

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

ВЫПУСК 11

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

*Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(издательский проект № 07-01-07056).*



Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Винберг Э. Б.	Вялый М. Н.
Гальперин Г. А.	Глейзер Г. Д.	Гусейн-Заде С. М.
Дориченко С. А.	Егоров А. А.	Ильяшенко Ю. С.
Канель-Белов А. Я.	Константинов Н. Н.	Прасолов В. В.
Розов Н. Х.	Сосинский А. Б.	Тихомиров В. М.
Френкин Б. Р.	Яценко И. В.	

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Э. Б. Винберг ОТВ. СЕКРЕТАРЬ: М. Н. Вялый

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 301

(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: matpros@mccme.ru WEB-PAGE: www.mccme.ru/free-books

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 11. —

М.: МЦНМО, 2007. — 176 с.

ISBN 978-5-94057-275-6

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-275-6

© МЦНМО, 2007.



Фото Н. Андреева

*Поздравляем
Николая Николаевича Константинова
с 75-летием!*

СОДЕРЖАНИЕ

Математический мир

А. Б. Сосинский. <i>ICM–2006, Мадрид: Международный конгресс математиков</i>	5
М. П. Замаховский. <i>Борис Абрамович Розенфельд</i>	15
У. Тёрстон. <i>Об обучении математике</i>	21
Е. Д. Куланин. <i>Виктор Тебо и его задачи</i>	37

Наш семинар: математические сюжеты

Ю. М. Бурман. <i>Многочлен Татта и модель случайных кластеров</i>	47
А. В. Акопян, А. А. Заславский. <i>Разные взгляды на изогональное сопряжение</i>	61
М. Б. Скопенков. <i>Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби</i>	79
С. Б. Гашков. <i>Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнгардта</i>	91
М. Н. Истомина, А. Б. Певный. <i>О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц</i>	105
П. В. Бибииков, И. В. Ткаченко. <i>О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского</i>	113
О. В. Шварцман. <i>Комментарий к статье П. В. Бибиикова и И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского»</i>	127

Конкурсы и олимпиады

А. А. Ошемков, А. Б. Скопенков. <i>Студенческие олимпиады по геометрии и топологии</i>	131
К. А. Матвеев. <i>Об одноцветных связных графах</i>	141

По мотивам задачника «Математического просвещения»

С. Г. Слободник. <i>Дискретные положительные гармонические функции</i>	145
Д. А. Михалин, И. М. Никонов. <i>Одна задача о нахождении фальшивой монеты</i>	149

Нам пишут

А. Б. Скопенков, А. С. Телишев. <i>И вновь о критерии Куратовского планарности графов</i>	159
Е. Д. Куланин. <i>Поправка</i>	161

Задачный раздел

<i>Условия задач</i>	162
<i>Решения задач из предыдущих выпусков</i>	165

Новые издания

90, 104, 144, 175

Математический мир



ICM–2006, Мадрид: Международный конгресс математиков

А. Б. Сосинский

Вот уже сто лет, раз в четыре года, а именно в годы, равные двум по модулю четыре, Международный математический союз проводит свой конгресс. В 2006 году он состоялся в Мадриде, с 21 по 30 августа. О своих впечатлениях об этом знаменательном событии автор и постарается рассказать, благо почетное приглашение участвовать в ICM–2006 позволило наблюдать за происходящим, так сказать, из первых рядов.

ОТКРЫТИЕ КОНГРЕССА

По традиции, церемония открытия главного математического форума ожидается с особым нетерпением: на ней подводятся итоги четырехлетнего цикла и оглашаются имена его главных героев — лауреатов медалей Филдса и Неванлинны.

Представьте себе огромный заполненный зал, вмещающий 3000 человек, широченную сцену с длинным, пока еще пустующим, столом для начальства, а над сценой экран шириной метров двадцать и высотой метров пять. На экране, предназначенном для показа выступающих крупным планом, пока красуется логотип ICM–2006. Переполненный зал гудит. В него не поместились все четыре с лишним тысячи участников конгресса, так что открытие будет транслироваться во вспомогательную аудиторию, где сидят те, кому не посчастливилось попасть в основной зал заседаний.

Но вот засуетились теле- и фоторепортеры, пулеметными очередями застреляли вспышки фотоаппаратов — в зал входят главные действующие лица церемонии открытия: король Испании Хуан Карлос I и его свита, сэр Джон Балл (президент Международного союза математиков),

мэр Мадрида, министры, испанский сопредседатель Оргкомитета, другие важные официальные лица, и рассаживаются за столом на сцене. Мне хорошо видны все вошедшие — оргкомитет почему-то зарезервировал мне персональное место у центрального прохода в пятом ряду, до сидящего в центре сцены испанского монарха рукой подать. В первый раз в жизни вижу живого короля. Хуан Карлос, без мантии и короны, конечно же, сидящий не на троне, а на обыкновенном стуле — высокий элегантный мужчина средних лет, в светлом летнем костюме, с великолепной осанкой и живыми глазами.

Сэр Джон Балл открывает конгресс, в краткой речи выразив благодарность всем, кому следует, в частности испанским хозяевам и организаторам. Затем идет черед выступлений испанских официальных чинов (их увеличенные раз в двадцать лица можно разглядеть на гигантском экране, на нем же бегущей строкой синхронно крутится английский перевод их речей), после чего сам король берет слово. В краткой, красивой и живой речи, Хуан Карлос демонстрирует знание бинорма Ньютона и теоремы Пифагора, осведомленность о современном развитии математики и подчеркивает значимость математики в современном обществе. Четыре тысячи лучших математиков мира внимательно слушают его выступление, но большинство думает о другом — когда же наконец нам сообщат имена лауреатов главных математических премий?

Джон Балл повторно берет слово, и когда он переходит к оглашению результатов, в зале наступает напряженная тишина. Четыре медали Филдса¹⁾ присуждаются Григорию Перельману (Россия, Санкт-Петербург), Теренсу Тао (США, UCLA), Андрею Окунькову (Россия, Университет Принстон, США) и Венделину Вернеру (Франция, Париж). Зал гудит. То, что Тао и Перельман получают эту премию, понимали все осведомленные математики, Окуньков рассматривался среди претендентов (были и другие), а Вернер, по крайней мере для меня, был фигурой совершенно неожиданной. Лауреаты (все, кроме отсутствовавшего Перельмана) вызываются на сцену и получают награды из рук испанского монарха.

Медаль Неванлинны (присуждаемую за результаты в теории информации) получает Jon Kleinberg (Университет Корнэлл, США), а медаль Гаусса, впервые присуждаемую в этом году, — Кийоши Ито (Япония).

Затем Хуан Карлос объявляет церемонию закрытой, и приглашает всех участников на фуршет, происходящий тут же, в огромных холлах дворца конгрессов. Сам же король, в сопровождении Джона Балла,

¹⁾Медаль Филдса — самая почетная математическая награда (ее иногда называют «Нобелевской премией для математиков»), она присуждается раз в четыре года двум, трем или четырем математикам-исследователям моложе 40 лет за вклад в продвижение математической науки. Об этой премии и ее предыдущих лауреатах, см. «Математическое просвещение», 3 серия, вып. 2, с. 19–20, 1998.

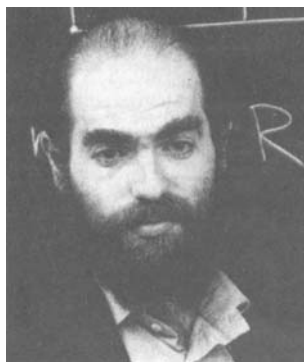


Король и лауреаты. Слева направо: Jon Kleinberg, Теренс Тао, король Хуан Карлос I, Андрей Окуньков, Вендолин Вернер

весьма демократично (тем самым очень напугав, я полагаю, свою охрану) смешивается с толпами взволнованных, жаждущих еды и новостей математиков. . .

ГРИГОРИЙ ПЕРЕЛЬМАН

Наиболее обсуждаемая тема в коридорах дворца была, безусловно, медаль Филдса Григория Перельмана. В Мадриде Перельмана не было — он отказался принять медаль и сопутствующую денежную премию, о чем с сожалением в своем докладе о премиях сообщил конгрессу Джон Балл. Этот необычный шаг Перельмана не был неожиданностью для осведомленных математиков: еще несколько лет назад он отказался принять престижную премию, присужденную ему Европейским математическим обществом.



