\zeta}{z_1 z_2}.$$

Перейдём непосредственно к вычислениям. Точку  $C$  можно получить как точку пересечения прямых  $l(A, a^4)$  и  $l(B, b^{-4})$ , а точку  $I$  — как точку

<sup>3)</sup> Так было у автора. Это, конечно, не означает, что у более искущённого в компьютерной алгебре читателя случится то же самое, если он захочет повторить подобный эксперимент. Возможно, при более грамотной эксплуатации Maple всё-таки справится с тем громоздким определителем, либо это сделает какая-нибудь другая система компьютерной алгебры. Но в любом случае придётся что-то придумывать — простой метод грубой силы не работает.

<sup>4)</sup> В общем случае для автоматического доказательства геометрических теорем можно привлечь «тяжёлую артиллерию коммутативной алгебры» (В. И. Арнольд), что обычно подразумевает применение различных алгоритмов для работы с *системами полиномиальных уравнений* (см., например, [6]).

пересечения прямых  $l(A, a^2)$  и  $l(B, b^{-2})$ . Вычисления дают:

$$C = \frac{z_1^8(z_2^8 - 1)}{z_1^8 z_2^8 - 1}, \quad I = \frac{z_1^4(z_2^4 - 1)}{z_1^4 z_2^4 - 1}.$$

Далее рассмотрим, например, треугольник  $AB_1I$ . Как нетрудно увидеть,

$$\angle IAB_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AIB_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Следовательно, инцентр  $P_1$  треугольника  $AB_1I$  можно вычислить как точку пересечения прямых  $l(A, (I - A)a)$  и  $l(I, (A - I)a^{-1}b^{-1})$ :

$$P_1 = \frac{z_1^6(z_2^4 - 1)}{(z_1^4 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

Аналогично инцентр  $P_2$  треугольника  $A_1BI$  — это точка пересечения прямых  $l(B, (I - B)b^{-1})$  и  $l(I, (B - I)ab)$ :

$$P_2 = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^4 + z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + z_2^2)}{(z_1^2 z_2^4 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

Далее находим

$$P_3 = l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^4 z_2^2 - \zeta^2 z_1^2 z_2^4 - \zeta^2 z_1^2 z_2^2 + 1)}{(z_1^4 z_2^4 - 1)(z_1^2 - \zeta^2 z_2^2)}.$$

Здесь в итоговом выражении впервые появляется число  $\zeta$ . В выражениях для инцентров

$$P_4 = l(C, (I - C)c^{-1}) \cap l(I, (C - I)bc),$$

$$P_5 = l(C, (I - C)c) \cap l(I, (C - I)a^{-1}c^{-1}),$$

$$P_6 = l(A, (I - A)a^{-1}) \cap l(I, (A - I)ac),$$

которые мы не приводим, оно также появится.

На декартовой плоскости с координатами  $(x, y)$  произвольную кривую второго порядка можно задать уравнением

$$kx^2 + lxy + my^2 + ux + vy + w = 0.$$

На комплексной плоскости можно использовать *комплексные координаты*

$$(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy),$$

в которых кривая второго порядка описывается уравнением

$$Kz^2 + Lz\bar{z} + M\bar{z}^2 + Uz + V\bar{z} + W = 0.$$

Таким образом, мы должны доказать существование *нетривиального* набора коэффициентов  $K, L, \dots, W$ , для которых будут выполнены равенства

$$KP_j^2 + LP_j\bar{P}_j + M\bar{P}_j^2 + UP_j + V\bar{P}_j + W = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (3)$$

Как известно (см., например, [1]), это равносильно тому, что *определитель*

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = \det([P_j^2, P_j\bar{P}_j, \bar{P}_j^2, P_j, \bar{P}_j, 1]_{j=1}^6) \quad (4)$$

*системы линейных уравнений* (3) с неизвестными  $K, L, \dots, W$  равен нулю.

Выражение для каждого из инцентров  $P_j$  имеет простую структуру — это рациональная дробь от  $z_1, z_2$  и  $\zeta$ . Выражение для  $\bar{P}_j$  можно получить, если в выражении для  $P_j$  всюду заменить  $z_1$  на  $z_1^{-1}$ ,  $z_2$  на  $z_2^{-1}$  и  $\zeta$  на  $\zeta^{-1}$ . Ясно, что при этом получится рациональная дробь такого же вида. Поэтому вычисление в Maple определителя (4) не может быть проблемой.

Действительно, Maple за несколько секунд раскрывает этот определитель, но вместо ожидаемого нуля мы видим весьма громоздкую рациональную дробь:

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = \frac{f(z_1, z_2, \zeta)}{g(z_1, z_2, \zeta)}.$$

Однако  $\zeta$  — не переменная, а фиксированное число, для которого имеет место равенство (2). И вот по модулю этого равенства вся дробь чудесным образом превращается в нуль:

$$\Delta(P_1, \dots, P_6) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно  $f(z_1, z_2, \zeta)$  поделить на  $\zeta^4 + 1$  с остатком (как один многочлен делят с остатком на другой) и увидеть, что остаток нулевой.

Итак, доказано, что все шесть инцентров  $P_j$  лежат на одной кривой второго порядка. Как уже отмечалось, этой кривой будет эллипс. Для доказательства достаточно положить  $W = 1$  и, вычислив коэффициенты  $K, L, M$ , убедиться в справедливости неравенства

$$L^2 - 4KM > 0.$$

Однако выражения для  $K, L, M$  оказываются слишком громоздкими, и на этом пути получить строгое доказательство было бы затруднительно.

#### § 4. ПОЛНАЯ ТЕОРЕМА ОБ ИНЦЕНТРАХ

В качестве своеобразной компенсации мы сформулируем более общий результат, включающий в себя теорему об инцентрах. Вместе с инцентрами  $P_j$  треугольников  $AB_1I, A_1BI, BC_1I, B_1CI, CA_1I, C_1AI$  будем

рассматривать и центры окружностей, *вневписанных* в эти треугольники. Обозначим через  $P_j^X$  центр вневписанной в  $j$ -й треугольник окружности, лежащий против вершины  $X$  (например,  $P_4^{B_1}$  — это центр вневписанной в треугольник  $B_1CI$  окружности, который расположен против вершины  $B_1$ ). Точнее, нас будут интересовать шестёрки точек  $(Q_1, \dots, Q_6)$ , где  $Q_j$  — это либо инцентр  $P_j$ , либо один из центров  $P_j^X$ . Одна из них, а именно  $(P_1, \dots, P_6)$ , обладает тем свойством, что её точки принадлежат одной кривой второго порядка. Интересная особенность нашего доказательства этого факта состоит в том, что можно сразу предъявить ещё одну шестёрку точек с таким же свойством.

Действительно, во всех вычислениях с участием  $\zeta$  важно было только то, что это число удовлетворяет равенству (2). Возьмём теперь

$$\zeta = \cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ).$$

Так как равенство (2) по-прежнему будет верным, то, например, выражение для точки пересечения

$$l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1})$$

не изменится, но его *геометрический* смысл станет другим — вместо инцентра  $P_3$  мы получим, как нетрудно видеть, центр  $P_3^B$ . Аналогично выражения, полученные ранее для инцентров  $P_4, P_5, P_6$ , теперь будут представлять центры  $P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A$  соответственно. Ясно, что буквенные выражения для определителей  $\Delta(P_1, \dots, P_6)$  и  $\Delta(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$  будут тождественно совпадать. Значит, если упрощение первого из них по модулю равенства (2) привело к нулю, то ровно то же случится и со вторым<sup>5)</sup>. Итак, мы даром получили, что все точки шестёрки

$$(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$$

также лежат на одной кривой второго порядка. Но теперь, как видно из рисунков в GeoGebra, этой кривой может быть не только эллипс, но и гипербола.

Далее, хотя бы из спортивного интереса, можно отыскать все шестёрки  $(Q_1, \dots, Q_6)$  с этим свойством. Поскольку выражения для центров  $P_j^X$  ничем принципиально не отличаются от выражений для инцентров  $P_j$  (проверить это — очередное упражнение для читателя), вычисление любого

<sup>5)</sup> Эту важную идею *алгебраического сопряжения* лучше сначала продумать на следующем более простом примере: если выполняется равенство вида  $(1 + \sqrt{2})^{2013} = r + s\sqrt{2}$ , где  $r, s$  — рациональные числа, то справедливо и равенство  $(1 - \sqrt{2})^{2013} = r - s\sqrt{2}$ .

из определителей  $\Delta(Q_1, \dots, Q_6)$  будет не сложнее, чем вычисление определителя (4). Почему бы не применить полный компьютерный перебор?

Включаем компьютер и через некоторое время обнаруживаем в точности 32 шестёрки, для которых  $\Delta(Q_1, \dots, Q_6) = 0$ . Вот их список:

$$\begin{aligned} & (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6), & (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5^I, P_6^I), \\ & (P_1, P_2, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I), & (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}), \\ & (P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), & (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A), \\ & (P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A), & (P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}), \\ & (P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A), & (P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A), \\ & (P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), & (P_1^I, P_2^I, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I) \end{aligned}$$

(здесь каждая шестёрка, за исключением первой и последней, имеет ещё по две аналогичных). Читатель в качестве развлечения может порисовать картинки в GeoGebra и поэкспериментировать с ними<sup>6</sup>).

## § 5. ДВЕ ГИПОТЕЗЫ О КОНСТРУКЦИИ ТЕОРЕМЫ МОРЛЕЯ

Любому любителю геометрии, безусловно, хорошо знакома теорема Морлея: если в произвольном треугольнике  $ABC$  провести трисектрисы  $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ , то точки пересечения пар трисектрис  $BB_1$  и  $CC_2, CC_1$  и  $AA_2, AA_1$  и  $BB_2$  образуют правильный треугольник.

Доказать эту теорему автоматическим методом не представляет никакого труда. Пусть, как и выше,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника  $ABC$ . Положим

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} = z_1, \\ b &= \cos \frac{\beta}{3} + i \sin \frac{\beta}{3} = z_2, \\ c &= \cos \frac{\gamma}{3} + i \sin \frac{\gamma}{3} = \frac{\zeta}{z_1 z_2}, \end{aligned}$$

где  $\zeta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$  — число, удовлетворяющее равенству

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = 0. \quad (5)$$

Обозначим точки пересечения указанных пар трисектрис через  $X, Y, Z$  соответственно. Снова приняв  $A = 0, B = 1$ , мы вычислим точку  $C$ , а затем

<sup>6</sup> Автор должен честно признаться, что не справился с таким количеством внезапно свалившихся на голову эллипсов и гипербол и не может предложить сколь-нибудь внятной их классификации.

точки  $Z, X, Y$ :

$$C = l(A, a^3) \cap l(B, b^{-3}) = \frac{z_1^6(z_2^6 - 1)}{z_1^6 z_2^6 - 1},$$

$$Z = l(A, a) \cap l(B, b^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)}{z_1^2 z_2^2 - 1},$$

$$X = l(B, b^{-2}) \cap l(C, (B - C)c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + \zeta - 1)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)},$$

$$Y = l(A, a^2) \cap l(C, (A - C)c) = \frac{z_1^4(z_2^2 - 1)(z_2^2 + \zeta)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)}.$$

Теперь достаточно убедиться в верности равенства

$$Y - Z = \zeta(X - Z)$$

при условии (5). И оно, разумеется, оказывается верным.

Ничуть не сложнее доказать и следующие две гипотезы из [5]. Первая из них утверждает, что основания трисектрис  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  лежат на одном эллипсе. Во второй гипотезе это же утверждается относительно точек пересечения пар трисектрис  $AA_1$  и  $BB_1, CC_2$  и  $AA_2, BB_1$  и  $CC_1, AA_2$  и  $BB_2, CC_1$  и  $AA_1, BB_2$  и  $CC_2$  (обозначим эти точки  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$  соответственно). Представив каждую из точек  $A_1, \dots, Z_2$  рациональной дробью от  $z_1, z_2$  и  $\zeta$ , мы затем автоматически обнаружим, что

$$\Delta(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2) = \Delta(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = 0.$$

На самом деле утверждения этих гипотез справедливы для произвольных чевиан  $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ , удовлетворяющих условиям

$$\angle CAA_2 = \angle BAA_1, \quad \angle ABB_2 = \angle CBV_1, \quad \angle BCC_2 = \angle ACC_1.$$

Как ни странно, автоматическая проверка (она предоставляется читателю в качестве заключительного упражнения) здесь даже логически проще, чем в частном случае трисектрис.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- [2] Моденов П. С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979.
- [3] Осипов Н. Н. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. 2014. № 2. (В печати.)
- [4] Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2014.

- [5] *Штейнгарц, Л. А.* Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. 2012. № 6. С. 53–61.
- [6] *Chou S.-C.* Mechanical geometry theorem proving. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.
- [7] <http://www.geogebra.org>.
- [8] <http://www.maplesoft.com>.



# Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

## ВВЕДЕНИЕ

Без преувеличения можно сказать, что о равнобедренном треугольнике знает каждый школьник, посетивший несколько уроков геометрии. В самом начале изучения геометрии в школе доказывают теоремы о том, что если треугольник равнобедренный, то у него равны соответствующие углы, медианы, биссектрисы и высоты. Верны и обратные утверждения, а именно: если у треугольника два угла или две медианы (высоты, биссектрисы) равны, то этот треугольник равнобедренный. В популярной литературе по геометрии случаю равенства биссектрис уделено особое внимание, и этот случай называется теоремой Штейнера — Лемуса. По аналогии мы готовы предположить, что если в треугольнике взять два других однотипных элемента, то из их равенства будет следовать равнобедренность исходного треугольника.

Возьмём произвольный треугольник и рассмотрим в нём треугольники, образованные основаниями медиан, высот или биссектрис. Нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике основания медиан, высот или биссектрис также образуют равнобедренный треугольник. Интуитивно мы ожидаем, что если рассмотреть обратные утверждения, то они также окажутся верными. Проверка для случая медиан и высот подтверждает этот факт. Тем поразительнее кажется задача, придуманная И. Ф. Шарыгиным, о том, что существуют разносторонние треугольники такие, что треугольники, образованные основаниями их биссектрис, являются равнобедренными.

На уроках геометрии в школе не дают определение антибиссектрис, хотя это понятие достаточно давно изучается и используется. В рамках этой небольшой статьи мы хотим посмотреть на равнобедренность треугольника через изучение его антибиссектрис. Дополнительно мы также рассмотрим случаи чевианых треугольников точек Брокара. Надеемся, что приведённые примеры убедят читателей, что даже такой простой объект, как равнобедренный треугольник, может преподнести ещё немало сюрпризов.

## I

Совсем недавно авторы с интересом ознакомились с книгой по геометрии, изданной в начале прошлого века. В другое время, чтобы прочесть эту книгу, авторам пришлось бы поискать её раритетный экземпляр в библиотеке или ждать её появления в антикварном магазине. В веке нынешнем возможность знакомства с книгой, пусть и изданной более ста лет назад, предоставляет Интернет. В данном случае речь идёт о книге Д. Ефремова «Новая геометрия треугольника», которая была издана в Одессе в 1902 году. Книга настолько понравилась авторам, что некоторые определения, возникающие в этой статье, мы позаимствуем из неё.

В предисловии мы уже упомянули термин «антибиссектрисы». Хотя антибиссектрисы не изучаются в школьном курсе геометрии, некоторые их свойства аналогичны свойствам медиан или биссектрис. Таким образом, изучение школьниками свойств антибиссектрис вполне доступно на занятиях кружков по математике или факультативах.

Итак, введём необходимые нам определения.

Две точки на стороне треугольника, равноотстоящие от середины этой стороны, называются *изотомическими* точками. Две прямые, соединяющие вершину треугольника с изотомическими точками противоположной стороны, называются *изотомическими прямыми* треугольника.

УПРАЖНЕНИЕ 1 (см. [2]). На сторонах  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно, причём прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что изотомические с ними прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  также пересекаются в одной точке.

Для школьников, изучавших теорему Чебы, доказательство этого упражнения не составит труда.

Прямые, изотомические с внутренними или внешними биссектрисами треугольника, называются внутренними или внешними *антибиссектрисами* этого треугольника.

Из нашего упражнения мы сразу же получаем следствие. Поскольку биссектрисы пересекаются в одной точке, внутренние антибиссектрисы также пересекаются в одной точке.

Точка пересечения трёх антибиссектрис треугольника называется *центром антибиссектрис*. Треугольник имеет четыре центра антибиссектрис: один внутренний и три внешних.

В дальнейшем для упрощения изложения мы будем рассматривать только внутренние антибиссектрисы, при этом будем называть их просто антибиссектрисами, опуская слово внутренние.

Мы знаем, что биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Следовательно, решение следующего упражнения практически немедленно вытекает из определения антибиссектрис.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть антибиссектриса, выходящая из вершины  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает  $AC$  в точке  $K$ . Доказать, что  $\frac{AK}{KC} = \frac{BC}{AB}$ .

Вернёмся к равнобедренным треугольникам.

ТЕОРЕМА 1. *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда две его антибиссектрисы равны.*

Как видим, в данном случае свойства антибиссектрис аналогичны свойствам медиан и биссектрис.

Мы уже упоминали о теореме Штейнера — Лемуса, доказывающей, что из равенства двух биссектрис следует равнобедренность треугольника. Цитируемость этой теоремы в популярной литературе связана с тем, что изначально было известно только алгебраическое доказательство этого факта, и только позднее были найдены геометрические доказательства.

Что касается нашей теоремы 1, то можно найти несколько не слишком сложных геометрических доказательств «необходимости», а именно: если треугольник равнобедренный, то его антибиссектрисы равны. Однако открытым вопросом остаётся поиск геометрического доказательства «достаточности», а именно: если две антибиссектрисы треугольника равны, то треугольник равнобедренный. В данном случае авторы хотят предложить алгебраическое доказательство «достаточности».

Для упрощения записи используем общепринятые обозначения. Пусть  $a, b, c$  обозначают длины сторон треугольника. Через  $k_a, k_b, k_c$  обозначим длины антибиссектрис, проведённых к сторонам  $a, b, c$  соответственно. Нам понадобится несколько промежуточных результатов, которые мы сформулируем в виде упражнений.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Докажите, что квадрат длины антибиссектрисы можно найти по формуле

$$k_a^2 = b^2 + c^2 - bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = (b+c)^2 - bc \left( 3 + \frac{a^2}{(b+c)^2} \right).$$

Нам известно несколько доказательств этого утверждения с использованием теоремы косинусов или формулы Стюарта. Надеемся, что читатели докажут этот факт самостоятельно.

Сейчас мы сформулируем и докажем более общий факт, из которого будет следовать доказательство «достаточности» теоремы 1.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Если  $a \geq b \geq c$ , то  $k_a \leq k_b \leq k_c$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $a \geq b$ , тогда из упражнения 3 следует

$$\begin{aligned} k_b^2 - k_a^2 &= a^2 + c^2 - ac - \frac{b^2 ac}{(a+c)^2} - b^2 - c^2 + bc + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \\ &= (a-b)(a+b-c) + abc \left( \frac{a}{(b+c)^2} - \frac{b}{(a+c)^2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Значит,  $k_a \leq k_b$ . Аналогично доказываем оставшиеся неравенства.  $\square$

Итак, бóльшая антибиссектриса проведена к меньшей стороне.

Теперь ясно, что если две антибиссектрисы равны, то треугольник равнобедренный. Тем самым алгебраическое доказательство «достаточности» в теореме 1 завершено.

## II

Рассмотрим теперь треугольник, образованный основаниями антибиссектрис.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Докажите, что треугольник, образованный основаниями антибиссектрис равнобедренного треугольника, также является равнобедренным.

Мы не будем останавливаться на решении этого упражнения, поскольку, как нам кажется, оно имеет массу различных геометрических решений, которые могут быть легко найдены школьниками.

Нас интересует обратная задача. В этой связи напомним упоминавшуюся задачу, придуманную И. Ф. Шарыгиным.

УПРАЖНЕНИЕ 6 (см. [7, стр. 154, 158–159, задача 58]). Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

Эта задача была опубликована в 1982 году. Несмотря на простоту формулировки, при попытке её решения обнаруживаются подводные камни. Для иллюстрации мы приведём цитату И. Шарыгина из его статьи [8]: «Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — основания биссектрис треугольника  $ABC$ . Если  $A_1 B_1 = A_1 C_1$ , а треугольник  $ABC$  — не равнобедренный, то его угол  $A$  тупой и  $\cos A$  лежит в интервале  $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$ ... К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?»

Первый известный нам пример такого треугольника с указанием величин всех его углов был построен в [6]. Последующие публикации на эту тему появились только в начале этого века.

УПРАЖНЕНИЕ 7 (С. Токарев, XXVII турнир городов). Дан треугольник  $ABC$ , в котором проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Известно, что величины углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  относятся как  $4:2:1$ . Докажите, что  $A_1B_1 = A_1C_1$ .

Нам известно три различных опубликованных геометрических решения упражнения 7 (см. [3, 5, 9]), в [5] с применением тригонометрии. Конечно, существуют и другие примеры, хотя и не столь изящные.

Сделаем небольшую обобщающую ремарку.

Вообще говоря, если мы рассматриваем три прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающиеся в одной точке внутри треугольника, то для таких прямых выполняется теорема Чебы. Поэтому треугольник, образованный основаниями этих прямых, называется чевианным треугольником точки пересечения этих прямых. Так, например, чевианный треугольник точки пересечения медиан является треугольником образованным средними линиями исходного треугольника.

Как мы уже отмечали, если треугольник, образованный основаниями медиан или высот, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный. С другой стороны, если чевианный треугольник точки пересечения биссектрис (центра вписанной окружности) равнобедренный, то необязательно исходный треугольник является равнобедренным.

Исследование этого вопроса для случая антибиссектрис даёт нам вполне однозначный ответ. Антибиссектрисы не дают нам контрпримеров, и с учётом упражнения 5 верна следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда треугольник, образованный основаниями его антибиссектрис, также равнобедренный.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы уже обсудили, что доказательство «необходимости» составляет суть упражнения 5, которое мы оставляем читателям.

Остаётся предложить алгебраическое доказательство «достаточности», а именно: если треугольник, образованный основаниями антибиссектрис, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный.

Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие углы,  $A, B, C$  — соответствующие вершины,  $A_1, B_1, C_1$  — основания антибиссектрис.

Предположим, что  $A_1C_1 = A_1B_1$ .

Из упражнения 2 следует, что

$$BA_1 = \frac{ab}{b+c}, \quad CA_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad BC_1 = \frac{cb}{a+b}, \quad CB_1 = \frac{bc}{a+c}.$$

Применим теорему косинусов к треугольникам  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ . Учтём, что  $A_1C_1 = A_1B_1$ , получим

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{ab}{b+c}\frac{bc}{a+b}\cos\beta = \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - 2\frac{ac}{b+c}\frac{bc}{a+c}\cos\gamma.$$

Применим теорему косинусов к исходному треугольнику  $ABC$ . Имеем

$$2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{и} \quad 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Сделаем подстановку и получим

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - \frac{b^2(a^2 + c^2 - b^2)}{(b+c)(a+b)} = \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(b+c)(a+c)}.$$

Теперь нам следует перенести слагаемые в одну часть уравнения (например, левую), привести к общему знаменателю, разложить числитель на множители и приравнять его к нулю. Поскольку эти выкладки носят громоздкий, технический характер, их опустим и приведём лишь разложение числителя на множители. В настоящее время такие выкладки можно провести не только исписав несколько листов бумаги, но также применив онлайн калькуляторы. Итак, мы получаем равенство

$$a(b-c)(b+c)(a^5 + a^4b + a^2b^3 + ab^4 + a^4c + a^3bc + a^2b^2c + 3ab^3c + 2b^4c + a^2bc^2 + 4ab^2c^2 + 2b^3c^2 + a^2c^3 + 3abc^3 + 2b^2c^3 + a^2b^2c + ac^4 + 2bc^4) = 0,$$

возможное только при  $b = c$ . Следовательно, исходный треугольник является равнобедренным.

Тем самым теорема 2 доказана.  $\square$

Фактически мы получаем неисчерпаемый материал для исследования ситуаций, когда из равнобедренности чевианного треугольника следует равнобедренность исходного треугольника. Конечно, в данном случае необходимо рассматривать не произвольные точки, а так называемые «центры» треугольника. С энциклопедией центров треугольника Кларка Кимберлинга можно ознакомиться на сайте

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

В настоящее время она насчитывает более 5000 центров треугольника.

Результаты по чевианным треугольникам точек Жергонна, Нагеля и Лемуана можно найти в [10]. Здесь мы сообщим, что из равнобедренности чевианного треугольника точки Жергонна или точки Нагеля следует равнобедренность исходного треугольника. В случае равнобедренности

чевианного треугольника точки Лемуана удаётся построить контрпример, т. е. существует разносторонний треугольник, у которого чевианный треугольник точки Лемуана является равнобедренным.

В заключение мы рассмотрим эту задачу для чевианного треугольника точек Брокера.

### III

Напомним определение. Точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри треугольника  $ABC$ , называются *первой и второй точкой Брокера*, если выполнены равенства  $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$  и  $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$  соответственно (см. рис. 1).

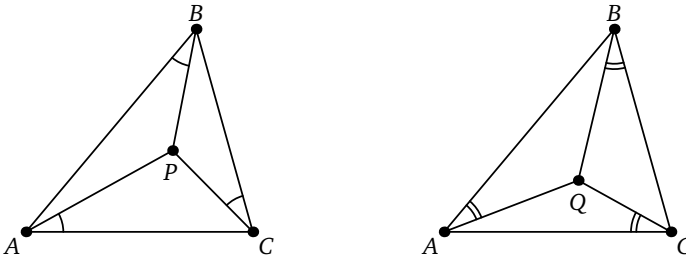


Рис. 1

УПРАЖНЕНИЕ 8. Пусть чевиана, выходящая из вершины  $B$  и проходящая через первую точку Брокера  $P$  треугольника  $ABC$ , пересекает  $AC$  в точке  $B_1$  (см. рис. 2). Длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a, b, c$ . Найдите  $CB_1$ .

Несмотря на простоту формулировки, найти ответ на поставленный вопрос не так-то легко. При этом использовать определение точек Брокера не вполне удаётся. Всё встаёт на свои места, как только мы сделаем дополнительные построения.

РЕШЕНИЕ. Пусть  $CB_1 = x$ .

Построим на сторонах треугольника  $ABC$  во внешние стороны треугольники, подобные исходному, так что

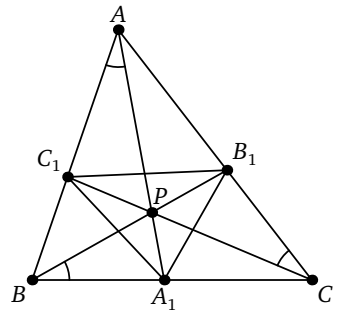


Рис. 2

$$\triangle ABC \sim \triangle B_2CA \sim \triangle BCA_2 \sim \triangle BC_2A,$$

при этом  $BC \parallel AB_2$ ,  $AB \parallel A_2C$ ,  $AC \parallel BC_2$  (см. рис. 3).

Тогда имеем  $\frac{AB_2}{AC} = \frac{AC}{BC}$ , следовательно,  $AB_2 = \frac{b^2}{a}$ .

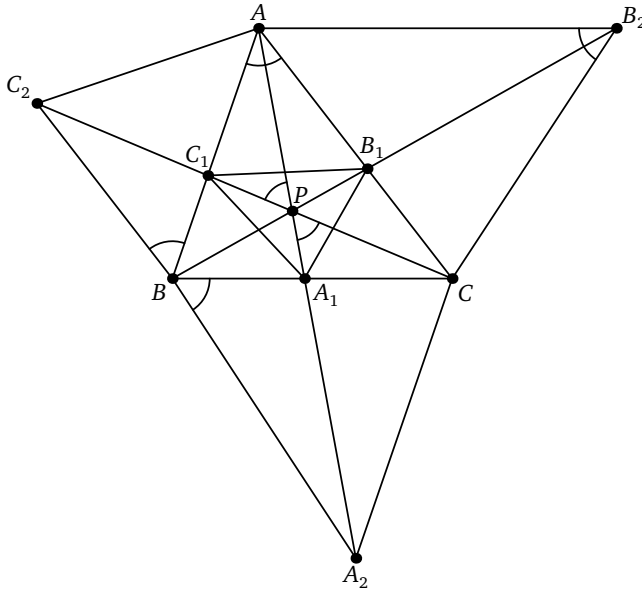


Рис. 3

При таком построении также получаем, что  $\triangle AB_2B_1 \sim \triangle CBB_1$  (см. [1], [4, стр. 50–51]). Тогда  $\frac{AB_2}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C}$ , следовательно,  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b-x}{x}$ . В итоге

$$CB_1 = x = \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad AB_1 = b - x = \frac{b^3}{a^2 + b^2}.$$

Рассматривая другие пары подобных треугольников, найдём, что

$$AC_1 = \frac{cb^2}{b^2 + c^2}, \quad C_1B = \frac{c^3}{b^2 + c^2}, \quad A_1B = \frac{ac^2}{a^2 + c^2}, \quad CA_1 = \frac{a^3}{a^2 + c^2},$$

где точки  $A_1$  и  $C_1$  определены аналогично  $B_1$ . Построим чевианный треугольник первой точки Брокера  $P$ . Посмотрим, при каких условиях он может быть равнобедренным (см. рис. 3).

Используем метод, который мы уже применяли в теореме 2.