Григорий Перельман

Но какой поднялся невообразимый ажиотаж вокруг этого отказа, как засуетились средства массовой информации, чего только не писали и не говорили некомпетентные и недобросовестные журналисты! Многие средства массовой информации к тому же перепутали медаль Филдса с премией Института Клея, присуждаемой за решение любой из семи «проблем тысячелетия». В отличие от денежной составляющей медали

Филдса (несколько десятков тысяч долларов) премия Клея исчисляется одним миллионом. Хотя Перельман и решил одну из проблем тысячелетия, он не мог отказаться от премии Клея, так как эта премия ему пока не присуждена.

Между тем отказ от медали Филдса имеет вполне логичное объяснение: он вытекает из весьма цельной и осознанной, хотя и необычной, жизненной позиции самого Перельмана. Он не придает особого значения материальной стороне жизни, для него ее цель — научный поиск, в котором высшие научные результаты имеют свою внутреннюю ценность, а получение за них денег — безнравственно, ибо оно опошляет высокую цель служения истине. Не нужно думать, что это позиция скромного, помонашески отрешенного человека — Григорий Перельман знает себе цену, и жестко отстаивает свои принципы.

Его жизненный путь, по крайней мере поначалу, типичен для лучших российских математиков его поколения. Рано проявившиеся математические способности, элитная физматшкола в Санкт-Петербурге, золотая медаль на международной математической олимпиаде (Будапешт, 1984), учеба на матмехе ЛГУ, аспирантура, блестящая защита диссертации, эмиграция в США. Там он хорошо вписывается в научную жизнь университета Стони Брук около Нью Йорка и быстро завоевывает репутацию одного из сильнейших в мире топологов и геометров, не чуждого, впрочем, и аналитической стороне математики. Он работает над одной из труднейших и самых известных математических задач современности: над *гипотезой Пуанкаре*²⁾, для чего берется за еще более трудную (а на самом деле и более значительную) задачу — *гипотезу геометризаци* *Тёрстона*.

Несколько лет напряженной работы, и в 2002 году Перельман объявляет об успешном решении этих проблем. В 2002 и 2003 годах он выкладывает в интернет три сложные, сжато написанные статьи с доказательством названных выше гипотез, выступает в разных университетах США с докладами об их решении. Реакция на эти тексты и доклады неоднозначна. Специалистам оказывается непросто проследить за сложными рассуждениями Перельмана, который свободно пользуется изысканной техникой из разных областей математики. Появляются и оппоненты: выдающийся китайский математик Яо, работающий в Америке, объявляет текст Перельмана неполным, утверждая, что существенные пробелы в работах Перельмана не позволяют считать гипотезы доказанными. Более того, говорит Яо, только благодаря новым глубоким идеям самого Яо и его учеников Као и ЖУ удастся довести доказательства до конца.

²⁾Гипотеза утверждает, что любое связное односвязное трехмерное замкнутое компактное многообразие без края — трехмерная сфера.

Особенно обидной для Перельмана, видимо, была реакция американского математика Ричарда Гамильтона, автора замечательной начальной идеи, связанной с так называемыми потоками Риччи, развивая и дополняя которую Перельман сумел довести дело до конца. Гамильтон поначалу результаты Перельмана игнорировал (например, ушел с его доклада в Колумбийском университете, ничего не сказав), а потом сам выступал с докладами, где указывал на «существенные пробелы» в работах Перельмана. Но с течением времени число сторонников Перельмана постепенно увеличивалось. Сам же Перельман отказывался участвовать в этих дискуссиях, подчеркивая, что он не сомневается в правильности и достаточности своих текстов, а к ним возвращаться и участвовать в обсуждении их ценности не намерен.

Поэтому один из ключевых вопросов конгресса был — признает ли математическая общественность правомерность перельмановского доказательства гипотезы Пуанкаре? Однозначный ответ был получен в первые два дня Конгресса: после докладов Франка Моргана, Джона Лотта и самого Ричарда Гамильтона, отпали последние сомнения: математическая общественность признала правильность доказательства Перельмана.

ТЕРЕНС ТАО

Теренс Тао самый молодой и, по-видимому, самый одаренный из четырех лауреатов медали Филдса 2006 года. Тао — сын китайских эмигрантов из Австралии, родился в Аделаиде в 1975 году, сейчас является гражданином США и профессором UCLA (Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе). Теренс — вундеркинд, победивший в 13 лет (!) на Международной математической олимпиаде.

Его основная математическая специальность — гармонический анализ, но он чрезвычайно широкий математик: у Тао есть значительные результаты по уравнениям в частных производных, по эргодической теории, по аналитической теории чисел и по комбинаторике (геометрической, алгебраической и арифметической). Характерная черта его творчества — междисциплинарность: почти все его работы лежат на стыке двух (или более!) разных областей математики.

Наиболее яркий пример такой работы — теорема Тао о существовании длинных арифметических прогрессий в множестве простых чисел, за которую, собственно говоря, ему и была присуждена медаль Филдса. Междисциплинарность тут проявилась не в формулировке, а в доказательстве этой теоремы, основанном на . . . эргодической теории! Трудно поверить, что детерминистическую, элементарно формулируемую, теорему из теории чисел можно было доказать с помощью, в сущности, теории

вероятностей. Еще трудней понять, как человек мог додуматься до такой дикой идеи, и довести ее до логического завершения.

В своем пленарном докладе, состоявшемся на второй день конгресса, Теренс Тао пытался разъяснить этот парадокс, рассматривая его в самом широком, почти что философском, смысле, а именно, как диалектику взаимоотношения случайного и структурированного. В одном из интервью, он прямо сказал, что для него «один из важнейших вопросов в математике — это как отделить структуру от случайности в комбинаторных задачах». Доклад оказался удивительно глубоким, но не перегруженным техническими деталями, а в его завершении у слушателей возникало чувство полного понимания и естественности эргодического подхода к доказательству теоретико-числовой теоремы Тао.

Вообще Теренс Тао произвел очень приятное впечатление не только глубиной и силой своих работ, но ясностью мысли, обманчивой легкостью изложения, мягкостью и скромностью поведения. Околонаучные журналисты уже успели окрестить Тао «Моцартом современной математики», но только время покажет, достоин ли он столь высокого титула.

Андрей Окуньков

Андрей Окуньков совсем не похож на остальных Филдсовских медалистов 2006 года: вундеркиндом он не был, международных олимпиад не выигрывал, в элитных школах не учился. Когда после службы в армии он оказался на мехмате МГУ, его однокурсники, особенно выпускники элитарных московских матшкол, смотрели на него свысока. Это не мешало (а может быть и помогло) ему быстро ликвидировать свое отставание в уровне знаний, и успешно начать научную работу под руководством А. А. Кириллова. В аспирантуре он параллельно учился в МГУ и НМУ, а после эмиграции Кириллова в США, много работал с Г. И. Ольшанским. Как и большинство лучших математиков своего поколения, он вскоре оказался в США, где продолжает работать сегодня — в престижном Принстонском университете.

Основная специальность Окунькова — теория представлений, но так же, как Перельман и Тао, он математик широкого профиля: у него есть значимые результаты по алгебраической геометрии, математической физике, вероятности, комбинаторике, специальным функциям.

Результаты, за которые Андрею Окунькову была присуждена медаль Филдса, как раз относятся к пограничной области между математической физикой и теорией представлений, притом для их получения используется и вероятность, и очень современная комбинаторика.

ВЕНДОЛИН ВЕРНЕР

Вендолин Вернер — немец, которого французы считают своим, благо он давно живет и работает в Париже (и даже приобрел французское гражданство). Изначально Вернер — специалист по теории вероятностей, но его работы чаще всего выходят за рамки его специальности, обнаруживая связи с другими областями математики.

Присуждение ему медали Филдса — большая неожиданность для многих, но отнюдь не случайность, а принципиальное решение Филдсовского комитета. Дело в том, что Вернер — первый специалист по теории вероятностей, получивший эту медаль. До поры до времени, многие математики, охотно признавая огромное прикладное значение вероятностной науки, не считали ее значимой частью математики, снобировали ее (« — Вероятность? Да это такой раздел теории меры»). Присуждение самой престижной математической премии специалисту по теории вероятностей — это признание важности этой области для всей нашей науки.

Впрочем, эта тенденция пересмотра роли вероятности в математических науках просматривается, как мы уже отмечали, в работах Филдсовских лауреатов Тао и Окунькова, но в еще большей степени — в присуждении премии Гаусса основоположнику сближения теории вероятностей и дифференциальных уравнений.

ПРЕМИЯ ГАУССА

Премия Гаусса была создана два года назад Немецким математическим обществом при поддержке Международного математического союза и впервые присуждалась в этом году. Она учреждена как «награда для математика, чьи работы имеют наибольшее прикладное значение».