Применим теорему косинусов к исходному треугольнику  $ABC$ . Имеем

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{и} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Применяя теорему косинусов к треугольникам  $A_1B_1C$ ,  $A_1BC_1$  и  $AB_1C_1$ , найдём

$$A_1B_1^2 = \left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{a^2 + c^2}\right)^2 - 2\frac{a^2b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^3}{a^2 + c^2} \cos \gamma =$$



$$= \left( \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left( \frac{a^3}{a^2 + c^2} \right)^2 - \frac{a^4(a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.$$

Аналогично

$$A_1 C_1^2 = \left( \frac{c^3}{b^2 + c^2} \right)^2 + \left( \frac{ac^2}{a^2 + c^2} \right)^2 - \frac{c^4(a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)},$$

$$B_1 C_1^2 = \left( \frac{b^3}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left( \frac{cb^2}{b^2 + c^2} \right)^2 - \frac{b^4(b^2 + c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}.$$

Если исходный треугольник  $ABC$  равносторонний, т. е.  $a = b = c$ , то первая и вторая точки Брокера совпадают с центром треугольника и очевидно, что их чевианный треугольник правильный.

Для простоты изложения в дальнейших рассуждениях будем считать, что треугольник  $ABC$  не является равносторонним.

Предположим, что чевианный треугольник первой точки Брокера  $P$  является равнобедренным.

Рассмотрим случай, когда  $A_1 B_1 = A_1 C_1$ . Получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left( \frac{a^3}{a^2 + c^2} \right)^2 - \frac{a^4(a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} = \\ = \left( \frac{c^3}{b^2 + c^2} \right)^2 + \left( \frac{ac^2}{a^2 + c^2} \right)^2 - \frac{c^4(a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Теперь нам следует перенести слагаемые в одну часть уравнения, привести к общему знаменателю, разложить числитель на множители и приравнять его к нулю. Если проделать эти вычисления, то в числителе мы получим выражение

$$b^2(a^2 + c^2)(-a^6 b^4 + a^2 b^6 c^2 - 2a^6 b^2 c^2 - a^4 b^2 c^4 + 3a^2 b^4 c^4 - 2a^6 c^4 + b^6 c^4 + a^2 b^2 c^6).$$

Введём обозначение для множителя, являющегося многочленом от трёх переменных

$$F(a, b, c) = -a^6 b^4 + a^2 b^6 c^2 - 2a^6 b^2 c^2 - a^4 b^2 c^4 + 3a^2 b^4 c^4 - 2a^6 c^4 + b^6 c^4 + a^2 b^2 c^6.$$

Если

$$A_1 B_1 = A_1 C_1,$$

то

$$F(a, b, c) = -a^6 b^4 + a^2 b^6 c^2 - 2a^6 b^2 c^2 - a^4 b^2 c^4 + 3a^2 b^4 c^4 - 2a^6 c^4 + b^6 c^4 + a^2 b^2 c^6 = 0.$$

Для случаев  $A_1 B_1 = B_1 C_1$  и  $B_1 C_1 = A_1 C_1$  мы получим аналогичные соотношения, отличающиеся лишь циклической перестановкой переменных.

Итак, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 3 (1).** *Чевианный треугольник первой точки Брокера является равнобедренным, если стороны треугольника удовлетворяют одному из трёх соотношений:*

$$F(a, b, c) = 0, \quad F(b, c, a) = 0, \quad F(c, a, b) = 0.$$

Более того, можно убедиться, что в равнобедренном треугольнике, который не является равносторонним, чевианные треугольники его точек Брокера *не являются* равнобедренными.

**УПРАЖНЕНИЕ 9.** Докажите, что если  $b = c \neq a$ , то

$$A_1B_1 \neq A_1C_1, \quad A_1B_1 \neq A_1C_1, \quad A_1B_1 \neq A_1C_1.$$

Для решения упражнения достаточно повторить доказательство теоремы 3, рассмотрев соответствующие разности квадратов сторон чевианного треугольника точки Брокера. Необходимые вычисления можно провести, используя рис. 4 к упражнению 10.

Приведём пример разностороннего треугольника, у которого чевианный треугольник первой точки Брокера является равнобедренным. Для этого в соотношении  $F(a, b, c) = 0$  достаточно положить  $b = 2$  и  $c = 1$ . Чтобы найти  $a$ , необходимо решить уравнение  $13a^6 + 2a^4 - 58a^2 - 32 = 0$ . С помощью замены переменной оно сводится к кубическому уравнению, которое можно решить, используя формулы Кардано. Нетрудно проверить, что оно имеет положительный действительный корень  $a \approx 1,5094556$ . При этом неравенства треугольника будут выполнены.

Рассуждения, которые мы проводили для первой точки Брокера, можно проделать и для второй точки Брокера. Аналогично мы можем построить на сторонах треугольника  $ABC$  во внешние стороны треугольники, подобные исходному, так что

$$\triangle ABC \sim \triangle CAB_4 \sim \triangle C_4AB \sim \triangle CA_4B,$$

при этом  $BC \parallel AC_4$ ,  $AB \parallel CB_4$ ,  $AC \parallel BA_4$ . Надеемся, что читатель самостоятельно нарисует соответствующий рисунок при таком описании. Тогда точка  $Q$  будет общей точкой пересечения прямых  $AA_4$ ,  $BB_4$  и  $CC_4$  с чевианным треугольником  $A_3B_3C_3$ . Проведя аналогичные вычисления, найдём длины отрезков

$$AB_3 = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}, \quad CB_3 = \frac{b^3}{b^2 + c^2}, \quad AC_3 = \frac{c^3}{a^2 + c^2},$$

$$C_3B = \frac{ca^2}{a^2 + c^2}, \quad A_3B = \frac{a^3}{a^2 + b^2}, \quad CA_3 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Если мы потребуем, чтобы чевианный треугольник второй точки Брокара был равнобедренным, то придём к соотношениям, которые аналогичны соотношениям из теоремы 3(1), они отличаются только порядком переменных.

**ТЕОРЕМА 3 (2).** *Чевианный треугольник второй точки Брокара является равнобедренным, если стороны треугольника удовлетворяют одному из трёх соотношений:*

$$F(a, c, b) = 0, \quad F(b, a, c) = 0, \quad F(c, b, a) = 0.$$

Возникает естественный

**Вопрос:** *если чевианный треугольник первой точки Брокара равнобедренный, то будет ли равнобедренным чевианный треугольник второй точки Брокара?*

Ответ на этот вопрос отрицательный.

При решении соответствующей системы из двух соотношений мы получим, что решение возможно, только если обе точки Брокара совпадают, и мы получаем, что исходный треугольник является равносторонним.

Действительно, предположим, что выполнено

$$\begin{cases} F(a, b, c) = 0, \\ F(a, c, b) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$0 = F(a, b, c) - F(a, c, b) = (b^2 - c^2)(a^6b^2 + a^6c^2 + a^4b^2c^2 + b^4c^4).$$

Значит,  $b = c$  и из  $F(a, b, b) = 0$  следует, что  $a = b = c$ .

Поскольку

$$F(a, b, c) - F(b, a, c) = (b^2 - a^2)(a^4b^4 + 3a^4b^2c^2 + 3a^2b^4c^2 + 3a^4c^4 + 7a^2b^2c^4 + 3b^4c^4)$$

и

$$F(a, b, c) - F(c, b, a) = (c^2 - a^2)(b^2 + c^2)(a^2 + b^2)(a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2),$$

в оставшихся случаях мы получим тот же результат.

Мы видим, что при исследовании равнобедренности чевианных треугольников точек Брокара мы получаем ситуацию, существенно отличающуюся от известных нам ранее. По всей видимости, это связано с тем, что точки Брокара зависят от вершин «несимметрично». С другой стороны, определение середины отрезка между точками Брокара более симметрично. И ситуация «исправляется», если мы рассмотрим чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара.

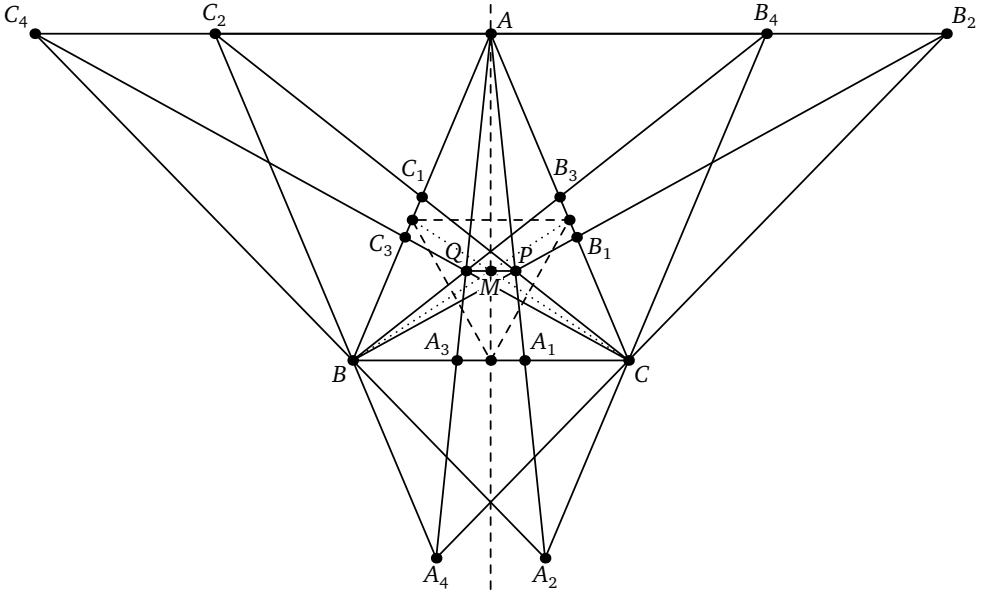


Рис. 4

УПРАЖНЕНИЕ 10. Докажите, что в равнобедренном треугольнике чевианный треугольник середины отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокера, является равнобедренным.

РЕШЕНИЕ. Поскольку исходный треугольник равнобедренный (рис. 4), его первая и вторая точки Брокера симметричны относительно оси симметрии. Следовательно, точка  $M$ , являющаяся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокера, будет лежать на этой оси. Тогда, в силу симметрии, чевианный треугольник точки  $M$  будет равнобедренным.

Для самостоятельного исследования предлагаем читателям следующую задачу.

ЗАДАЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ. Про треугольник известно, что в нём чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокера, является равнобедренным. Верно ли, что данный треугольник также равнобедренный?

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аюпян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.
- [3] Квант. № 6, 2006, решение М2001.

- [4] *Прасолов В. В.* Точки Брокара и изогональное сопряжение. Сер. «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 4. М.: МЦНМО, 2012.
- [5] *Челябов И. М., Бакмаев Ш. А.* Вариации на тему «Треугольник Шарыгина» // Математика в школе. 2006. № 10, С. 66–68.
- [6] *Челябов И. М.* О некоторых геометрических задачах // Вестник Дагестанского государственного университета. Естественные науки. Вып. 4. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.
- [7] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия // Библиотечка Квант. № 17, 1982.
- [8] *Шарыгин И. Ф.* Вокруг биссектрисы // Квант. № 8, 1983.
- [9] Mathematics Competitions. 2006. V. 19, № 1. P. 46.
- [10] *Zhuravlev V., Samovol P.* Counterexamples for Cevian Triangles // Mathematics Competitions. 2013. V. 26, № 2.
- [11] <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.

---

В. М. Журавлёв, ОАО «Туполев», Москва, Россия  
zhuravlevvm@mail.ru

П. И. Самовол, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel  
pet12@012.net.il



---

---

# Преподавание математики

---

---

## Научное творчество школьников: где миф и где реальность?

А. Я. Белов

*Посвящается памяти Р. В. Плыкина,  
организатора и вдохновителя  
Всероссийской конференции учащихся  
«Юность, наука, культура»*

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Во внешкольной работе по математике распространено два подхода. Большая часть внеклассной работы школьников прямо или косвенно связана с олимпиадами или иными соревнованиями по решению чётко поставленных задач в жёстких временных рамках. Даже если руководитель кружка заявляет, что не занимается подготовкой к олимпиадам, материалы кружка в большой степени основаны на олимпиадных задачах. Олимпиадный подход имеет свои достоинства и недостатки, ему посвящена статья [2].

Второй подход представляет собой проектную деятельность и тесно связан с научными конференциями учащихся. Проектный подход, в отличие от задачного подхода, менее специфичен для математики, и выработанные умения легче переносятся и на другие науки. Научные конференции школьников зачастую проводятся сразу по нескольким предметам, математика при этом является одним из направлений. Они являются альтернативной формой деятельности, позволяющей увидеть и развить в школьнике полезные для научной работы качества, которые олимпиады не раскрывают. Эти

два подхода взаимно дополнительные. Надо стремиться к тому, чтобы преподаватели, исповедующие тот или иной подход, не конкурировали между собой, а сотрудничали, понимали друг друга. В выигрыше окажется ученик.

Автор более 10 лет был руководителем математической секции конференции «Поиск», проходившей в ДНТТМ (Доме научно-технического творчества молодёжи), филиале Московского городского дворца детского (юношеского) творчества, а также членом экспертного совета Всероссийской конференции учащихся «Юность, наука, культура», проходившей по инициативе Р. В. Плыкина. Кроме того, автор свыше 20 лет являлся руководителем проектов на Летней конференции турнира городов. Данная статья — попытка осмыслить, систематизировать и передать опыт работы, он относится к конференциям по математике, но многие аспекты являются общими и важными для научных конференций школьников и по другим предметам.

**Структура статьи.** После истории вопроса мы обсуждаем академические ценности, для достижения которых особенно полезна проектная деятельность. Затем обсуждаются критические замечания, методика проведения, в особенности стратегические вещи — принципы организации жюри и оценки докладов. В заключение говорится о перспективах.

**История вопроса.** В конце 1920-х — начале 1930-х годов А. Н. Колмогорову (в соответствии со стилем школы Н. Н. Лузина) удалось провести реформу профессионального математического образования.

Студенты сразу, начиная с первых курсов, получали собственно университетское образование, на старших курсах зачастую делали свою первую научную работу, аспирантура же была сфокусирована не на учёбе, а на научной работе. С явным одобрением об этом упоминал Л. С. Понтрягин в [8, стр. 9–11]. И даже сейчас многие студенты мехмата МГУ, при всех современных трудностях, делают свою первую научную работу на старших курсах, чего в помине нет в известных автору западных университетах.

Интерес к научной работе студентов, а также развитие системы внеклассной работы со школьниками породили вопрос о возможности научной или хотя бы преднаучной работы школьников и её организационных формах. В тридцатые годы XX века в связи с ускорением развития страны была развёрнута система внешкольной работы и поддержки детского творчества. Примечательно, что решение о её создании было принято на самом высоком уровне. Конференции школьников постепенно выкристаллизовывались из этой системы.

В западных университетах на первых курсах происходит исправление недостатков школьного образования и пополнение необходимых базисных знаний, на старших курсах студенты по существу только начинают осваи-



вать науку как таковую. Срок аспирантуры больше, чем в России, и первая её половина тратится опять же на учёбу, а сама научная работа протекает, как правило, на последних годах аспирантуры и во время «постдока». В этой связи для западных студентов приобретают большее значение олимпиады (как школьные, так и студенческие) и оказывается полезен опыт российских конференций школьников.

Вот один только пример. В. М. Тихомиров и автор работали (в разное время) в Jacobs University Bremen, где вели курс «Perspectives in mathematics», созданный Д. Шляйхером. Студент оценивался по курсовой работе (term paper). Оказалось, что деятельность в обоих случаях была чрезвычайно похожа на работу научного руководителя доклада школьника (одна из таких студенческих работ опубликована в «Математическом просвещении», см. [3]). То же относится и к курсу, который вёл автор в Бар-Иланском университете.

Интересно, что вначале кружки мехмата МГУ были основаны на докладах школьников. Современный тип мехматского кружка для школьников является гениальным изобретением Д. О. Шклярского и есть следствие реформы, им проведённой ещё до войны. Кружок, основанный на решении задач, стал достаточно эффективным и принёс замечательные результаты. Но вместе с тем обучение некоторым сторонам деятельности математика весьма неудобно проводить в таком формате, так что актуальным стал поиск дополнительных форм работы.

**Сложившаяся ситуация.** Сейчас проводится целый ряд научных конференций школьников, как российских так и международных. Активно действует корпорация Intel ISEF (США)<sup>1)</sup> Упомянем европейские конференции школьников: ICYS<sup>2)</sup>, EuCYS<sup>3)</sup>.

Всё большее распространение (в том числе — по разнарядке «сверху») получают ежегодные школьные научные конференции (организуемые, как правило, самими учителями), призванные продемонстрировать успехи в приобщении учащихся к «исследовательской работе» в результате внедрения метода проектов. Конференциям посвящены работы [1, 6, 7, 13]. Следует осмыслить сложившуюся ситуацию, сформулировать принципы проведения конференций учащихся<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> <http://www.societyforscience.org/>.

<sup>2)</sup> <http://metal.elte.hu/~icys/>.

<sup>3)</sup> [http://ec.europa.eu/research/youngscientists/index\\_en.cfm](http://ec.europa.eu/research/youngscientists/index_en.cfm).

<sup>4)</sup> В 1990-е годы автор проводил конференцию «Поиск», проходившую следующим образом. Автор стремился приглашать сильное и разноплановое жюри. В нём неоднократно принимали участие Н. А. Бобылев, Н. Б. Васильев, А. И. Галочкин, А. А. Егоров, А. А. Заславский, А. Г. Кулаков, В. Н. Латышев, Н. Г. Мощевитин, В. В. Произволов, Г. Б. Шабат. Доклады проходили в два дня. Рабочий день состоял из трёх частей: а) до-

**Благодарности.** Автор признателен А. К. Ковальджи, А. И. Сгибневу, Б. Р. Френкину за полезные обсуждения. Особая признательность — Н. Х. Розову за полезные обсуждения и поддержку.

## § 2. ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ И КОНФЕРЕНЦИИ УЧАЩИХСЯ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

В проектной деятельности отношения с учителем определяются тем, что ученик сам выбирает себе руководителя и участвует в выборе темы. Учитель превращается в консультанта и старшего коллегу, а не просто тренера. В идеале наблюдается сотворчество учащегося и научного руководителя. При исследовательском подходе к обучению ученик участвует в постановке вопросов, выдвигает гипотезы, которые сам доказывает или опровергает. Полученный ответ может служить основанием для новых вопросов. Результат может быть неизвестен заранее как ученику, так и учителю. В этом особенность хорошей исследовательской задачи. Работа над ней может идти от нескольких дней до нескольких лет. Очень хорошо, когда используются разнообразные методы и есть простор для частичных продвижений и уточнений, постановки вспомогательных задач. Невозможно придумать сразу несколько идей одновременно, их надо получить по одной, работая с более простыми ситуациями. К сожалению, спортивный подход, довлеющий над многими олимпиадами [2], приводит к тому, что частичные продвижения очень плохо оцениваются. В результате интеллект развивается, порой весьма значительно, однако при этом человек разучается мыслить глубоко, со всеми вытекающими последствиями, в том числе академическими.

Методика организации исследовательской работы для начинающих изложена в книге [12], см. также [1, 7, 11]. Несколько слов о работе с более продвинутыми людьми (школьниками или студентами). Очень хорошо, если первая работа основана на красивой задаче с понятной мотивировкой, и очень плохо, когда для первой работы руководитель просит подсчитать нечто, а для чего — пока непонятно. Первая работа должна оставить ощущение красивого успеха, чего-то праздничного. Трудные будни — потом, и риск — потом. Задача должна быть не слишком простой (неинтересно), но и не слишком сложной — чтобы человек не сломался. Если всё же есть подозрения, что задача чрезмерно сложна, руководитель должен отслеживать ситуацию и активно помогать. Очень хорошо, когда складываются деловые отношения — ученик с учителем вместе хотят получить конкрет-

---

клады школьников, б) доклады студентов (по темам, понятным школьникам; цель — дать представление о реальной научной работе), в) круглый стол — члены жюри предлагали участникам конференции задачи для самостоятельного исследования.

ный результат. Такие отношения обеспечивают подлинное уважение. В последнее время вышло несколько книг, посвящённых исследовательским задачам для школьников и методике работы с ними, например, [4, 12, 14]. Сравнения конференций и олимпиад посвящена работа [6].

Задачный подход, при всей своей эффективности, сыграл и отрицательную роль. Методика проектной деятельности учащихся не очень разработана, а система — недостаточно развита. Возможно, при более развитой системе можно получать серьёзные научные результаты у старшеклассников значительно чаще, чем сейчас. В этой связи полезен педагогический опыт Н. Н. Лузина. Согласно воспоминаниям Л. С. Понтрягина [8, стр. 9–11], педагогический подход Н. Н. Лузина состоял в следующем. Первоначальной целью ставилось как можно более быстрое получение научного результата. При этом выбиралась область математики, с одной стороны, достаточно значимая, с другой — не требовавшая обширных знаний. В 1920–30-е годы это была теория множеств, а также теория функций действительного переменного. (В наше время вместо теории множеств можно использовать, например, такую область, как комбинаторика — в частности, комбинаторика слов, — учитывая значительное число бывших олимпиадников.) Такой подход имел очевидные плюсы — человек, получивший научный результат, приобретал внутреннюю опору. С другой стороны, была опасность замкнуться в узкой области<sup>5</sup>).

Перечислим факторы, создающие потребность в организации проектной деятельности учащихся.

1. Необходимость развивать не только «пробивные» возможности, но и исследовательские, творческие качества, креативность.
2. Есть школьники-«спринтеры», которые любят быстро решить задачу на олимпиаде и потом отключиться от неё. Есть и школьники-«марафонцы», которые долго думают над задачей. Для них больше подходят исследовательские задачи (проекты). (Но и для спринтера очень полезно временами бегать марафон.)
3. Олимпиады плохо приспособлены для «тугодумов». Отчасти этим объясняется то, что некоторые специалисты относятся к олимпиадам скептически. В своё время П. С. Александров говорил, что если бы он участвовал в математической олимпиаде, то практически не имел бы шансов

---

<sup>5</sup> Человек зачастую не имеет ресурсов на долгую учёбу. Очень важно, чтобы помимо «профессиональных» учёных (т. е. зарабатывающих профессией) были бы и учёные-«любители» (зарабатывающие на жизнь иначе). Помимо самих научных результатов, это поднимает общественную культуру. Иногда кто-то может прийти в математику и в относительно зрелом возрасте. Им важно быстро получить результаты. Тем самым подход Н. Н. Лузина, связанный с относительно быстрым получением первого результата, становится весьма актуальным.

- получить приз, поскольку может размышлять только в одиночестве, при отсутствии кого-либо рядом, и не способен «думать на время», решить задачу к заранее установленному сроку. (См. также п. 7.)
4. Кроме собственно решения задач, большое значение имеет ещё «домостроительство», то есть воспитание теоретического мышления, развитие изобретательности, построение теорий и конструкций.
  5. Очень важна практика в подробном разборе и осмыслении чужих работ, а также самостоятельном изложении материала. Из попыток «только просто и доступно» изложить имеющийся материал часто возникали очень серьёзные открытия (например, уравнение Шрёдингера, схемы Дынкина).
  6. Существенную роль играет возможность приобщения к экспериментальной математике, развивающего эвристическое мышление и воображение.
  7. Хорошо известно, что даже сложная олимпиадная задача становится более доступной при длительном поиске её решения, особенно при работе в команде.
  8. Научные конференции обеспечивают более плавный переход от олимпиад к научной деятельности. Отсутствие такого перехода приводит к появлению неудачников среди способных студентов.
  9. На конференциях встречаются ученики, успешные по разным предметам, бывают и комплексные доклады. Конференции являются чрезвычайно полезными в плане межпредметных связей, что важно в дальнейшей деятельности.
  10. Необходимость привлечения учёных к работе с молодёжью, что не происходит в достаточной степени на современных олимпиадах [2].

**Критика.** Несмотря на вышеперечисленное, можно встретить резко отрицательные отзывы о конференциях учащихся вплоть до утверждений о «профанации научной работы». Понимая пристрастность и несправедливость таких утверждений, следует всё же выделить в них рациональное зерно.

1. Одно из главных критических замечаний звучит так: *«Очень мало учащихся получают значимые научные результаты».*

Однако если обратиться к олимпиадам, то большинство их участников не доходит до высшего уровня, с которым и следовало бы сравнить публикабельные результаты участников конференций. В то же время без основания невозможна вершина: ведь уничтожив олимпиады несложного уровня, мы опустим и высокий уровень. Так же и в научной работе: чтобы прийти к вершинам, необходимы промежуточные результаты, пусть сначала и весьма скромные. Хотелось бы отметить, что перед начинающим школьником

не следует сразу ставить особенно трудную задачу — она может отпугнуть, быть может, перспективную личность. Для выявления таких личностей среди школьников и учителей важны именно доклады начального уровня — как и первые этапы олимпиады.

2. К сожалению, современное общество больно, в нём показуха и коррупция проникли во многие сферы жизни, в том числе и в образование, и отнюдь не только в России.

В погоне за имиджем и во исполнение требований начальства, организаторы олимпиад иногда «сливают» решения задач на олимпиадах (в том числе международных, что неоднократно наблюдал автор), а руководители — пишут «доклады» за учеников для конференций или предлагают темы, требующие не размышлений, а лишь создания красочных презентаций. Развелось много школьных псевдонаучных конференций (как, впрочем, и жульнических «олимпиад»), которые только дискредитируют идею, а первые места раздают «своим». Ситуация усугубляется тем, что далеко не все учащиеся и, увы, учителя имеют адекватное представление о научной этике. Тем не менее представляется, что проблемы показухи и коррупции разрешимы и даже далеко не лучшим образом организованные конференции, несмотря на «пену», всё же приносят определённую пользу, ибо с доклада может начаться интерес к предмету.

Что есть достойная (пред)научная деятельность учащегося? Здесь возможны варианты.

1. Детальный разбор и самостоятельное переизложение относительно трудного материала (реферативная работа)<sup>6)</sup>.
2. Разного рода компьютерные эксперименты и поисковые лабораторные работы по математике<sup>7)</sup>.
3. В домашних (психологически спокойных) условиях (тем более, работая в команде) учащийся способен решить существенно более сложную задачу, чем в условиях олимпиады.

Участники конференций должны проходить не только «научную», но и психологическую подготовку. В частности, следует предостерегать от ожидания немедленных или постоянных успехов. Действующие учёные тоже не каж-

---

<sup>6)</sup> Примером нормального доклада (несложного уровня) служит самостоятельное переизложение теоремы ван дер Вардена о раскрасках. Адекватный приз — брошюра А. М. Райгородского, посвящённая раскраскам [9].

<sup>7)</sup> Темы такого рода лабораторных работ тщательно продумывал А. Н. Колмогоров и внедрял их в практику работы школы-интерната при МГУ, которая сегодня носит его имя. Особенно широкие возможности организации лабораторных работ по математике открывает компьютер; см., например, [10].

дый день совершают открытия, есть и «трудовые будни» (техническая работа, доведение известных идей и т. п.). Учащиеся зачастую плохо представляют специфику доклада на конференции, а потому чрезвычайно полезны предварительные консультации (для учеников и учителей) и репетиция доклада.

**Предварительные выводы.** Автору представляется, что:

- Научные конференции удовлетворяют определённые потребности и развивают определённые качества учащихся, невостребованные на олимпиадах.
- Эти потребности и качества нуждаются в дальнейшем осмыслении.
- Формы организации научной или преднаучной деятельности учащихся не устоялись и требуют совершенствования. В целом, однако, значение конференций пока уступает значению олимпиад. Необходимо мыслить широко, изобретать новые формы работы, экспериментировать<sup>8)</sup>.
- Однако несовершенство форм не означает отказа от проведения конференций. Надо прежде всего заботиться о *пользе для учащихся*, а уже потом — о *совершенствовании форм проведения*. Дорогу осилит идущий.

**Позитивный опыт.** Автору представляется весьма успешным опыт проведения организацией «Авангард» научных конференций школьников под руководством Д. В. Андреева, В. А. Тиморина, Е. Н. Филатова (конференция «Интел-Авангард»). Следует упомянуть конференцию «Интел-Юниор», федеральную конференцию «Юность, наука, культура», которую организовывал Р. В. Плыкин, конференции лицея «Вторая школа» (под руководством П. В. Бибикова, А. К. Ковальджи, К. В. Козеренко), СУНЦ МГУ («Колмогоровские чтения»), лицея 1502, школы-интерната «Интеллектуал», чтения им. Вернадского, конференцию «Шаг в науку», организуемую МФТИ, и др. Лабораторными работами и компьютерными экспериментами успешно занимаются школьники на кружке Г. Б. Шабата «Клуб экспериментальной математики». В 1970–80-е годы (до распада СССР) функционировал замечательный фестиваль науки в г. Батуми, вдохновителем которого была заслуженный педагог Аджарии Медея Жгенти. В работе фестиваля принимали участия члены редколлегии журнала «Квант», известные математики. Отчёт о работе фестиваля регулярно публиковался

<sup>8)</sup> В школе всячески надо пропагандировать привлечение школьников к докладам. Если ученик 8 класса делает доклад «Золотое сечение» (чисто реферативный — пересказывает то, что прочитал и разобрал по «наводке» учителя), то это очень хорошо. Он учится самостоятельно читать математическую литературу (пусть для начала — популярную), учится её понимать, учится выступать, слушать и отвечать на вопросы, объяснять другим непонятное им. Остальные школьники учатся внимательно слушать, понимать «со слуха», задавать вопросы.

в «Кванте». В 1990-е годы конференции школьников проводил замечательный педагог В. В. Бронфман. Данный список неполон и автор приносит извинения тем, кого он не упомянул.

Достаточно совершенной организационной формой служит международная Летняя конференция Турнира городов (ЛКТГ) [5], замечательное изобретение Н. Н. Константинова. Школьникам в условиях выездного мероприятия предлагают многошаговые исследовательские задачи. Это является переходом от олимпиад к научной деятельности. В своё время существовал также заочный конкурс ЛКТГ. К сожалению, он заглох. Одна из причин — малое, казалось бы, число участников. Однако более важной была подводная часть айсберга — многие школьники вместе с учителями использовали заочный конкурс для подготовки докладов вне рамок ЛКТГ<sup>9)</sup>.