Премия Гаусса 2006 года была присуждена 90-летнему японскому математику Кийоши Ито, создателю стохастического интеграла и теории стохастических дифференциальных уравнений. Возраст и состояние здоровья не позволили Ито приехать в Мадрид и получить премию лично, от его имени ее приняла его дочь (тоже математик, профессор университета Беркли), прочитавшая трогательное благодарственное письмо самого лауреата. Судя по этому письму, сам Ито был в некотором недоумении от получения премии за прикладное значение своих работ, и прямо отметил, что он всегда считал себя «чистым математиком», и создавая свою теорию, никогда не думал о ее приложениях.³⁾

³⁾Замечу, что ситуации, при которых прикладное значение теории осознавалось не сразу после ее создания и совсем не имелось в виду ее автором, в математике встречались довольно часто. Недаром А. Н. Колмогоров говорил, что не существует «чистой», как и не существует «прикладной» математики, а есть математика хорошая, есть и математика плохая и слабая.

Достаточно интересна сама история создания теории Ито и ее признание, произошедшее лет через 30 после публикации его первой работы (1942 года). Тогда, в охваченной мировой войной Японии, молодой выпускник университета служил в патентном бюро (как некогда Эйнштейн) и опубликовал свое определение стохастического интеграла в работе, написанной иероглифами, нарисованными кистью, и изданной факсимильным способом. По странному совпадению, так же, как для одной из работ Эйнштейна, отправной точкой для Ито по существу послужило броуновское движение (которое он не воспринимал как физический процесс, а как математическую абстракцию — нигде не дифференцируемую функцию), для изучения которого и пришлось создать стохастический интеграл.

Работа Ито 1942 года прошла совершенно незамеченной. Лишь в начале 50-х годов она появилась на английском языке, но ее мало кто понял, несмотря на ряд докладов, сделанных Ито в США. Одним из первых специалистов, оценивших ее фундаментальное значение, был советский математик Е. Б. Дынкин. В середине 60-х неожиданно выяснилось, что стохастический интеграл является идеальным инструментом для финансово-экономических исследований, в частности для изучения флуктуаций стоимости ценных бумаг, а потом появились и биологические приложения. По мере развития теории стохастических дифференциальных уравнений спектр ее приложений всё расширялся, всё большее число математиков оценили внутреннюю красоту теории, и к началу 80-х значение теории было всеми признано.

Таким образом, общественное признание пришло не сразу: лишь через 64 года после своей первой публикации, Кийоши Ито получил высшую награду, носящую имя великого Гаусса. . .

Доклады, доклады, доклады, . . .

Основная часть работы конгресса — происходящие на нём доклады: пленарные (часовые, предназначенные для всех участников), секционные (сорокаминутные, происходящие одновременно не более чем в семи больших аудиториях) и краткие сообщения (двадцатиминутные, идущие одновременно в двух дюжинах небольших аудиторий). Кроме того, вечернее время выделяется на так называемые постерные доклады, авторы которых стоят рядом с заранее заготовленными плакатами, наглядно описывающими их работу, в надежде на то, что любопытный коллега подойдет и будет расспрашивать о ее содержании.

Из огромной массы докладов, оповещающих о лучших математических достижениях четырехлетия, я скажу лишь несколько слов об одном. Это пленарный доклад французского математика Этьенна Жиса о поведении траекторий одного хорошо известного и простого дифференци-

ального уравнения в окрестности его аттрактора, похожего на две соединенные спирали в различных плоскостях трехмерного пространства. С помощью компьютерной графики, а вернее компьютерной анимации, докладчик показывал на гигантском экране главной аудитории, как различные траектории обвиваются вокруг аттрактора, образуя трехмерные узлы. Глубина полученных результатов, ясность изложения, красота и наглядность компьютерного мультфильма вызвали всеобщее восхищение. Многие слушатели, в том числе автор этих строк, считают этот доклад самым красивым, из всех когда-либо услышанных ими.

Большинство докладов, даже краткие сообщения, делались с помощью проектирования прозрачек или компьютерных заготовок на экран. Возможно, я старомоден, но мне кажется, что эти внешне красивые презентации уступают по силе воздействия традиционным рассказам с мелом у доски, ставшим здесь исключением.

КРУГЛЫЙ СТОЛ

Круглый стол, организованный Европейским математическим обществом и посвященный взаимоотношению математики и общества, состоялся на третий день конгресса в главной его аудитории. Дебаты вызвали живой интерес, на них присутствовали более тысячи математиков и многочисленные видео-, аудио- и пишущие журналисты.

Стол, однако, оказался не круглый, это был тот самый длинный стол, занимающий почти всю ширину огромной сцены главного зала, за которым располагалось начальство в день открытия. За столом на этот раз сидели: председательствующий Жан-Пьер Бургиньон (директор IHES), Филип Тондёр (профессор университета Техаса), Маркус дю Сотуа (Оксфорд), Бёрн Эндквист (Стокгольмский университет), Франсуа Тессеир (директор французской научно-популярной телепередачи) и автор этих строк. Зрители могли смотреть на выступающих на большом экране, на который также проецировались заготовленные ими иллюстрации и тексты.

Выступающие отмечали создавшуюся в последние годы парадоксальную ситуацию: математика, самая универсальная и полезная из всех наук, и в частности творческая математика, остается совершенно не понятой общественным сознанием, неизвестной широкой публике. Так, все знают Альберта Эйнштейна, а кто слышал о Курте Гёделе, хотя работы последнего, по мнению многих, значительно глубже и важнее эйнштейновских теорий? Каждый выступающий предлагал способы выхода из этого тупика и делился своим опытом в этом направлении.

Затем последовали вопросы и дискуссия с участием публики. Когда время, отведенное на круглый стол, закончилось, в аудитории еще

оставалось много желающих выступить. А после журналисты отлавливали некоторых участников и брали у них интервью.

КУЛУАРЫ, УЛИЦЫ, ПАРКИ, МУЗЕИ

Возможно, наиболее эффективная работа происходит не на докладах, не на официальных мероприятиях конгресса, а у аудиторий, в коридорах, в аллеях около конгресс-холла или за чашкой кофе в его многочисленных небольших кафе. Там и знакомятся, и встречаются со старыми друзьями, и очень быстро беседа переходит на животрепещущие вопросы, лица приобретают характерное отрешенное выражение, свидетельствующее о том, что собеседники глубоко погружены в свои мысли, стараясь понять друг друга. Даже в замечательном музее Прадо иногда можно было увидеть беседующих математиков, отсутствующим взглядом скользящих по великим шедеврам Гойи или Эль Греко, и поглощенных в то же время своей математикой...

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оглядываясь назад, чем мне запомнился Мадридский конгресс? Масштабностью, великолепной организацией, роскошью пятизвездочного отеля, куда меня поселили, шедеврами Прадо, необычайной, почти устрашающей, концентрацией гениальных умов, несколькими глубокими или блестящими докладами, полудюжиной важных для меня бесед. Важно было понять, куда идет современная математика. Если верить организаторам конгресса, она идет в сторону сближения разных своих разделов, главным образом, между наукой о случайном и о детерминированном (как в дискретном, так и в непрерывном случае), в сторону сильного возрастания роли различных разделов комбинаторики, а также роли компьютера не только в вычислениях, но и в открытии новых закономерностей.

Приятно было осознать, что главную научную сенсацию произвел наш соотечественник Григорий Перельман, что двое из четырех Филдсовских лауреатов — наши, что большинство участников признает заметное влияние российской математической школы. Я рад за близкого мне коллегу В. А. Васильева, переизбранного на второй четырехлетний срок в небольшой элитный исполком ММС, хотя понимаю, как эта должность будет его отрывать от любимого дела — доказывать новые замечательные теоремы. Конечно, грустно, что большинство наших самых сильных коллег уже не в России, а как говорится, «там», но сейчас, когда мир открыт для всех, большинство лучших математиков мира, и не только наших, постепенно становятся гражданами Вселенной.

А. Б. Сосинский, ВКМ НМУ

Борис Абрамович Розенфельд

(к 90-летию со дня рождения)

М. П. Замаховский

Борис Абрамович Розенфельд родился 30 августа 1917 г. в Петрограде. В октябре того же года его семья переехала в Москву. В 1935–1940 гг. он был студентом Московского энергетического института, где окончил четыре с половиной курса. В 1936 г. одновременно с МЭИ начал посещать механико-математический факультет Московского университета. В 1939 г. окончил экстерном мехмат и был принят в аспирантуру на кафедре дифференциальной геометрии МГУ.

В первой научной работе «Математическая теория круговой диаграммы асинхронного двигателя», опубликованной в журнале «Электричество» в 1940 г., Б. А. Розенфельд доказал, что шкала этой диаграммы является проективной.