Долгое время автор весьма скептически относился к возможности преднаучной деятельности учащихся средних классов школы, тем более неспециализированной. Возможно потому, что сам автор сложился в рамках задачного подхода, заданного Д. О. Шклярским. Тем не менее работа А. И. Сгибнева [12] и опыт Красноярской летней школы заставили пересмотреть эту точку зрения. Была убедительно продемонстрирована возможность и важность проектной деятельности в данной возрастной группе. Педагогические задачи проектной деятельности и её методика достаточно хорошо изложены в работе [12]. Там же довольно много рассказывается и об организационных моментах.

### § 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОВЕДЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИЙ

Некоторые утверждения данной статьи профессиональному математику покажутся очевидными. Однако, с одной стороны, о любом часто встречающемся недостатке надо писать, уделяя ему внимание с целью предупреждения или минимизации. Например, математику очевидно, что докладчик *может пользоваться* внешней помощью со стороны учителей, родителей, товарищей, но обязан это оговорить на докладе. Если же этот принцип не разъяснить, то фактор помощи будет просто скрываться, возникнут неэтичные поступки. С другой стороны, организатор олимпиад, столкнувшись с таким гораздо менее формализованным мероприятием, как научная конференция, зачастую проявляет профессиональный снобизм

---

<sup>9)</sup> Здесь уместно упомянуть удачно найденную И. М. Гельфандом форму работы созданной им в 1964 году Всесоюзной заочной математической школы. Эта форма получила название «коллективный ученик» и позволяла учителям отдалённых школ заниматься вместе со своими учениками по программе ВЗМШ и тем самым повышать свою квалификацию.

(а иногда — и ревность). Весьма непроста проблема разношёрстности докладов. Они бывают совершенно разных типов (см. п. 3.3) и, соответственно, должны по-разному оцениваться (но есть и общие требования). Есть и общие принципы организации работы жюри.

### 3.1. ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ ЖЮРИ

1. Ответственность по отношению к учащимся. Не надо учащимся «подставлять». Например, сам учащийся может неадекватно оценивать свою работу и её изложение, так что требование выкладывать работу на сайте [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) в качестве предварительного условия окажется провокационным. (Выкладывать работу на таком сайте лучше по решению жюри после конференции.)
2. Доброжелательность к учащимся. Жюри не должно самоутверждаться за их счёт, в частности, проявлять снобизм. Необходима доступность в общении, не следует строить из себя небожителей<sup>10)</sup>.
3. Адекватность отбора докладов. Предварительный отсев докладов должен быть *максимально мягким*, надо твёрдо отсекал лишь «уфологию» и совсем слабые работы. Следует доверять известным специалистам и принимать работы по их рекомендации. Относительно слабый доклад может оказаться полезен как участнику, так и его научному руководителю, если они воспользуются советами жюри о направлении дальнейшей работы<sup>11)</sup>.

Относительно более слабым докладам (конечно, не сообщая заранее об их «слабости») в интересах слушателей можно выделить меньше времени, что является практикой также «взрослых» конференций. Полезно организовать стендовые доклады.

4. Легитимность жюри. Формирование жюри одним лидером, особенно авторитарным, приводит к разного рода подозрениям. Желательно обеспечить представительство из разных организаций, и хорошо, когда есть возможность обеспечить представительство из разных городов.

<sup>10)</sup> Это качество при проведении математических олимпиад всегда проявлял (и требовал того же от своих помощников) А. Н. Колмогоров, демонстрируя полную готовность беседовать на любую тему с любым участником.

<sup>11)</sup> Подчеркнём ещё раз, что работы начального уровня, подобно первым этапам олимпиады, несут чрезвычайно важную функцию *выявления* перспективных личностей — среди школьников и учителей. Эти люди нуждаются в поощрении за честно выполненные работы, пусть и скромные по меркам высокого профессионала. Кроме того, при организации конференции, особенно при первом её проведении, чтобы заполучить докладчиков, следует лично обращаться к людям, проявляющим соответствующую активность. Но такие просьбы *накладывают определённые обязательства*, в частности *необходимость уважать рекомендации*.



5. Член жюри (особенно председатель) должен избегать голосования по работам своего подопечного и тем более их не «пробовать».
6. Конференция — это, прежде всего, *праздник науки*. Сначала надо *искать позитив в содержании работ* (хотя о недоработках, разумеется, следует сообщать учащимся), а *потом уже оценивать форму изложения*. Учить изложению — задача научного руководителя, а не жюри. Сегодняшняя школа грамотному и логичному изложению материала учит плохо; тесты и другие распространённые формы проверки знаний усугубляют ситуацию. Школьники (и, кстати, студенты) в этом не виноваты, и к ним тут недопустимо придирается<sup>12)</sup>.
7. Стиль требований и их уровень у разных людей различаются. Довольно часто бывает, что те же требования, которые человек предъявляет к себе или своим ученикам, он распространяет и на участников конференции. Это иногда весьма неуместно. Следует напоминать жюри, что участники могут быть чрезвычайно чувствительны к оценкам их выступлений, и призывать к осторожности<sup>13)</sup>.
8. Оценка учащегося должна определяться *позитивными аспектами*: творческими достижениями, красивыми идеями (в том числе методическими), оригинальностью изложения. Не будем забывать, что главная проблема научного сообщества отнюдь не в недостатке пуританской строгости изложения, а в потоке тривиальных результатов, банальных идей и неинтересных статей. Это во многом связано с погоней за числом публикаций и всякого рода сомнительными индексами.
9. Разумное число докладов. Оптимальное — примерно 20–25, а если их меньше 10, то это, скорее, неудача.

### 3.2. ОРГАНИЗАЦИЯ ДОКЛАДОВ

**Общие требования.** Вне зависимости от уровня доклада и его типа, к докладу следует предъявлять следующие требования:

1. Доклад должен быть *честным*. Конечно, допустимы как переизложение чужих результатов и компиляция, так и смешанные формы

---

<sup>12)</sup> А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд помогли своим студентам написать их первые работы, вплоть до создания текстов. С другой стороны, автору известен возмутительный случай, когда студент несколько лет писал пятистраничную статью. Научный руководитель, вместо оказания помощи, его ругал, тогда как часовая беседа автора со студентом поправила ситуацию.

<sup>13)</sup> Кроме того, есть проблема ответственности. Некоторые педагогические идеи могут показаться разумными, а их несостоятельность становится очевидной в процессе реализации, например, когда уходят практически все ученики или они вообще покидают математику.

с изложением части своих результатов. Допустима помощь родителей, товарищей, учителей и т. д. Но при этом должно быть чётко *объявлено, что сделал сам докладчик* и каков вклад третьих лиц. Докладчик должен также честно изложить историю вопроса и честно упомянуть персоналии. Если в каком-то месте доклада необходимый анализ исчерпывающе не проведён, это следует прямо отметить, гипотезу нельзя выдавать за доказанный факт, преимущества того или иного подхода надо не голословно объявлять, а убедительно мотивировать<sup>14</sup>).

2. Докладчик обязан быть *квалифицированным*, т. е. понимать содержание доклада или хотя бы, как минимум, той части коллективной работы, которую он выполнил (в случае когда доклад *комплексный* — включает как математическую, так и программистскую или естественнонаучную часть). Он должен владеть материалом доклада настолько, чтобы отвечать на вопросы по существу изложенного. Вообще говоря, нужно знать даже больше, чем сказано в докладе, чтобы быть готовым к смежным вопросам. Дефекты в понимании содержания доклада служат весьма существенным его изъяном<sup>15</sup>).
3. Докладчик должен понимать *мотивировку*, уметь отвечать на вопросы, почему то, чем он занимается, естественно, почему и как он выбрал данную тему.
4. Докладчик должен иметь личную точку зрения. Содержание доклада должно быть ему не безразлично, действительно глубоко интересно. В противном случае доклад лучше не делать.
5. Не следует публично решать квадратные уравнения! Доклад — не урок, где автор демонстрирует свои элементарные технические умения с подробным рассказом у доски. Заинтересованным слушателям можно предъявить более подробные материалы<sup>16</sup>).

---

<sup>14</sup>) Каждый может сделать ошибку — в этом нет ничего зазорного. Нарушением научной этики является отказ в исправлении. Автор неоднократно сталкивался с ситуацией, когда школьникам и руководителю указывали на математическую ошибку. Однако она не исправлялась, а докладчик на следующей конференции повторял доклад слово в слово. По мнению автора, это основание для дисквалификации. То же относится и к злостному неказанию источников.

<sup>15</sup>) Бывали ситуации, когда ученик младших классов докладывал «высшую математику». Когда обнаруживалось грубое непонимание им содержания доклада, руководитель школьника атаковал членов жюри, обвиняя их в педагогической некомпетентности, ибо они «не желают делать поправки на возраст». На это надлежит заметить, что руководителю следовало предлагать ученику доступные ему вещи.

<sup>16</sup>) Это *должно быть объявлено* организаторами перед началом конференции. Такое объявление существенно экономит публичное время и улучшает качество выступлений.

6. Докладчик прежде всего должен заботиться о качестве изложения, о понимании слушателями материала и только затем — о произведённом на них впечатлении.

### 3.3. Типы докладов

Опыт показывает, что доклады учащихся можно условно разбить на несколько категорий. Каждый тип докладов предполагает свои критерии качества.

**1. Реферативный доклад.** Распространено предубеждение о «второсортности» такого рода докладов. Однако многие крупные научные результаты возникали просто из попыток привести в порядок уже известный материал. Н. П. Долбилин отмечал, что составление хорошего реферата развивает особые качества, тоже важные для математика. Критерии оценки и требования к такому докладу следующие:

- Насколько самостоятельно организован излагаемый материал (а не буквально переписан из книжки); насколько оригинален путь изложения.
- Насколько интересна тема.

Удачным примером может служить доклад школьника Саши Буфетова по проблеме Варинга, впоследствии опубликованный в журнале «Фундаментальная и прикладная математика». Сейчас А. И. Буфетов — д. ф.-м. н., профессор НИУ ВШЭ и мехмата МГУ).

**2. Тематический набор задач с решениями.** Пошаговое решение набора мелких задач часто путают с научным исследованием, и потому такого рода доклады могут выдаваться за «научные». Школьники зачастую копируют учителей и авторов учебников. В этом случае критерии оценки должны быть иными.

Следует оценивать оригинальность не только решений, но прежде всего самой подборки задач, объединяющие их идеи. Если в качестве доклада заявлен задачник, то у жюри возникают вопросы: смотрел ли докладчик с позиций автора задачника на другие книги и учебные пособия, какие выбраны темы и почему<sup>17)</sup>. Полезно подчеркнуть, что ученик, преподаватель и автор книги по-разному смотрят на одну и ту же книгу: ученика привлекает доступность изложения материала, преподаватель видит методическую реализацию, а автор оценивает, как написана книга.

---

<sup>17)</sup> Создание учебного пособия в форме «многошаговой поднимающейся лестницы» является очень удачным приёмом, стимулирующим интерес и развивающим креативность обучающегося, но и очень трудным делом. В качестве примера стоит упомянуть классическую книгу [15].

**3. Экспериментальная работа.** Обычно она связана с компьютерным моделированием, численным экспериментом и др. В таком докладе оценивается:

- Качество постановки эксперимента.
- Наличие результатов и их анализ, а также корректность использования статистики. (Заметим: лучше честно признать, что статистические исследования не проводились, чем продемонстрировать грубое непонимание их сути.)
- Математическое содержание работы.
- Практическая сторона рассмотренной задачи.
- Методическая часть (в частности, качество программного интерфейса).

Достоинство работ такого рода — в относительной их доступности. Возможны комплексные работы, в которых может присутствовать и естественнонаучная часть. Такие работы легче проводить усилиями целой команды.

**4. Самостоятельное исследование в области чистой математики.** Критерии оценки такой работы — вкус автора, качество постановки задачи, трудность её решения, новизна полученных результатов. Этот тип работ оценивается наиболее высоко. Важно, чтобы докладчик умел чётко объяснять мотивировку и отвечать на смежные вопросы.

Однако полезно иметь в виду следующую возможность манипулирования: учащегося натаскали в некоторой специальной области, указали последовательность утверждений, которые следуют друг из друга относительно несложным образом, и он всё это просто воспроизводит. Поэтому следует выяснить — понимает ли докладчик *мотивировку*.

**Оценка докладов.** Конференция — не олимпиада и не спорт. Ни в коем случае не следует измерять сантиметры и секунды<sup>18)</sup>. Тем не менее важно иметь в виду следующую качественную градуировку:

- Доклад, возможно полезный докладчику и его руководителю. Выдаётся диплом участника.
- Доклад, полезный слушателям. Выдаётся диплом лауреата.
- Доклад, заслуживающий публикации в научном или научно-популярном журнале. Выдаётся условно первая (иногда вторая — в зависимости от уровня) премия. Но это только гарнир к основной награде — публикации.

---

<sup>18)</sup> На конференциях «Поиск» и «Юность, наука, культура» выдавались два типа диплома — «лауреат» и «дипломант». Мы старались не выдавать более высокие дипломы — только в исключительных случаях.

- Получен красивый яркий результат. Выдаётся первая премия (если таких работ несколько — то и первых премий несколько, между собой они *не сравниваются*). Наградой является помощь при публикации.

#### § 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ЧТО И КАК ДЕЛАТЬ?

Какие конкретные шаги можно сейчас предпринять?

- Надо подумать, как привлекать участников-школьников к действительно научным конференциям, откуда и как они могут появляться. Это особенно актуально для отдалённых школ, находящихся вдали от научно-образовательных центров, где и близко нет никаких квалифицированных руководителей, а уровень учителей часто низок. Как организовать олимпиаду — ясно, а как научную конференцию? Сам школьник далеко не всегда может найти способ с кем-то связаться. Раньше каналом для поиска творческих задач был журнал «Квант». Надо подумать над какой-то живой системой заочного консультирования интересующихся школьников заинтересованными профессионалами. Кто и как может это делать?
- Очень полезно собрать и опубликовать список возможных тем. Некоторые темы указаны в книге [12]. В данный момент можно предложить организаторам научных конференций учащимся воспользоваться материалами проектов ЛКТГ<sup>19)</sup>, а также задачиком «Математического просвещения». Многие задачи из проектов ЛКТГ до сих пор не решены, а ряд руководителей проектов согласится на заочные контакты.
- Было бы весьма полезно возродить заочный конкурс ЛКТГ.
- Представляется целесообразным организовать аналог ЛКТГ для студентов младших курсов и выпускников школ.
- Многие учащиеся (и даже учителя) имеют недостаточное представление о том, как делается доклад на конференции или семинаре, как правильно и доступно рассказывать содержание материала собравшимся слушателям. Докладчика необходимо учить выступать, отвечать на вопросы, дискутировать с оппонентом. Поэтому полезны консультации докладчиков и тренировки выступления, методическая помощь организаторов конференций учителям и ученикам.
- Представляется целесообразным издать своего рода «темник» — сборник возможных тем исследования. Возможна следующая структура книжки.
  - а) Рассказ о конференциях учащимся, критерии оценки докладов.

<sup>19)</sup> <http://www.turgor.ru/lktg/>.

- б) Примеры докладов учащихся и студенческих научных статей.
- в) Темы для рефератов.
- г) Темы для экспериментальных работ. Задачи, связанные с численным моделированием.
- д) Исследовательские задачи в области чистой математики.  
(Здесь полезен опыт ЛКТГ. Задачи должны быть разного типа, в зависимости от уровня подготовки учащихся. Некоторые задачи могут быть близки к школьной программе, другие — к материалам олимпиад. Следует представить разные темы и разделы математики.)
- Попытаться предложить иные формы работы, в том числе через Интернет. Интересен опыт проектов Polymath<sup>20)</sup>.  
Данный список неполон, важны дополнительные соображения и идеи. Автор призывает к сотрудничеству.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белов А. Я. Об организации учебно-исследовательской работы в области математики // Внешкольник. 1997. № 7–8. С. 26–27.
- [2] Белов А. Я. Олимпиады: дверь в математику или спорт? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 187–203.
- [3] Викал В., Апостолов А. Функциональные корни // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 194–202.
- [4] Иванов С. Г., Рыжик В. И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: Просвещение, 2013.
- [5] Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1 / Под общ. ред. Н. Н. Константинова. Сост. Б. Р. Френкин. М.: МЦНМО, 2009.
- [6] Ляшко Л. Ю. Научные конференции и олимпиады школьников в системе образования: сравнительный анализ их эффективности // Внешкольник. 1997. № 7–8. С. 23–25.
- [7] Плыкин Р. В. Научное творчество школьников: миф или реальность? // Внешкольник. 1997. № 7–8. С. 20–22.
- [8] Понтрягин Л. С. Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908 г. М.: Прима В, 1998.
- [9] Райгородский А. М. Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2003.
- [10] Розов Н. Х., Савин А. П. Лабораторные работы по... геометрии? Да! // Математика в школе. 1994. № 6. С. 52–54.
- [11] Ройтберг М. А. О математических проектах в Красноярской летней школе // Математика. 2008. № 13. С. 25–38.

<sup>20)</sup> [http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Main\\_Page](http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Main_Page).

- [12] *Сгибнев А. И.* Исследовательские задачи для начинающих. М.: МЦНМО, 2013.
- [13] *Скопенков А. Б.* Размышления об исследовательских задачах для школьников // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 23–32.
- [14] *Хага К.* Оригамика. Геометрические опыты с бумагой. М.: МЦНМО, 2012.
- [15] *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры. М.-Л.: Гостехиздат, 1951.

Комментарий к статье А. Я. Белова  
«Научное творчество школьников:  
где миф и где реальность?»

В. М. Тихомиров

В своей статье А. Я. Белов упоминает об интересном начинании в одном из университетов Бремена — Jacobs University Bremen (ФРГ). По инициативе профессора университета Д. Шляйхера в этом университете был введён курс под названием «Perspectives in Mathematics». Каждому из профессоров университета предлагалось вести такой курс по форме и содержанию, которые тот должен разработать самостоятельно.

Один из постоянных профессоров университета посвятил свой курс построению чисел — натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных,  $p$ -адических, — сопровождаемому фундаментальными понятиями, идеями, конструкциями из логики, алгебры, топологии, геометрии.

У меня был курс-семинар, где я читал лекции, но при этом каждому студенту раздал литературу, давал консультации, и в итоге каждый студент написал самостоятельный текст и по завершении семестра проводилась защита с оценкой, подобная защите курсовой работы на мех-мате.

Как я объяснил своим слушателям, в этом курсе я старался построить как бы две «Вавилонские башни» — одну математическую, а другую «естественнонаучную», где математика выполняет роль языка естествознания.

Обе «башни» я строил сначала в одиночку, рассказывая в первой из них элементы теории множеств, алгебры, общей топологии, геометрии и анализа, а потом раздал темы индивидуальной работы. Среди них были: разрешимость уравнений третьей и четвёртой степени, теорема Абеля, теорема Лебега о том, что  $n$ -мерный куб имеет размерность  $n$ , теорема Гаусса о построениях циркулем и линейкой, теорема Эрмита о трансцендентности числа  $e$  и т. п.

После завершения базовых лекций, относящихся к первой «башне», я рассказал о нескольких результатах анализа, на которых базируется



описание многих законов природы, а затем раздал оставшимся студентам (самым сильным в моем потоке) темы для реферирования и собственного исследования.

А. Я. Белов вёл курс по типу школьной конференции, где темы были разные и современные, дававшие богатую возможность для решения содержательных и интересных задач. Приведу для иллюстрации некоторые его темы: теория информации, аксиома выбора, третья проблема Гильберта, неразрешимые проблемы, сложность алгоритмов.

Каждый из нас выполнял некую свою задачу в преподавании математики. Первый посвятил свой курс углублённому изучению оснований нашей науки. Я, по сути дела, осуществил то, что иногда называют «синтетическим курсом». Синтетическими курсами я называю такие курсы, при которых воедино соединяются несколько математических направлений.

Современное математическое образование всюду, во всём мире представляет математику как «федеративное государство», разделённое на некоторое число фактически независимых штатов — штатов алгебры, анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, комплексного анализа и т. п.

Андрей Николаевич Колмогоров стремился как-то нарушить это положение созданием синтетического курса. Первым синтетическим курсом в мехматском образовании был курс, вошедший в историю под названием «Анализ III». Программа курса «Анализ III» была разработана А. Н. Колмогоровым в сороковые и пятидесятые годы прошлого века. Курс объединял в себе начала теории множеств, теорию действительных чисел, начала общей топологии, теорию функций, функциональный анализ, теорию меры, теорию интеграла, теорию интегральных уравнений и вариационное исчисление. Чуть позже, уже по инициативе Юрия Ивановича Манина и Сергея Петровича Новикова появились синтетические курсы по линейной алгебре и геометрии и по дифференциальной геометрии и топологии.

Мой курс в Jacobs University Bremen был, по сути, курсом по всей математике. Я повторил его на мехмате и некий конспект мехматского курса отразил в статье в «Математическом просвещении», сер. 3, вып. 10, 2006, стр. 23–56.

А. Я. Белов на протяжении всей своей жизни связан ещё с одним важнейшим аспектом математического образования. Начало его можно связать с далёким 795 годом, когда Карл Великий повелел создать в столице своей Империи — городе Аахене — гимназию. Для преподавания математики был приглашён ирландский монах Алкуин, который составил первое пособие по математике, озаглавленное так: «Задачи для изощрения ума». Конечно, «изощрение ума» — это важнейшая задача просвещения. Со временем для

того, чтобы изодрать ум школьников и студентов, стали создавать математические кружки, олимпиады, математические бои и математические конференции. Последним и посвящена статья А. Я. Белова. Думается, что нас ждут ещё и другие формы и обучения существу дела, и развития интеллектуальных способностей.

Мне представляется, что опыт бременского университета удачен. Предоставление профессорам и преподавателям университета трибуны, где они могут выразить своё собственное понимание целей и средств постижения нашей науки с последующим обсуждением, может оказаться полезным для того, что отражено в заглавии данного издания — для Математического Просвещения.

---

---

# Нам пишут

---

---

## Письмо в редакцию

Ю. Бурда, Л. Кадец, А. Скопенков

Для доказательства основных формул статьи [1, п. 8, стр. 66–67] авторами были использованы вычисления (не приведённые в [1]) с достаточной точностью, чтобы выяснить, к чему ближе число  $c_1 + c_2 + c_4 + c_8$ : к  $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  или к  $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ . Программа, проводящая эти вычисления и для 17-угольника, и для более общего случая, приведена в [4]. Этот вопрос о «знаке гауссовой суммы» — и тем более его обобщения — нетривиален.

Читателю будет интересно сравнить изложение доказательства теоремы Гаусса о возможности построить правильные многоугольники в [6] как с коротким элементарным изложением того же доказательства в [3], [5, конец § 3], так и с другим более простым доказательством [5, начало § 3 и начало § 6]. Построение правильного 17-угольника с использованием тригонометрии, но без использования комплексных чисел, приводится, например, в [2].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бурда Ю., Кадец Л. Семнадцатиугольник и закон взаимности Гаусса // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 61–67. <http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mpb.pdf>.
- [2] Колосов В. А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М: Гелиос АРВ, 2001.
- [3] Козлов П., Скопенков А. В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 127–144. <http://arxiv.org/abs/0804.4357v1>.

- [4] *Сафин А.* Программа для построения правильных многоугольников циркулем и линейкой, Доклады школьников на Московской математической конференции школьников, 2008. <http://www.mcsme.ru/mmks/dec08/Safin.pdf>.
- [5] *Скопенков А.* Ещё несколько доказательств из Книги: разрешимость и неразрешимость уравнений в радикалах, представлено к публикации. <http://arxiv.org/abs/0804.4357v5>.
- [6] *Хованский А. Г.* Построения циркулем и линейкой // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 42–60. <http://www.mcsme.ru/free-books/matpros/mph.pdf>.

# О доказательствах трансцендентности числа Малера

А. Б. Скопенков

В «Математическом просвещении» (вып. 10) была опубликована статья [1], в которой, в частности, приведено доказательство трансцендентности числа Малера, см. также [2]. Необходимо отметить, что простое доказательство трансцендентности числа Малера опубликовано также в [3, 13.3, p. 399–401]. Благодарю А. Пахарева за указание на эту книгу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Каибханов А., Скопенков А.* Примеры трансцендентных чисел // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО, 2006. С. 176–184.  
<http://arxiv.org/abs/1204.5045>.
- [2] *Скопенков А.* Примеры трансцендентных чисел.  
<http://www.turgor.ru/lktg/2002/problem5.ru/index.php>.
- [3] *Allouche J.-P., Shallit J.* Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.



---

---

# Задачник

---

---

## Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. На плоскости начерчен угол величиной в  $n$  градусов, где  $n$ ,  $n < 180$ , — натуральное число.
  - а) Для каких  $n$  этот угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на  $n$  равных углов?
  - б) Пусть  $m$  — произвольное натуральное число. Для каких  $n$  данный угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на  $m$  равных углов?
  - в) Пусть  $m$  и  $n$  — натуральные взаимно простые числа, причём  $m/n < 180$ , и  $k$  — ещё одно натуральное число. На плоскости начерчен угол величиной в  $m/n$  градусов. Для каких  $k$  данный угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на  $k$  равных углов? (Г. А. Гальперин)
2. Последовательность функций задана следующим образом:

$$Q_1(x) = x, \quad Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n(x+1)}{Q_n(x)}.$$

Пусть

$$Q_n(x) - 1 = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где  $A(x), B(x)$  — многочлены. Найдите отношение старших членов этих многочленов. (А. А. Шапиро)

3. а) Пусть  $\Pi$  —  $d$ -мерный параллелепипед. Найдите сумму количеств граней параллелепипеда  $\Pi$  всех возможных размерностей:

$$\begin{aligned} & (\text{число вершин}) + (\text{число рёбер}) + (\text{число двумерных граней}) + \\ & + (\text{число трёхмерных граней}) + \dots + (\text{число } (d-1)\text{-мерных граней}). \end{aligned}$$

Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.).

б)  $d$ -Мерный параллелепипед  $\Pi$  («дом») с размерами  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_d$  разделён гиперплоскостями, параллельными его рёбрам, на единичные кубики («квартиры»). У каждой квартиры имеются вершины, одномерные рёбра, а также грани всех остальных размерностей, начиная с двумерных и кончая  $(d-1)$ -мерными, — назовём их все «стенками» (размерностей  $k = 0, 1, 2, \dots, d-1$ ). Стенка, общая для двух или большего числа квартир, считается за одну. Найдите сумму количеств всех стенок у всех квартир дома  $\Pi$ . Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.). (Г. А. Гальперин)

4. Даны положительные числа  $x_1, \dots, x_n$ ;  $a$  — их среднее арифметическое,  $b$  — их среднее геометрическое. Обозначим через  $M_3$  среднее арифметическое их кубических корней, через  $D_1$  — средний квадрат отклонения чисел  $x_i$  от  $a$ , т. е.

$$D_1 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{n},$$

и через  $D_3$  — средний квадрат отклонения кубических корней чисел  $x_i$  от  $M_3$ , т. е.

$$D_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^{1/3} - M_3)^2}{n}.$$

Докажите неравенства:

а) 
$$\frac{n \cdot D_1}{n-1} \leq a - b \leq n \cdot D_1;$$

б) 
$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \leq a - b \leq \frac{n^2}{n-1} \cdot M_3 \cdot D_3 \quad \text{при } n \geq 3.$$

(А. Д. Бернштейн)



5. Дано выпуклое тело  $T$  в пространстве и точка  $M$  внутри него. Докажите, что найдётся плоское сечение  $T$ , для которого  $M$  есть центр тяжести.  
(*М. Л. Концевич*)
6. Город имеет форму квадрата, разделённого на  $n^2$  квадратных кварталов. Улицы (двусторонние) идут между кварталами от одного края города к другому, и вокруг города идёт односторонняя улица. Велосипедист едет по городу, соблюдая правила уличного движения, то есть едет по правой стороне улицы, и на перекрёстках не поворачивает налево (на внешней односторонней улице он может ехать только так, что дома находятся справа от него). При каких  $n$  можно утверждать, что велосипедист может объехать весь город, побывав на каждой стороне каждой улицы по одному разу (на внешней улице — на её единственной стороне)? Постарайтесь найти возможно более широкий класс таких  $n$ .  
(*Фольклор*)
7. Пусть  $P(x) \neq \text{const}$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида  $4k + 1$ , делящих его значение в целой точке.  
(*И. И. Богданов*)
8. На полке в некотором порядке стоят тома, пронумерованные числами от 1 до  $n$ . Библиотекарь берёт том, стоящий не на своём месте, и ставит его на правильное место; при этом некоторые тома сдвигаются.
- а) Докажите, что процесс перестановки томов остановится. (*Фольклор*)
- б) Постарайтесь получить оценку на число шагов этого процесса, например полиномиальную.  
(*А. Я. Белов*)
- 9 (Задача на исследование).
- а) Из бесконечно тонкой проволоки спаяли каркас многогранника  $M$ , который считается жёстким (хотя и сделан из бесконечно тонкой проволоки). Существует ли прорезь на плоскости  $\alpha$ , через которую этот многогранник можно протащить насквозь? (Плоскость не должна распадаться на части. «Протащить насквозь» означает переместить многогранник из верхнего полупространства в нижнее непрерывным движением так, чтобы в каждый момент времени пересечение  $M \cap \alpha$  содержалось внутри прорези.) Рассмотрите случай каждого из пяти правильных многогранников, а также проволочный каркас решётки  $n \times n \times n$ , состоящий из  $n^3$  единичных кубиков.
- б) А существует ли клубок проволоки (т. е. связный набор отрезков, спаянных вместе произвольным образом), который нельзя протащить сквозь плоскость  $\alpha$  ни через какую прорезь, сделанную в  $\alpha$ ?  
(*М. М. Белова, А. Я. Белов*)

10. Какую наибольшую размерность может иметь векторное подпространство пространства  $(n \times n)$ -матриц над полем вещественных чисел, состоящее только из вырожденных матриц? (Фольклор)
11. Найдите  $\int_0^1 \ln(-\ln x) dx$ . (Фольклор)
12. Двое художников играют в следующую игру. На каждом шаге первый художник отмечает произвольную точку на плоскости и соединяет её дугами с некоторыми ранее отмеченными точками (быть может, ни с одной); при этом пересекать ранее проведённые дуги нельзя. Вторым художником красит поставленную первым художником точку так, чтобы все уже соединённые точки были раскрашены в разные цвета. Пусть  $n$  — произвольное натуральное число.
- а) Может ли первый художник заставить второго использовать более  $n$  цветов? (В. К. Ковальджи)
- б) Верно ли, что он может сделать это за полиномиальное по  $n$  число шагов? (А. Я. Белов)

## Решения задач из прошлых выпусков

В скобках после условия задачи указан её автор, а после решения — автор решения.