В первых математических работах Б. А. Розенфельда, написанных под руководством профессора А. П. Нордена, было доказано, что роль геодезических линий в многообразии прямых 3-мерного эллиптического пространства играют линейчатые геликоиды, а в многообразии m -мерных плоскостей n -мерного эллиптического пространства — многомерные обобщения геликоидов. Эти работы были опубликованы в «Известиях АН СССР» в 1941 г. За них и за аналогичную работу о многообразии сфер Борис Абрамович получил вторую премию на конкурсе студенческих работ мехмата в 1939 г.

В аспирантуре Б. А. Розенфельд занимался под руководством профессора П. К. Рашевского и интенсивно изучал теорию групп Ли, многомерную дифференциальную геометрию и геометрию симметрических пространств. Третий год аспирантуры он провел в Ташкенте и Ашхабаде, куда был эвакуирован МГУ. В Ашхабаде он начал изучать арабский и персидский языки.

В июле 1942 г. Б. А. Розенфельд защитил кандидатскую диссертацию «Геометрия многообразий сфер». Имея в первые годы войны «белый билет» по зрению, он в 1942–1943 учебном году работал и. о. доцента в Харьковском гидрометеорологическом институте в Ашхабаде. Вернувшись в Москву весной 1943 г., работал ассистентом кафедры математики

Московского высшего технического училища до января 1947 г., с полуторогодичным перерывом для службы в армии, где преподавал солдатам-радистам электротехнику и радиотехнику.

В мае 1945 г. на торжественном заседании в МГУ, посвященном 225-й годовщине основания Российской академии наук, профессор С. П. Фиников познакомил Б. А. Розенфельда с Эли Картаном, который приехал на это празднование с группой французских ученых. На следующий день Борис Абрамович рассказал Э. Картану о своих работах. Беседа с сержантом Советской армии, Э. Картан вспоминал, как он, будучи сержантом французской армии, беседовал о своих работах с приехавшим в Париж Софусом Ли.

В декабре 1947 г. Б. А. Розенфельд защитил в МГУ докторскую диссертацию «Теория семейств подпространств», в которой изучались семейства плоскостей проективных и неевклидовых пространств и сфер конформных пространств. Группы преобразований всех этих пространств являются простыми группами Ли бесконечных серий A_n , B_n , C_n , D_n , известных еще самому Софусу Ли.

Группа проективных преобразований n -мерного вещественного проективного пространства является одной из некомпактных групп класса A_n , группы движений $2n$ -мерных и $(2n - 1)$ -мерных вещественных неевклидовых пространств — группы классов B_n и D_n соответственно, компактные в случае эллиптических пространств, группы конформных преобразований $2n$ -мерных и $(2n - 1)$ -мерных вещественных конформных пространств — некомпактные группы классов D_{n+1} и B_n . Некомпактной группой класса C_n является «группа линейного комплекса» или «группа симплектических преобразований» $(2n - 1)$ -мерного вещественного проективного пространства. В начале XX века Г. Г. Фубини и Э. Штуди определили n -мерное комплексное эрмитово эллиптическое пространство, группой движений которого является компактная группа класса A_n .

В своей диссертации Б. А. Розенфельд определил «образы симметрии», к которым относятся точки, прямые и плоскости неевклидовых пространств, пары точек, окружности и сферы конформных пространств, а также « m -пары» (m -мерная + $(n - m - 1)$ -мерная плоскости) n -мерного проективного пространства. В диссертации он доказал также, что многообразие 0-пар (точка + гиперплоскость) n -мерного вещественного проективного пространства является моделью n -мерного двойного эрмитова эллиптического пространства, т. е. аналога пространства Фубини — Штуди, в котором комплексные координаты точек заменены двойными числами $a + be$, где $e^2 = 1$, если за расстояние между двумя 0-парами принять число, косинус которого равен двойному отношению точек и гиперплоскостей этих 0-пар.

Э. Картан, развивая идеи Фубини и Штуди, определил n -мерное кватернионное эрмитово эллиптическое пространство и доказал, что группа движений этого пространства является компактной простой группой Ли класса C_{n+1} . В 1949 г. был опубликован сборник переведенных Б. А. Розенфельдом статей Э. Картана «Геометрия групп Ли и симметрические пространства», к которому он добавил статью «Симметрические пространства и их геометрические приложения». В этой статье было доказано, что многообразие прямых линий $(2n + 1)$ -мерного вещественного симплектического проективного пространства является моделью n -мерного антикватернионного эрмитова эллиптического пространства, получаемого из пространства, определенного Картаном, заменой кватернионных координат точек антикватернионами $a + bi + ce + df$, где $i^2 = -1$, $e^2 = 1$, $ie = -ei = f$, если за расстояние между двумя прямыми принять число, косинус которого равен двойному отношению этих прямых и их $(2n - 1)$ -мерных симплектических поляр.

В 1947–1950 гг. Б. А. Розенфельд работал в военном научно-исследовательском учреждении. В 1950–1955 гг. он был профессором кафедры геометрии Азербайджанского университета в г. Баку.

В 1951 г. Г. Фрейденталь опубликовал статью «Октавы, особые группы и октавная геометрия». Октавами в этой статье назывались октонионы или «числа Кэли» — обобщения кватернионов, образующие 8-мерную алгебру, являющуюся неассоциативным телом, в котором всякие два элемента порождают ассоциативное подтело. «Особые группы» — это особые простые группы Ли классов G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 , открытые В. Киллингом и детально изучавшиеся Э. Картаном, который установил, что компактная группа класса G_2 изоморфна группе автоморфизмов тела октонионов. Фрейденталь установил, что компактная группа класса F_4 изоморфна группе движений октонионной эрмитовой эллиптической плоскости, а группа проективных преобразований этой плоскости является одной из некомпактных групп класса E_6 .

Применяя тот же прием, что и в докторской диссертации, Б. А. Розенфельд доказал, что группа проективных преобразований октонионной проективной плоскости изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над алгеброй двойных октонионов, откуда следует, что компактная группа класса E_6 изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над алгеброй комплексных октонионов. Этот результат был опубликован в 1954 г. в «Докладах АН Азерб. ССР».

В январе 1955 г. Б. А. Розенфельд вернулся в Москву и в 1955–1964 гг. работал профессором и заведующим кафедрой математики педагогических институтов Загорска и Коломны в Московской области. В 1956 г. в «Докладах АН СССР» он высказал предположение, обобщающее его результат 1954 г. на компактные группы классов E_7 и E_8 . Это

предположение было основано на указании Э. Картана, что компактные группы классов E_6 , E_7 и E_8 являются группами движений симметрических римановых пространств размерностей 32, 64 и 128. Предположение Б. А. Розенфельда состояло в том, что эти симметрические пространства представляют собой эрмитовы эллиптические плоскости над тензорными произведениями тела октонионов на поле комплексных чисел и на тела кватернионов и октонионов соответственно. Впоследствии это было доказано Э. Б. Винбергом¹⁾, и аналогичные геометрические интерпретации для всех некомпактных групп классов E_6 , E_7 и E_8 были найдены Г. Фрейденталем и Б. А. Розенфельдом.

На основе лекций по геометрии, которые Б. А. Розенфельд читал в Коломенском пединституте, им были написаны две монографии: «Многомерные пространства» и «Неевклидовы пространства». В первой из этих книг была изложена аналитическая, «элементарная» и дифференциальная геометрия вещественных многомерных пространств: аффинного, евклидова, проективного, конформного и псевдоевклидовых, во второй книге — геометрия эллиптического, гиперболического, псевдоэллиптических и псевдогиперболических пространств, а также пространств, группы движений которых могут быть получены предельными переходами из групп движений этих пространств. Эти книги были опубликованы в Москве в 1966 и 1969 гг.

Наряду с геометрией, Б. А. Розенфельд профессионально занимался историей науки.

В Баку Б. А. Розенфельду предложили прочесть курс лекций по истории математики. Готовясь к этим лекциям, он узнал, что в XIII веке центром мировой науки была астрономическая обсерватория в городе Мараге в Южном Азербайджане, основанная Насирэдином ат-Туси. В Баку творчество этого ученого изучали несколько математиков и астрономов, и 17 февраля 1951 г. состоялось торжественное празднование 750-летия со дня рождения ат-Туси. Б. А. Розенфельда привлекли к изучению творчества этого ученого, и он участвовал в переводе его математических трудов на русский язык и сделал несколько докладов в Баку и в Москве. Один из этих докладов был опубликован в 1951 г. в Москве в «Историко-математических исследованиях» (ИМИ). При подготовке этой статьи Б. А. Розенфельд обнаружил, что вопросом о постулате параллельности, который изучал ат-Туси, занимался и Омар Хайям. Этот трактат Хайяма и другие его трактаты на арабском и персидском языках он нашел в Баку и подготовил русские переводы этих трактатов с

¹⁾Предложенное Э. Б. Винбергом в 1964 г. единообразное описание особых простых групп Ли явилось косвенным подтверждением гипотезы Б. А. Розенфельда. Окончательное подтверждение эта гипотеза получила в работе Э. Б. Винберга в 2004 г. — Прим. ред.