2.8. УСЛОВИЕ. Выяснить, сходится ли равномерно на отрезке  $[0, 1]$  ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n} \quad (\text{А. Д. Соловьёв})$$

РЕШЕНИЕ. Покажем, что ответ положительный.

Ясно, что указанный ряд сходится при  $x = 1$  и, кроме того, для любого  $\varepsilon > 0$  мажорируется рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , который равномерно сходится на отрезке  $[0, 1 - \varepsilon]$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда  $x$  лежит в произвольно малой окрестности единицы.

Нам надо показать, что при достаточно больших  $K$  величина

$$\sup_x \sum_{n=K}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

становится сколь угодно малой.

Зафиксируем  $\delta > 0$  и рассмотрим суммы

$$\sum_{n \geq K: x^n > \delta} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$

Они мажорируются суммами сходящегося ряда

$$\sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

и потому равномерно малы.

Для решения задачи достаточно доказать, что при всех достаточно больших  $K$  величина

$$\sup_x \sum_{\substack{n \geq K \\ x^n < \delta}} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

становится сколь угодно малой. Положим  $M = -1/\ln x$ . Условие  $x^n < \delta$  означает, что  $n > -M \ln \delta$ .

Найдём такое  $n_1 = n(x)$ , что  $x^{n(x)} \approx 1/n(x)$ . А именно, положим

$$n_1 = [M(\ln M + \ln \ln M)].$$

Тогда

$$n_1 \left( x^{n_1} - \frac{1}{n_1} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty \quad (\text{т. е. при } x \rightarrow 1).$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{n \geq n(x)} \frac{x^n}{(1+x^n)^n} < \frac{1}{M \ln M} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{M \ln M (1 - \exp(-1/M))} < \frac{2}{\ln M}.$$

Последнее неравенство выполнено при всех достаточно больших  $M$ , поскольку  $1 - \exp(-1/M) \approx 1/M$ , когда  $1/M$  близко к 0. Поэтому ряд

$$\sum_{n \geq n(x)} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$$

равномерно сходится на интервале  $x \in (0, 1)$ . Суммируя вышесказанное, имеем, что при рассмотрении частных сумм можно ограничиться индексами  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющими неравенствам  $M|\ln \delta| < n < M(\ln M + \ln \ln M)$ .

Разобьём отрезок натурального ряда, содержащийся в

$$(M|\ln \delta|, M(\ln M + \ln \ln M))$$

на такие участки, чтобы для всех  $n \in [\lambda - 1, \lambda]$  выполнялись условия:

$$x^n \in \left[ \frac{\lambda - 1}{n_1}, \frac{\lambda}{n_1} \right].$$

А именно, пусть  $\lambda$ -й участок начинается с

$$n_\lambda = n_\lambda(x) = \left[ n_1 + \frac{\ln \lambda}{\ln x} \right] = [n_1 - M \ln \lambda].$$

При этом  $\lambda \in [1, \delta \cdot n_1]$ .

Количество членов ряда, отвечающих  $\lambda$ -му участку, равно

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = M \ln \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \approx \frac{M}{\lambda}.$$

Кроме того, поскольку  $x^{n_\lambda} \sim \frac{\lambda}{M \ln M}$ , то

$$\frac{x^{n_\lambda}}{(1+x^{n_\lambda})^{n_\lambda}} \sim \frac{\lambda}{M \ln M} \cdot \exp \left( -\lambda \left( 1 - \frac{\ln \lambda}{\ln M + \ln \ln M} \right) \theta \right),$$

где  $\theta$  — величина, близкая к единице при малых  $\lambda/n$ , она всегда близка к единице при малых  $\delta$ .

Поэтому вклад участка с номером  $\lambda$  в общую сумму можно оценить величиной

$$O(1) \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{\ln \lambda}{\ln M + \ln \ln M}\right)\theta\right),$$

где величины  $O(1)$  и  $\theta$  не зависят от  $x$ .

Нам остаётся установить равномерную (если  $\delta$  мало, а  $M$  достаточно велико) малость суммы

$$\sum_{\lambda=1}^{\delta M \ln M} \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{\ln \lambda}{\ln M + \ln \ln M}\right)\theta\right)$$

или сумм

$$S_1 = \sum_{\lambda=1}^{\sqrt{M \ln M}} \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{\ln \lambda}{\ln M + \ln \ln M}\right)\theta\right)$$

и

$$S_2 = \sum_{\lambda=\sqrt{M \ln M}}^{\delta M \ln M} \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{\ln \lambda}{\ln M + \ln \ln M}\right)\theta\right).$$

Сумма  $S_1$  оценивается величиной

$$\sum_{\lambda=1}^{\sqrt{M \ln M}} \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{3}\right) < \frac{1}{\ln M(1 - \exp(-1/3))},$$

которая равномерно мала — ибо  $M$  изначально можно считать бóльшим любого наперёд заданного натурального числа.

Сумма  $S_2$  оценивается величиной

$$S_2 < \sum_{\lambda=\sqrt{M \ln M}}^{\delta M \ln M} \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\lambda \frac{|\ln \delta|}{10 \ln M}\right) = \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{M} |\ln \delta|}{10 \sqrt{\ln M}}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

где  $t = \exp\left(-\frac{|\ln \delta|}{10 \ln M}\right)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} S_2 &< \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{M} |\ln \delta|}{10 \sqrt{\ln M}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{|\ln \delta|}{10 \sqrt{\ln M}}\right)} \sim \\ &\sim \frac{1}{\ln M} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{M} |\ln \delta|}{10 \sqrt{\ln M}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\delta |\ln \delta|}{\ln M}} = \frac{1}{\delta |\ln \delta|} \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{M} |\ln \delta|}{10 \sqrt{\ln M}}\right). \end{aligned}$$

Последняя величина стремится к нулю при  $M \rightarrow \infty$ .

(А. Канель-Белов)

3.5. УСЛОВИЕ. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (Теорема Гаусса — Люка)

РЕШЕНИЕ. Нам будет удобно пользоваться следующим критерием выпуклости:

Множество  $M$  является *выпуклым*, если любая точка вне его отделена от него прямой. Выпуклая оболочка множества  $M$  есть пересечение полуплоскостей, содержащих  $M$ .

Если корень производной не принадлежит выпуклой оболочке корней многочлена, то через него можно провести такую прямую, что все корни многочлена лежат по одну сторону от неё. Таким образом, достаточно показать, что если все корни многочлена  $P$  принадлежат полуплоскости, то на её границе производная многочлена  $P'$  в ноль не обращается.

Рассмотрим подстановку  $z \rightarrow \lambda \cdot z + b$  и воспользуемся тем фактом, что любой поворот и любой параллельный перенос плоскости реализуется как преобразование вида  $z \rightarrow \lambda \cdot z + b$ . При такой подстановке все корни  $P$ , а также все корни  $P'$  преобразуются одинаковым образом, ибо

$$(P(\lambda \cdot z + b))' = \lambda \cdot P'(\lambda \cdot z + b).$$

(Если  $z$  — корень  $P$ , то  $\lambda^{-1}(z - b)$  есть корень  $P(\lambda \cdot z + b)$ .) Ясно, что существует движение (поворот или перенос), переводящее произвольную полуплоскость в верхнюю полуплоскость  $\text{Im}(z) > 0$ .

Итак, задача свелась к следующему утверждению:

*Если все корни многочлена  $P$  лежат в верхней полуплоскости, то многочлен  $P'$  вещественных корней не имеет.*

Пусть  $R(z) = P'(z)/P(z)$  — логарифмическая производная  $P$ . По теореме Безу

$$P(z) = a_0 \prod_k (z - z_k)^{a_k},$$

где  $a_k$  есть кратность корня  $z_k$ . Отсюда следует, что

$$R(z) = \sum_k \frac{a_k}{z - z_k}$$

и все числа  $a_k$  — натуральные. Остаётся показать, что функция  $\sum_k \frac{a_k}{z - z_k}$  не имеет вещественных корней.

В самом деле, при вещественном  $z$  все векторы  $z - z_k$  лежат в нижней полуплоскости, а векторы  $\frac{a_k}{z - z_k}$  — в верхней. Ясно, что сумма векторов с положительной мнимой частью не равна нулю. (А. Канель-Белов)

4.12. УСЛОВИЕ. С многочленами от двух переменных можно делать следующие операции вывода. Пусть даны или уже выведены многочлены  $P_1, P_2$ . Тогда выводятся следующие многочлены:

$$\lambda P_1, \quad P_1 + P_2, \quad P_1(R(x), R(y)),$$

где  $R$  — произвольный многочлен от одной переменной.

а) Верно ли, что любая система многочленов [с комплексными коэффициентами] выводится из конечной подсистемы?

б) Тот же вопрос для многочленов с целыми коэффициентами, которые можно умножать только на целые числа. (В. Шнехт)

РЕШЕНИЕ. Введём более общее понятие *выводимости*. Пусть дана некоторая система преобразований (например, дифференцирований). Будем считать многочлен *выводимым* из некоторой системы многочленов, если его можно получить из этой системы применением (быть может неоднократно) этих преобразований. Систему многочленов назовём *конечно базлируемой*, если она выводится из некоторой конечной системы.

4.12 а). ОТВЕТ: да.

Покажем, что система многочленов от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  конечно базлируема относительно системы подстановок  $P(x_i) \rightarrow x_i$  (при которых  $x_i$  заменяется на  $P(x_i)$ ), где  $P(x)$  — многочлен от одной переменной, и взятия линейных комбинаций. Мы будем рассматривать многочлены с комплексными коэффициентами, но доказательство проходит над любым полем характеристики 0.

Под *дифференцированием* кольца  $R$  понимается линейный оператор  $D: R \rightarrow R$ , удовлетворяющий *тождеству Лейбница*:

$$D(uv) = D(u)v + uD(v).$$

Дифференцирование однозначно определяется своими образами на образующих кольца  $R$ . Например, если  $R = K[x_1, \dots, x_n]$ , то для любого набора элементов  $y_i$  существует однозначно определённое дифференцирование  $D$  такое, что  $D(x_i) = y_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . В дальнейшем, когда мы говорим, что  $\delta$  есть оператор дифференцирования, и предъявляем  $\delta(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то мы тем самым даём определение оператора  $\delta$  (так ниже определяются операторы  $\partial_{kl}, \partial_\mu, \partial_{\mu_j}$ ).

Вернёмся к нашей задаче. Каждый многочлен  $P(x)$  определяет оператор дифференцирования  $\partial_P$ , для которого  $\partial_P(x_i) = P(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Шаг 1.* Сведём задачу к конечной базлируемости относительно взятия линейных комбинаций и операторов дифференцирования вида  $\partial_P$  для всевозможных многочленов  $P$ . Выберем многочлен  $S_\lambda(x) = x(1 + \lambda P(x))$ .

Рассмотрим произвольный многочлен  $Q \in K[x_1, \dots, x_n]$  и его образ  $S_\lambda(Q)$  при подстановке

$$S_\lambda(x_i) = x_i(1 + \lambda P(x_i)) \rightarrow x_i$$

(одновременно по всем  $i$ ). Многочлен  $S_\lambda(Q)$  можно представить в виде

$$S_\lambda(P) = \sum_{k=0}^{\deg Q} \lambda^k Q_k,$$

где  $Q_0 = Q$ ,  $Q_1 = \partial_P(Q)$ .

Доказательство следующей леммы мы предоставляем читателю:

**ЛЕММА 1.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — попарно различные ненулевые числа,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  — векторы,  $\vec{f}_i = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \vec{e}_k$ . Тогда все  $\vec{e}_k$  содержатся в линейной оболочке системы  $\vec{f}_i$ .

В качестве векторов  $\vec{e}_k$  возьмём многочлены  $Q_k$ . Применив лемму 1, получим, что многочлен  $\partial_P(Q)$  принадлежит линейной комбинации  $S_{\lambda_i}(Q)$ ,  $i = 1, \dots, \deg Q$ ;  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Поскольку наша система  $S$  замкнута относительно взятия линейных комбинаций, получаем, что если  $Q \in S$ , то  $\partial_P(Q) \in S$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Каждая подстановка определяет эндоморфизм кольца многочленов. Фактически мы перешли от действия полугруппы эндоморфизмов к действию «инфинитезимальных» или «бесконечно близких к тождественному» эндоморфизмов, т. е. к её касательной алгебре Ли — множеству дифференцирований  $\partial_P$ . Такие объекты устроены проще, и этот приём весьма распространён в алгебре и дифференциальной геометрии. В положительной характеристике этот подход работает гораздо хуже (см. задачу 4.12б).

**Шаг 2.** Под *регулярной конечной базируемостью* системы  $S$  относительно семейства операторов  $R_i$  будем понимать наличие конечного набора *регулярных образующих*, т. е. однородных многочленов  $\{s_1, \dots, s_t\} \subset S$  таких, что для любого  $s \in S$  существуют константы  $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ , для которых  $s = \sum_{ij} \alpha_{ij} R_i(s_j)$ , и при этом  $\forall i \deg(R_i(s_j)) \leq \deg s$ .

В дальнейшем (в решении п. а)) под *конечной базируемостью* всегда понимается *регулярная конечная базируемость*. Под *образующими* всегда понимаются *регулярные образующие* относительно рассматриваемой системы операторов.

Для осуществления индукции нам будет удобно доказать несколько более общих

**Факт:** Система многочленов  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m]$  регулярно конечно базируема относительно линейных действий, умножения на многочлены из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$  и операторов дифференцирований  $\partial_{k,r}$  где  $k \geq 1$ ,



определённых равенствами

$$\partial_{k,r}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq r, \\ x_i^k & \text{при } i > r. \end{cases}$$

*Шаг 3. Базой индукции служит случай  $r = m$ . Тогда операторы  $\partial_{k,r}$  отсутствуют, но имеется операция умножения на произвольный многочлен. В этом случае наше утверждение представляет собой классическую **теорему Гильберта о базисе**: Любая система многочленов от переменных  $x_1, \dots, x_r$ , замкнутая относительно операций сложения и умножения на произвольный многочлен, выводится из конечного набора многочленов. (См. «Математическое просвещение», вып. 11, задача 11.12.)*

**УПРАЖНЕНИЕ.** Выведите теорему Гильберта о базисе из следующего факта: *В точки положительной целочисленной  $r$ -мерной решётки ставят прожекторы. Прожектор освещает положительный «октант». Запрещается ставить прожектор в освещённую область. Тогда процесс расстановки прожекторов должен остановиться.* (Точке с координатами  $k_1, \dots, k_r$  отвечает моном  $x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$ .)