подробными комментариями. Эти переводы были опубликованы в 1953 г. в ИМИ, а в 1962 г. отдельной книгой в Москве.

В 1954 г. в ИМИ были изданы сделанные Б. А. Розенфельдом переводы с комментариями математических трактатов Джемшида ал-Каши, директора знаменитой Самаркандской обсерватории Улугбека. В 1956 г. они вышли в Москве отдельной книгой. В дальнейшем Б. А. Розенфельд перевел с арабского языка на русский многие математические и астрономические труды ал-Хорезми, ал-Фергани, Сабита ибн Корры, Ибн ал-Хайсама, ал-Бируни, Хайяма, ат-Туси и Улугбека. Некоторые из этих переводов были изданы отдельными книгами в Москве и в Ташкенте.

В 1964–1990 гг. Б. А. Розенфельд работал старшим и ведущим научным сотрудником Института истории естествознания и техники АН СССР. В ИИЕТ он принимал участие в подготовке коллективных трудов по истории математики, написал с соавторами научные биографии тех ученых, труды которых Б. А. Розенфельд переводил с арабского, а также научную биографию русского математика А. П. Котельникова (1865–1944), лекции которого он слушал в МЭИ и вместе с которым работал в МВТУ.

В 1976 г. была опубликована книга Б. А. Розенфельда «История неевклидовой геометрии», расширенный английский перевод которой был издан в 1988 г.

В 1983 г. была опубликована книга Б. А. Розенфельда и Г. П. Матвиевской «Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII–XVII вв.)», содержащая сведения о трудах тысячи математиков и астрономов стран ислама, их рукописях, изданиях, переводах и открытиях.

В 1971 г. Б. А. Розенфельд был избран членом-корреспондентом Международной академии истории науки, а в 1978 г. — действительным членом этой академии.

В 1990 г. Б. А. Розенфельд с женой переехали в США, где жили обе их дочери со своими семьями. В 1990–1995 гг. он работал профессором университета штата Пенсильвания, профессорами которого являются его дочь Светлана и ее муж Анатолий Каток. В этом университете он читал лекции по геометрии групп Ли и по истории математики.

В 1993 г. Американским математическим обществом была опубликована книга Б. А. Розенфельда и М. А. Аквиса «Эли Картан (1869–1951)» — научная биография ученого, содержащая анализ его открытий в теории групп Ли, теории алгебр, теории бесконечномерных аналогов групп Ли и ее приложений к дифференциальной геометрии, а также геометрии «обобщенных пространств» и, в частности, симметрических римановых пространств и пространств аффинной связности. Сын Э. Картана,

профессор Анри Картан написал Б. А. Розенфельду об этой книге «Это — лучший памятник моему отцу».

В 2003 г. в Стамбуле Б. А. Розенфельд опубликовал совместно с профессором Э. Ихсаноглу книгу «Математики, астрономы и другие ученые исламской цивилизации и их труды (VII–XIX вв.)» на английском языке, содержащую сведения о полутора тысячах ученых стран ислама. В 2004 г. в Барселоне в журнале «Сухайль» Б. А. Розенфельд опубликовал дополнение к его книге с Ихсаноглу.

В 2003 г. в Москве была издана книга Б. А. Розенфельда «Аполлоний Пергский» — научная биография величайшего ученого древнего мира, содержащая анализ всех открытий Аполлония в аффинной, проективной, конформной и дифференциальной геометрии, многие из которых были открыты в Западной Европе только в XVII–XIX вв.

В 1997 г. в Дордрехте (Нидерланды) была опубликована (на английском языке) книга Б. А. Розенфельда «Геометрия групп Ли». Эта книга получила в том же году почетный отзыв Казанского университета на конкурсе на премию имени Лобачевского. В 2003 г. в Москве была издана книга Б. А. Розенфельда и М. П. Замаховского «Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства», содержащая русский перевод английской книги Бориса Абрамовича и две новые главы.

В 2005 г. в Москве в журнале «Философские исследования» была опубликована статья Б. А. Розенфельда «Об устойчивости материальных структур», плод его многолетних размышлений.

В общей сложности Б. А. Розенфельдом опубликовано 450 научных книг и статей. Под его научным руководством были защищены 82 кандидатские диссертации. Восемь его учеников стали докторами наук и профессорами.

Об обучении математике

У. Тёрстон

Нынешнее состояние преподавания математики является неприемлемым. Впрочем, хотя это обстоятельство волнует многих, реальные перемены происходят медленно.

Лица, принимающие стратегические решения, зачастую не понимают суть математики и математического образования. В школах, относящихся к разным округам, «реформы» зачастую проводятся в противоположных направлениях. Это свидетельствует о том, что нам нужно не только признать существование и важность проблемы, но и вникнуть в нее.

Я верю, что наша страна сможет эти проблемы решить: трудности, вызванные недостаточным пониманием, не являются неразрешимыми. У нас наличествует и политическая воля, и ресурсы, и интеллект; чего не хватает, так это верного направления.

1. СИМПТОМЫ

Многое свидетельствует о том, что с обучением математике не все ладно. Число старшекурсников, специализирующихся по математике, сейчас примерно в два раза меньше, чем 15 лет тому назад.¹⁾ Количество американских аспирантов более чем вдвое уменьшилось по сравнению с тем, что было 15 лет назад (хотя частично это уменьшение было компенсировано за счет аспирантов-иностранцев). Стандартные тесты свидетельствуют, что наши учащиеся на всех уровнях демонстрируют более низкий уровень знаний и умений, чем в других промышленно развитых странах.

Когда взрослый американец видит математика, обычно он испытывает смущение. Извиняющимся тоном он рассказывает о последнем из изучавшихся им математических курсов (как правило, это тот самый курс, на котором ваш собеседник и утратил понимание предмета).

Многие компании отмечают, что серьезным недостатком их работников является незнание математики. С развитием технологий отпала

W. Thurston. Mathematical education // Notices of the AMS. Vol. 37, 1990. P. 844–850. Публикуется с любезного разрешения AMS и автора текста. Перевод С.М. Львовского.

¹⁾Статья была впервые опубликована в 1990 году — *прим. пер.*

необходимость в знании математики на некоторых рабочих местах (например, математика не нужна кассиру, пробывающему гамбургеры), но при этом пропали и многие рабочие места, не требующие квалификации (например, рабочий у конвейера), и появилось множество других, на которых необходима серьезная математическая подготовка.

Студенты, изучающие математические курсы в колледже, не идут на контакт. Они боятся рассуждать и боятся придумывать что-либо самостоятельно. Если походить по урокам в разных классах, то будет заметно, как резко падает с возрастом естественность и живость. Создается впечатление, что в школе вытравливается любопытство и естественный интерес маленьких детей к математике.

В большинстве учебных заведений стало труднее, чем двадцать лет назад, добиваться того, чтобы учащиеся делали домашние задания или занимались вне стен классной комнаты.

Даже у тех учащихся колледжей, что успешно освоили математическую программу старших классов, включая начала анализа, познания в математике очень узки.

2. РАЗОБЩЕННОСТЬ

Серьезным источником трудностей и препятствием к их разрешению является разобщенность, царящая в обширном сообществе людей, связанных с математическим образованием, — от детского сада и до аспирантуры. В частности, очень мало обмениваются информацией преподаватели математики в колледже и в старших классах средней школы. Уровень взаимопонимания между лицами, занимающимися реформой школьной программы и программы колледжа, также оставляет желать лучшего. Эта разобщенность проистекает отчасти из того, что существует несколько различных математических ассоциаций, как-то: Американское математическое общество (AMS), представляющее в первую очередь тех, кто занимается научными исследованиями; Математическая ассоциация Америки (МАА), представляющая в первую очередь преподавателей на младших курсах высших учебных заведений; Национальный совет учителей математики (NCTM), представляющий наиболее увлеченных своим делом школьных учителей математики. Кроме того, есть организации, представляющие двухлетние колледжи, прикладную математику, статистику, исследование операций, а также информатику.

Списки членов AMS и МАА перекрываются не более чем на треть. Большинство членов AMS даже и не подозревают о существовании NCTM. И наоборот, очень немногие члены NCTM знают про AMS. Очень немногие математики, занимающиеся научной работой, общаются со школьными учителями вне связи со школьными успехами своих детей. Во многих

университетах хорошо поставлены и исследовательская работа, и подготовка учителей, но даже и в них научные работники к подготовке учителей отношения не имеют.

Еще более серьезная разобщенность возникает из-за того, что реальные решения, касающиеся школьного образования, принимаются во многих разных школьных округах, а решения, касающиеся университетского образования, принимаются на многих разных факультетах. Многие размышляют об имеющихся проблемах и пытаются их самостоятельно решить; многие из этих попыток вполне успешны. К сожалению, при этом совершенно недостаточны координация и обмен наработываемым опытом.

3. МАТЕМАТИКА — НАУКА ПРОТЯЖЕННАЯ

Одной из черт науки математики, которую необходимо учитывать при ее преподавании, является ее «протяженность», то есть длина цепочек связей, в которых каждая очередная концепция основывается на предыдущих. Математическое рассуждение может быть очень ясным и бесспорным, и как только некоторый факт установлен, на нем можно основываться. Это означает, что можно строить концептуальные структуры, являющиеся одновременно весьма протяженными, очень надежными и чрезвычайно мощными.

Структура математики похожа не на дерево, а на строительные леса со множеством подпорок. Как только леса смонтированы, нетрудно надстроить и следующий уровень, но невозможно смонтировать очередной уровень, пока нет всех предыдущих.

Трудности возникают тогда, когда учащиеся, занимающиеся каким-либо курсом, находятся на разных этапах освоения предыдущего материала. Кроме того, они обычно стесняются говорить, что из этого предыдущего материала они знают, а что — нет. Например, многие из изучающих начала анализа не умеют правильно складывать дроби, по крайней мере в символическом виде; типичная ошибка:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d},$$

что гораздо проще, чем

$$\frac{ad+cb}{bd}.$$

И при этом учащимся неприятно сознавать, что они нетверды в сложении дробей, так что они не торопятся это признавать и задать (хотя бы самому себе) вопрос, как оно устроено.

Сложение дробей — очень скучное дело для того, кто с ним уже знаком, но умение это делать необходимо при изучении алгебры, а алгебра

необходима для анализа. Если поговорить с таким учащимся, то нетрудно выяснить, какие части общей картины нуждаются в уточнении, и поправить дело в рамках индивидуальной работы. Трудно угадать, на каком уровне вести преподавание, чтобы оно было и понятно, и интересно группе учащихся с различной подготовкой.

4. МАТЕМАТИКА — НАУКА ШИРОКАЯ

Математика — наука не только протяженная, но и очень широкая. Многие из ее разделов никак не обсуждаются в рамках стандартной программы, завершающейся началами анализа, а у тех разделов, которые в программе присутствуют, есть множество необсуждаемых подразделов.

В поколении моих родителей (сороковые годы) первым математическим курсом в колледже был курс алгебры. Вскоре после этого место первого математического курса заняли начала анализа, которыми в настоящее время, как правило, владеют лучшие ученики старших классов школы. Сейчас начала анализа большей частью перешли в программы средней школы в богатых школьных округах, так что большинство студентов, специализирующихся в математике и естественных науках в наших лучших университетах, уже проходили курс начал анализа до поступления в университет. В Принстоне, например, две трети поступающих имеют в своем багаже хотя бы семестровый курс анализа.

Это ускорение темпа прохождения материала имело и свои минусы: оно сопровождалось тенденцией к отсечению «побочных» тем. Например, когда я учился в школе, то, как правило, наряду с планиметрией изучалась также стереометрия и сферическая геометрия. Ныне эти темы уже давно исключены. Набор знаний по математике у типичного учащегося напоминает высокую, но шаткую башню: она достигла максимальной высоты, при которой фундамент еще может ее держать, а расти дальше она не может.

Две эти тенденции (удлинение и сужение школьной программы по математике) были подстегнуты все более широким использованием стандартизированных тестов. Тесты предназначены охватить темы, входящие в самые ходовые программы: если какую-то тему изучает только половина учащихся, то нечестно включать ее в стандартизированный тест. Это не столь плохо, если тесты используются исключительно для беспристрастной *оценки*. На самом деле, однако, высокие результаты часто рассматриваются как *самоцель*. Депутаты, пресса и родители давят на руководителей органов народного образования и школьные советы, органы народного образования и школьные советы давят на директоров, директора давят на учителей, учителя — на учеников — и все ради того, чтобы показать более высокие результаты тестов. Печальным следствием этого

является то, что многие математические курсы специально разрабатываются ради того, чтобы показать высокие результаты в том или ином тесте.

Никто не диагностирует воспаление легких с помощью одного только градусника, и никто не пытается лечить эту болезнь, предлагая пациенту пожевать льдинку. Подобного подхода мы должны придерживаться и при оценке роли тестирования в обучении математике.

Долгосрочным целям математического образования лучше бы способствовало, если бы меньше внимания уделялось объему стандартной программы, если бы программа была более диверсифицирована за счет включения тем, для изучения которых нужно меньше предварительных знаний. Определенные тенденции в этом направлении имеются (например, включение курсов по конечной математике и теории вероятностей), но тут есть много места и для дальнейшей работы.

5. МАТЕМАТИКА БЛИЗКА К ИНТУИЦИИ И РЕАЛЬНОСТИ

Обычно учащиеся теряют ощущение связи математики с реальностью и интуицией. Их учителя, начиная с детского сада, как правило, чувствуют себя очень неуютно, как только им предлагают сойти с проторенной дорожки. У маленьких детей есть множество оригинальных подходов к математическим вопросам, но учителя, как правило, нестандартные подходы не поощряют: отчасти потому, что понять то, что ребенок думает или пытается сказать, трудно, и у учителя это не выходит, а отчасти потому, что учитель считает неправильным применять нестандартный метод или давать нестандартное объяснение.

К тому времени, когда учащийся оказывается в колледже, он уже приучен не пытаться думать самостоятельно и не говорить вслух, о чем он думает. Он просто старается понять, какие стандартные процедуры ему надо выучить. Стоит в процессе занятия хоть немного отойти от программы курса или текста учебника, как обязательно найдется кто-нибудь, кто спросит, будет ли этот материал на экзамене.

Пока математика не имеет реальной связи с людьми, люди вряд ли будут думать о ней или пользоваться ею после завершения курса.

6. ОПЕРЕЖЕНИЕ ПРОГРАММЫ И ОЛИМПИАДЫ

Наряду с тенденцией уделять особое внимание тестам пришла и мода на ускоренное освоение программы. Для способного ученика не очень сложно освоить программу по математике гораздо быстрее, чем предусмотрено.

С этим ускорением связано несколько проблем. Часто те, кто усваивают программу с опережением, имеют пробелы в подготовке, которые

проявляются только позднее. К этому моменту учащемуся может быть стыдно признать наличие пробела, и он пытается имитировать понимание. Это, как правило, приводит к катастрофическим последствиям.

Другая беда состоит в том, что опережающие программу учащиеся начинают считать, что главное — не качество обучения и мышления: главное — опережать своих ровесников. Поскольку у учащегося впереди целая жизнь, постольку этот подход является близоруким. Когда такому студенту исполнится 25–30 лет, оценивать его будут не по тому, насколько он успел забежать вперед, а по качеству его работы. Часто такие ученики бывают серьезно разочарованы, когда оказывается, что их талантливые, но не забежавшие вперед соученики с ними сравнялись и они уже не выделяются на фоне многих других. В богатых школьных округах проблему зачастую усугубляют и родители, стремящиеся к тому, чтобы их дети максимально быстро прошли школьную программу — до того, как они действительно к этому готовы.

Третья сложность, связанная с опережением программы, связана с социальной адаптацией. Часто учащийся, который моложе своих одноклассников, способен освоить программу, но с трудом вписывается в их коллектив.

С тенденцией к опережающему усвоению программы связана и популярная тенденция рассматривать математику как спортивное состязание. Существует множество команд старшеклассников, участвующих в математических соревнованиях: команды из различных школ собираются вместе, и им выдается несколько задач, на решение которых отводится около часа.

Проводятся также математические олимпиады на уровне отдельных штатов, всей страны, а также международные. Тем, кто на них успешно выступает, эти олимпиады приносят радость; для таких учащихся они и интересны, и полезны с образовательной точки зрения. Есть, однако, и другая сторона медали: олимпиады служат поддержанию того мнения, что либо у человека есть «хорошие математические гены», либо их нет. Олимпиады развивают нацеленность на скорость решения в ущерб глубине размышлений. На олимпиадах основную роль играют задачи, представляющие собой загадки, которые решаются с помощью искусственного приема, а вовсе не более реалистичные задачи, в которых важны систематические и упорные размышления.