*Шаг 4. Индукционный переход. Понятие ширины.* Если многочлен  $Q$  однороден степени  $n$  по  $x_{r+1}, \dots, x_m$ , то  $\partial_{1,r}(Q) = mQ$ . Назовём *шириной*  $\text{Wide}(P)$  многочлена  $P$  его суммарную степень по  $x_{r+1}, \dots, x_m$ . Прежде всего покажем, что при рассмотрении членов наибольшей ширины можно ограничиться дифференцированиями  $\partial_{k,r}$ , где  $k \geq 2$ .

В самом деле, пусть система  $S$  конечно базиреуема относительно операторов  $\partial_{k,r}$ , где  $k \geq 1$ , и пусть  $s_1, \dots, s_t$  — её образующие,  $s \in S$ ,  $\bar{s}_\tau$  — компонента в  $s_\tau$  максимальной ширины. При этом  $\partial_{1,r}(s_\tau) = \text{Wide}(s_\tau)s_\tau$ .

Тогда для каких-то коэффициентов  $\alpha_{n,\tau} \in \mathbb{C}$  выполняется равенство:

$$\bar{s} = \sum_{n \geq 2; \tau} \alpha_{n,\tau} \partial_{n,r} \bar{s}_\tau + \sum_{\tau} \alpha_{1,\tau} \partial_{1,r} \bar{s}_\tau.$$

Следовательно,

$$\text{Wide}\left(s - \sum_{n \geq 2; \tau} \alpha_{n,\tau} \partial_{n,r} s_\tau - \sum_{\tau} \alpha_{1,\tau} \text{Wide}(s_\tau) s_\tau\right) < \text{Wide}(s)$$

и дело завершает индукция по ширине старшего члена. Таким образом, оператор  $\partial_{1,r}$  можно отбросить. Сформулируем теперь *основную лемму*:

**ЛЕММА 2.** *Из конечной базиреуемости систем многочленов из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m]$  относительно семейства операторов  $\partial_{n,r+1}$  и умножений на многочлены из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{r+1}]$  вытекает конечная базиреуемость систем многочленов из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m]$  относительно семейства операторов  $\partial_{n,r}$  и умножений на многочлены из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{r+1}]$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система  $S$  конечно базиреуема относительно операторов  $\partial_{n,r}$ ,  $n \geq 2$ . Тогда для любой системы многочленов  $S$  существуют такие её регулярные образующие  $s_\tau$ , что для любого  $s \in S$  выполняется равенство:

$$s = \sum_{k \geq 2; \tau} \alpha_{k,\tau} \partial_{k,r} s_\tau$$

при некоторых  $\alpha_{k,\tau} \in \mathbb{C}$ .

Легко видеть, что если не все эти коэффициенты равны нулю, то

$$\text{Wide}\left(s - \sum_{k \geq 2; \tau} \alpha_{k,\tau} \partial_{k,r+1} s_\tau\right) < \text{Wide}(s),$$

ибо операторы  $\partial_{k,r}$  и  $\partial_{k,r+1}$  приводят к появлению одних и тех же членов наибольшей ширины. Дело завершает индукция по ширине. Итак, *основная лемма доказана.*  $\square$

Перейдём к **решению задачи 4.12 а**). Введём дополнительные переменные  $\mu_j$ ;  $j = r + 1, \dots, m$ , операторы дифференцирования  $\partial_\mu$  и  $\partial_{\mu_j}$ :

$$\partial_\mu(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq r, \\ \mu_i x_i & \text{при } i > r, \end{cases} \quad \partial_{\mu_j}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \mu_j x_j & \text{при } i = j \end{cases}$$

и систему дополнительных подстановок  $D_R: R(x_i)\mu_i \rightarrow \mu_i \forall i$ . Ясно, что

$$\partial_\mu = \sum_{i=r+1}^m \partial_{\mu_i}.$$

Поскольку любой оператор  $\partial_{k,r}$  получается путём применения  $\partial_\mu$  и оператора  $D_{x^k}$  с последующей специализацией  $\mu_i \rightarrow 1$ , из конечной базиреуемости системы  $\partial_\mu(S)$  вытекает конечная базиреуемость системы  $S$ .

ЛЕММА 3. *Конечная базиреуемость всех систем вида  $\partial_\mu(S)$  вытекает из конечной базиреуемости всех систем вида  $\partial_{\mu_i}(S)$  для всех  $i = r + 1, \dots, m$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система  $\partial_{\mu_i}(S)$  конечно базиреуема относительно новой системы операторов. Тогда существуют такие её регулярные образующие, что для любого  $s \in S$  при некоторых  $\alpha_{k,\tau} \in \mathbb{C}$  выполняется равенство

$$\partial_{\mu_i}(s) = \sum_{k \geq 2; \mu} \alpha_{k,\tau} R_k(\partial_{\mu_i}(s_\tau)).$$

Легко видеть, что тогда

$$s^{(i)} = \partial_\mu(s) - \sum_{k \geq 2; \mu} \alpha_{k,\tau} R_k(\partial_\mu(s_\tau))$$

не содержит компоненты с  $\mu_i$ , и осталось доказать конечную базлируемость системы  $S^{(i)}$ , порождённой элементами вида  $s^{(i)}$ , где  $s \in S$ . Доказательство леммы завершается индукцией по числу компонент.  $\square$

Итак, всё свелось к доказательству конечной базлируемости систем  $\partial_{\mu_i}(S)$ . Можно считать, что  $i = r + 1$  (случаи большего  $i$  аналогичны). При этом операторы  $D_R$  действуют умножениями на  $R(x_{r+1})$ , так что для индукционного перехода, решающего задачу, остаётся применить основную лемму.

Задача 4.12 а) решена.

**4.12 б).** ОТВЕТ: нет.

Пусть  $p$  — простое число. Покажем, что система многочленов  $Q_k(x, y) = (x - y)x^{p^k - 1}$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_p$  бесконечно базлируема. Достаточно показать, что она бесконечно базлируема по модулю многочлена  $(x - y)^2$ .

Положим  $\tau = x - y$ , тогда  $Q_k = \tau x^{p^k - 1}$ . Рассмотрим произвольный многочлен вида  $\tau H(x)$ . Применим к нему подстановку  $R(x) \rightarrow x$ ;  $R(y) \rightarrow y$ . В результате получится многочлен  $\tau R'(x)H(R(x))$ , поскольку  $\tau^2 = 0$ .

Рассмотрим замену

$$R(x) = \sum_{j=1}^s \mu_j x^{i_j} \rightarrow x, \quad R'(x)\tau \rightarrow \tau,$$

где  $s > 1$  и  $\mu_k$  для всех  $i_k \neq 0$  — неопределённые константы (вместо которых потом подставляются числа). Применим её к многочлену вида  $\tau H(x)$ . Результатом будет выражение вида

$$\tau \sum_J \mu_1^{j_1} \dots \mu_s^{j_s} \left( \sum_k \alpha_k x^k \right).$$

Коэффициент  $\sum_k \alpha_k x^k$  при произведении  $\mu_1^{j_1} \dots \mu_s^{j_s}$  будем называть *результатом действия на  $\tau H(x)$  вербального оператора* порядка  $(j_1, \dots, j_s)$  от  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_s})$ . (Рассуждения с вербальными операторами аналогичны рассуждениям с применением леммы 1.) Конечная базлируемость относительно наших подстановок равносильна конечной базлируемости относительно вербальных операторов.

Опишем действие вербальных операторов  $(j_1, \dots, j_s)$  от  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_s})$  на многочлен  $Q_k(x, y) = (x - y)x^{p^k - 1}$ . Результат получается, если каждое вхождение  $x$  (всего таких вхождений  $p^k - 1$ ) заменить на вхождение  $x^{i_m}$ , а вхождение  $\tau$  заменить на  $i_m x^{i_m} \tau$ ;  $m = 1, \dots, s$ . При этом ровно  $j_m$  ( $m = 1, \dots, s$ ) раз происходит замена, связанная с  $x^{i_m}$  (только так возникает  $\mu_m^{j_m}$ ). Ясно, что  $\sum_m j_m = p^k$ .

Занумеруем вхождения переменных в  $Q_k$  слева направо. Отметим, что замены  $x \rightarrow x_{j_\alpha}$  при действии вербального оператора на  $Q_k$  можно сгруппи-

ровать по циклам. Результат действия вербального оператора есть результат суммирования по таким циклам. Каждый цикл состоит либо из одного элемента, либо из  $p^k$  элементов.

Для любого набора целых неотрицательных чисел имеет место равенство:

$$(x^{r_1})'x^{r_2} \dots x^{r_k} + (x^{r_2})'x^{r_3} \dots x^{r_k}x^{r_1} + (x^{r_k})'x^{r_1} \dots x^{r_{k-1}} = |\vec{r}'|x^{|\vec{r}'|-1}. \quad (1)$$

( $|\vec{r}'|$  обозначает  $\sum r_j$ , степени  $x^{r_i}$  переставляются по циклу.)

Степень по  $x$  образа вербального оператора равна  $\sum i_\alpha j_\alpha$  (а по  $\tau$  она остаётся единицей). Заметим, что разность степеней  $Q_k$  при различных  $k$  делится на  $p$ . Поэтому если применить к  $Q_k$  вербальный оператор с  $s > 1$  (с разными  $j$ ), то коэффициент при многочлене  $Q_l$ , где  $l > k$ , окажется в силу равенства (1) делящимся на  $|\vec{r}'|$ , т. е. равным нулю. Если же применить замену, отвечающую подстановке  $x \rightarrow x^j$ , то для получения  $Q_l$  степень должна увеличиться в  $p^{l-k}$  раз, и тогда  $j = p^{l-k}$ . При этом  $\tau$  перейдёт в  $p^{l-k}x^{p^{l-k}-1}\tau = 0$  при  $l - k > 0$ . Отсюда непосредственно вытекает

**ЛЕММА 4.** Если  $\sum_{k=1}^s i_k j_k$  делится на  $p$ , то результат действия вербального оператора порядка  $(j_1, \dots, j_s)$  ( $s \geq 2$ ) от  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_s})$  нулевой.

Кроме того ясно, что результат действия оператора

$$\tau R'(x)H(R(x)) \rightarrow \tau H(x)$$

нулевой, если  $R(x) = P(x^{pm})$ , ибо тогда  $R'(x) = 0$ . Поэтому из данной леммы вытекает

**СЛЕДСТВИЕ.** Ненулевой вклад в коэффициенты при  $x^{pm}$ , получающиеся при подстановке из предыдущего следствия, дают члены, в которых не присутствует произведение  $\mu_\alpha \mu_\beta$  при  $\alpha \neq \beta$ . Они отвечают подстановкам вида  $\mu_k x^{i_k} \rightarrow x$ ,  $\mu_k x^{i_k-1} \tau \rightarrow \tau$ .

Если при этом  $i_k$  делится на  $p$ , то результат соответствующей подстановки нулевой.

Пусть подстановка применяется к  $Q_k$  и её результат не равен нулю. Тогда согласно следствию в полученном многочлене нет членов с показателями, кратными  $p^l$ , где  $l > k$ . Поэтому никакой многочлен  $Q_\alpha$  не может быть выведен из системы  $\{Q_i\}_{i < \alpha}$  и, таким образом, система  $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$  бесконечно базисуема.

**Комментарии.** Под тождеством в алгебре  $A$  (определение алгебры над полем см. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011. С. 38) понимается многочлен, тождественно обращающийся в ноль в алгебре  $A$ . Например, в алгебре матриц второго порядка выполняется тождество

Холла  $[[x, y]^2, z] = 0$  (см. задачу 3.1). Тождество  $f$  следует из набора тождеств  $\{g_i\}$ , если везде, где выполняется набор тождеств  $\{g_i\}$ , автоматически выполняется тождество  $f$ . Проблема Шпехта звучит так: верно ли, что любая система тождеств следует из конечной подсистемы? В характеристике нуль (как её понимал сам Шпехт) её решил А. Р. Кемер, в положительной характеристике контрпримеры получил автор, позднее — А. В. Гришин и В. В. Щиголов. Пункт а) данной задачи передаёт идею А. В. Гришина решения проблемы Шпехта в нулевой характеристике. (Рассмотрим матрицы  $M_k$ ,  $k = 1, \dots, s$ , такие что при  $i \leq j$  в пересечении  $i$ -й строки с  $j$ -м столбцом матрицы  $M_k$  стоит переменная  $x_{ij}^k$ , а при  $j > i$  стоит 0. Если рассмотреть многочлены от этих матриц, то подстановкам  $P(M_k) \rightarrow M_k$  будут соответствовать подстановки  $P(x_{ii}^k) \rightarrow x_{ii}^k$  в кольце  $K[x_{ii}^k]$ .) При этом, правда, ещё требуется весьма специфическое применение леммы Артина — Рисса, идея которого была впервые предложена А. Я. Беловым. Задача 4.12 б) отражает идею построения контрпримеров в проблеме Шпехта в положительной характеристике. Историю вопроса см. Белов А. Я. Локальная конечная базирюемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец // Изв. РАН. Сер. Матем. 2010. Т. 74, № 1. С. 3–134.

(А. Канель-Белов)

16.1. УСЛОВИЕ. Найти первообразную

$$\int \frac{x^2 dx}{(x \sin(x) + \cos(x))^2}. \quad (\text{Фольклор})$$

РЕШЕНИЕ. Подынтегральное выражение — дробь, у которой знаменатель — квадрат. Попробуем представить её как производную дроби. Тогда в числителе должны стоять  $x \sin x + \cos x$  и его производная  $x \cos x$ , умноженные на какие-то выражения. Как получить отсюда  $x^2$ ? Попробуем представить его как  $x^2 \cos^2 x + x^2 \sin^2 x$ , что-то добавить и вычесть. Получаем:

$$x^2 = (x \sin x + \cos x)x \sin x + x \cos x(x \cos x - \sin x),$$

при этом  $x \sin x = (\sin x - x \cos x)'$ . Отсюда

$$\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \int d \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.$$

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В № 16

СТРАНИЦА, СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
230, 6 снизу	$a_{n+1} = (a_{n-1} \cdot a_n - 1) / a_{n-1}$ , если $1 < x < 2$ ?	$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$ , $x \in (-2, 2)$ ?

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в «ГДДС-СТОЛИЦА-8».

Тел.: (495) 363-48-86, <http://capitalpress.ru>

Подписано в печать 05.03.2014 г. Формат  $70 \times 100^{1/16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 17. Тираж 1000 экз. Заказ №

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-72-85.

E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru), <http://biblio.mccme.ru>

---