Такой подход отваживает от математики многих учащихся, которые не настолько быстро думают или хуже натренированы, но которые при этом могли бы хорошо решать задачи, будь у них время на их продумывание. Некоторые из лучших олимпиадников действительно становятся хорошими математиками, но многие из лучших математиков олимпиадными успехами не блистали. Скорость мышления в математике

полезна, но это лишь одно из качеств, полезных математику. Тем, кто математическими исследованиями заниматься не станет, необходимые для участия в математической олимпиаде навыки нужны еще меньше.

Математические олимпиады немного похожи на состязания по знанию орфографии. Есть некоторая связь между письмом без орфографических ошибок и умением хорошо писать, но совсем не обязательно, что ученик, лучше всех в штате знающий орфографию, обладает писательским талантом, и некоторые талантливые писатели пишут с ошибками. Если бы было принято путать писательские умения с умением грамотно писать, то у многих людей, которые могли бы стать писателями, отпала бы охота пробовать себя на этом поприще.

Я полагаю, что для решения этих проблем следует выстроить систему, основанную на том, что математика широка, с тем чтобы более продвинутые учащиеся имели возможность проработать материал более глубоко, заглядывая и в соседние темы, и не торопиться обгонять своих сверстников.

7. ТАЙНА И ОВЛАДЕНИЕ

Математики обладает поразительной сжимаемостью. Вы можете долго мучиться, пытаясь несколькими способами и шаг за шагом понять какую-то идею или конструкцию, но как только подлинное понимание достигнуто и вы можете посмотреть на то, чем вы овладели, как на единое целое, так (зачастую) предмет ваших размышлений резко сокращается в объеме: вы можете «отложить его на полку», быстро вспомнить при необходимости и использовать в качестве всего лишь одного из шагов в каком-то еще рассуждении. Озарение, которым сопровождается этот процесс, — одна из прекрасных черт занятий математикой.

Освоив, пусть и ценой больших усилий, какое-то математическое понятие, очень трудно поставить себя на место того, для кого это понятие окружено завесой тайны.

Помню, как в пятом классе я пришел к поразившему меня пониманию, что ответ на вопрос «сколько будет 134 , деленное на 29 ?» — просто $134/29$. Это же удивительно, от какого количества работы можно освободиться! Для меня деление 134 на 29 было утомительным заданием, тогда как за таким предметом, как $134/29$, никакого труда не стояло. В радостном возбуждении я прибежал к отцу и рассказал ему о своем замечательном открытии. Он мне ответил, что да, конечно, так оно и есть: a/b и a , деленное на b , — это просто синонимы. Для него это был всего лишь еще один вариант обозначений.

Один из моих учеников рассказывал, что как-то он зашел в начальную школу и его попросили научить ребенка вычитать дроби. Мой ученик был

поражен и отрезвлен, увидев, сколько всего содержится в этой тривиальной для него премудрости, когда изучаешь ее в первый раз.

Математика полна такими вещами на всех уровнях. Она продолжает расти.

Добытые напряженным трудом мощные инструменты, которые доступны не задумывающимся об этом математикам, но не учащимся, затрудняют математикам возможность учиться у своих учеников. Поэтому возникает препятствие психологического характера, мешающее математикам выслушивать учащихся до конца.

В преподавании математики важно очень стараться преодолевать это препятствие и не мешать учащимся продумывать различные вещи самостоятельно.

8. УМЕНИЕ И СМУЩЕНИЕ

Кроме того, более продвинутые учащиеся знают много того, с чем менее продвинутые учащиеся еще не знакомы. Когда они слышат, как другие небрежно перекидываются непонятными словами, которые, конечно же, должен знать каждый образованный взрослый человек, при том, что они и понятия не имеют, о чем идет речь, они чувствуют себя очень неуютно. Этим учащимся не приходит в голову, что с течением времени и они ознакомятся с этими теориями, выучат соответствующие слова и смогут ими столь же небрежно обмениваться. Я помню много случаев, когда я пугался математических слов и понятий: «отрицательный», «десятичный», «деление столбиком», «бесконечность», «алгебра», «переменная», «уравнение», «анализ», «интегрирование», «дифференцирование», «многообразие», «вектор», «тензор», «пучок», «спектр» и так далее. Далеко не сразу я привык к этому явлению и перестал смущаться.

Учителей математика тоже нередко смущает. Учителя старшей школы зачастую стесняются подходить к преподавателям колледжей и университетов. При этом они (не без оснований) задаются вопросом, знакомы ли университетские профессора с задачами, которые призваны решать учителя. Контакт между теми, кто преподает математику в школах, колледжах и университетах, так мало, что очень немногие университетские профессора имеют представление о проблемах обучения в средней и начальной школе. Что же до учителей начальной школы, то они обычно неуверены в своих математических познаниях и боятся обращаться к кому бы то ни было.

9. ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ — ОДНО

У проблем математического образования на всех уровнях (от детского сада и до аспирантуры) и у их решений — много общего. Недостаток

общения — это воистину плохо, а восстановление общения — это воистину прекрасно.

В течение последних двух лет я встречался со многими людьми, связанными с математическим образованием на всех уровнях, будучи членом MSEB (Совет по обучению математическим наукам — общеамериканская организация, включающая в себя людей с самым различным опытом в математике и в образовании, в том числе и какое-то количество учителей). И я многому научился.

В весеннем семестре 1990-го года Джон Конвей, Питер Дойл и я организовали в Принстоне новый курс «Геометрия и воображение», вобравший в себя многое из того, чему я научился в MSEB. Мы преподавали совместно, избегая лекций и уделяя особое внимание групповым обсуждениям среди учащихся. Основное ударение было сделано на конкретных примерах, совместном обучении и решении задач. Мы просили студентов вести тетради и подробно записывать свои мысли на хорошем английском языке. По окончании курса каждый студент выполнил курсовую работу. Такие принципы обучения обычны в дошкольном и школьном образовании, согласно текущим стандартам NCTM.

В заключение курса мы провели поразившую всех «геометрическую ярмарку»: что-то вроде научной ярмарки,²⁾ но без призов и с попкорновыми машинами.

Курс оказался качественно более удачным, чем все то, что мы преподавали до этого. Студенты многому научились; они решали задачи, которые мы бы и не рискнули предложить в колледже на обычном занятии.

В числе прочего, мы обсуждали и вопросы обучения математике. Мы раздали студентам набросок этой статьи, по материалам которого они написали 70 содержательных сочинений, основанных на их собственном опыте. Много полезного из этих сочинений включено в нынешнюю версию этого текста.

10. МЕНЬШИНСТВА

Почему среди математиков так мало женщин и так мало представительниц меньшинств неазиатского происхождения?

Я убежден, что это во многом связано с недостатками школьной программы по математике и школьного обучения. То, как математику преподают в школах, не отвечает подлинным целям математического

²⁾ Научная ярмарка — состязание, на котором жюри оценивает выполненные школьниками «проекты» (примеры проектов для школьников разных возрастов: «Факторы, влияющие на рост бактерий», «Влияние солнечной активности на распространение радиоволн», «Наша Солнечная система»). — *прим. пер.*

образования. Очень трудно понять глубину, жизненность, силу и широту математики, если знать о ней только то, что обычно рассказывают в школах. Я думаю, что большинство из тех, кто освоили предмет и стали математиками, программистами и т. п., имели возможность изучать математику помимо школы: иногда дома, иногда по книгам, иногда у выдающегося учителя, и часто — в компании таких же «ботаников» в школе. Когда я учился в школе, я входил в такую компанию (хотя слова «ботаник» тогда еще не было), и я ей очень благодарен. Однако же белому мальчику или мальчику азиатского происхождения войти в такую компанию проще, чем чернокожему, испаноязычному или девочке.

Поскольку указанные выше пути внешкольного изучения математики являются в настоящее время основными для лучших студентов, повышение качества преподавания математики в школе должно послужить выравниванию шансов, в особенности для афроамериканцев, женщин и испаноязычных. При преподавании тем, кто пока что непривычен к математическому стилю рассуждений, особенно важно, чтобы математика представляла им не в разбавленном виде, но опиралась на их реальный опыт.

В большой степени это связано и с робостью. Упор на опережение программы, высокие результаты тестов и соревновательный дух усугубляют те небольшие различия, что возникают по иным причинам.

11. Цели и СТАНДАРТИЗИРОВАННЫЕ ТЕСТЫ

Какова польза от обучения математике?

11.1. МАТЕМАТИКА В ЖИЗНИ. Во-первых, математика — это важный инструмент в повседневной жизни. Предположим, что вы не торопясь проходите мимо магазинной полки, на которой стоит кофе в пакетах по 13 унций и в жестяных банках по 16 унций; можете ли вы, переработав эту информацию вкупе с ценами и ярким объявлением «содержит на 23% больше!», решить, кофе в какой упаковке обойдется вам дешевле, и все это — пока вы идете вдоль полки? Когда вы покупаете новую машину, вы хорошо понимаете все хитрости с кредитом и скидками? Собственно, если бы большинство покупателей это понимало, то хитрости бы и не применялись.

Во-вторых, умение математически рассуждать важно для того, чтобы быть сознательным гражданином. Можете ли вы разобраться в суждениях об опасности для здоровья различных веществ и решить, насколько эти суждения обоснованы? Когда вы слушаете выступление политического деятеля, способны ли вы проанализировать, насколько разумны приводимые им статистические данные и что они на самом деле доказывают? Сможете ли вы правильно провести измерения и вычисления, необходимые для простых плотницких и швейных работ? Умеете ли вы

планировать расходы? Если вы видите в газете или журнале диаграмму, понимаете ли вы, что она означает, и знакомы ли вы с нехитрыми уловками, позволяющими скрыть или подчеркнуть какое-то обстоятельство?

В-третьих, математика — инструмент, необходимый на множестве рабочих мест в нашем все более сложном и технологичном обществе. Она используется повсюду и по-всякому. Зубной техник, мастер по ремонту факсов, менеджер в «Макдональдсе», риэлтер, консультант по компьютерам, бухгалтер, банкир, няня, адвокат — все они для выполнения своих профессиональных обязанностей нуждаются в каком-то владении математикой.

В-четвертых, математика интенсивно используется (порой неправильно) в большинстве отраслей науки. Многие в теоретической науке и является на самом деле математикой. Многие ученые пользуются широко распространенными компьютерными программами для статистических вычислений, что облегчает им вычисления. Однако же те, кто используют такие программы, зачастую нетвердо понимают, на чем основана работа этих программ, и часто применяют статистические тесты и графическое представление результатов некорректным образом.

11.2. МАТЕМАТИКА ЖИВА. Для меня эти практические применения важны, но вторичны. Математика обладает замечательной красотой, силой и стройностью в большей степени, чем можно было бы ожидать. Она все время меняется; на каждом новом повороте мы обнаруживаем новые прекрасные и неожиданные связи с тем, что нам уже знакомо. Перемены в математике быстры — потому что математические рассуждения базируются на очень прочной основе.

Математика похожа на полет фантазии — но такой, при котором фантастическое становится реальным и оказывается, что оно было всегда. Занятия математикой похожи на фантазирование, но на самом деле они состоят в том, что наше восприятие обостряется, в результате чего мы открываем закономерности, присутствующие вокруг нас. В своей знаменитой книге «Апология математика» Г. Х. Харди воздал хвалу теории чисел за чистоту, абстрактность и полную невозможность применить ее на практике — а сейчас этот же раздел математики применяется очень широко, особенно в задачах кодирования и декодирования.

Мой опыт математика убеждает меня в том, что цели эстетические и практические оказываются для математики очень близки друг к другу. Наше чувство прекрасного влечет нас к той математике, что обладает определенной глубиной и стройностью. А затем сами по себе глубина и красота математических конструкций приводят к тому, что они неожиданным образом проявляются в других частях математики и в окружающем мире.

Поделиться с учащимися прелестью и интеллектуальным опытом математики, дать возможность полетать там, где мы ранее ходили пешком, — вот в чем цель математического образования.

11.3. ТЕСТИРОВАНИЕ И «ПРОВЕРЯЕМОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ». К сожалению, цели школьного преподавания математики оказались удивительно узкими, много более узкими, чем даже практические цели, перечисленные выше, не говоря уж об остальном. В последнее время и политики, и публика обычно требуют от школ «проверяемых результатов». Это было бы прекрасно, если бы результаты школьного обучения не определялись по узконацеленным тестам.

Представим себе, что считалось бы, что школьники освоили Шекспира, если они могут пройти тест по английскому языку XVI века, или же что они научились хорошо писать, если они умеют правильно выбрать грамматическую форму из четырех предложенных.

Органы народного образования (как региональные, так и на уровне штатов) выдают не программы обучения, а всего лишь список умений, которыми школьники должны овладеть к определенному возрасту: сложение в строчку или в столбик, прибавление двузначных чисел к двузначным, если сумма двузначна, и отдельно то же, если сумма трехзначна, и т. п.

В статье, открывающей один из разделов номера «Нью-Йорк Таймс» от 24 июля 1990 года, сравниваются начальные школы в двух разных «трудных» районах Бруклина. Первая из этих школ была «успешной»; в ней ежедневно проводилось два урока чтения, причем второй из них был целиком посвящен отработке навыков, необходимых для написания тестов, и тренировкам со стандартными тестами на чтение. В этой школе 80,5% учащихся прошли тест успешно. Вторая школа была «неуспешной»: в ней подготовка к тесту занимала «только» три месяца. В этой школе тест прошли 36,4% учащихся.

Журналист приводит пример того, как директор задает тон в успешной школе:

Ей недостаточно того, что даются всего лишь правильные ответы: она хочет, чтобы были верны и все промежуточные шаги. В одном из четвертых классов она обратила внимание, что девочка по имени Кеанда Снэгг предложила странный, но правильный подход к задаче, в которой требовалось выяснить, в каком из двух магазинов ниже средняя цена товара. «Похоже, ты хочешь получить ответ, не сделав работы», — сказала она девочке.

Наблюдая, как Кеанда проводит арифметические вычисления, она подчеркнула, сколь важно аккуратно записывать числа в столбик.

Не видя этих школ, я не могу сказать, какая из них на самом деле более успешна, но я знаю одно: ни результаты тестов, ни пересказанная в статье история об этой успешности не свидетельствует.

12. МЫШЛЕНИЕ И ЗАЗУБРИВАНИЕ

Узкие цели отупляют.

Люди гораздо более сообразительны в ситуации, когда они могут использовать весь свой интеллект и связать то, что они изучают, с реальными с их точки зрения ситуациями или явлениями.

Если кто-то затрудняется понять то, что вы ему объясняете, то естественная реакция — разделить материал на более мелкие фрагменты и объяснять эти фрагменты по отдельности. Это обычно не помогает, так что вы предпринимаете еще более мелкое деление и рассказываете еще более подробно.

Дело, однако, в том, что человеческий мозг работает не как компьютер: понять нечто, представленное в виде набора аккуратно объясненных мелких частей, не проще, а сложнее, чем понять то же самое как целое. Для человека очень трудно прочесть компьютерную программу на ассемблере и понять, что она делает, хотя компьютер читает и исполняет ее в мгновение ока. Тем не менее даже самый мощный компьютер на свете не обладает интеллектом, достаточным для того, чтобы безопасно водить машину, ходить по тротуару, не натываясь на прохожих, или сделать интересное математическое открытие.

Изучать математику, разбитую на мелкие составные части, — все равно, что начать изучение языка с того, чтобы заучить словарь и грамматику, затем научиться строить предложения, и только после всего этого научиться читать, писать и говорить. Носители языка не знают правил грамматики: они усваивают язык, концентрируясь на более высоком уровне и усваивая грамматические правила подсознательно. Выучить правила гораздо труднее, чем выучить язык как таковой. Многочисленные и до сих пор неудачные попытки научить компьютеры языкам показывают, что до сих пор никому не удалось адекватно описать язык с помощью точных правил.

Лучше не преподавать какую-то тему вообще, чем учить ей, разбивая на мелкие части.

13. ОТВЕТЫ И ВОПРОСЫ

Математические теории лучше усваиваются и выше ценятся теми, кто предварительно пытался самостоятельно разрешить вопросы, на которые теория призвана ответить.

В преподавании математики имеется естественная тенденция не нарушать логический порядок и рассказывать всю необходимую технику и все ответы до того, как продемонстрировать примеры и задавать вопросы, в надежде, что к этому времени в распоряжении учащихся будет весь необходимый инструментарий для получения ответов.

Лучше, однако, чтобы все время присутствовали интересные неотвеченные вопросы и необъясненные примеры, независимо от того, готовы ли учащиеся, преподаватели или кто-то еще ответить на них. В математике лучший с психологической точки зрения порядок изучения предмета зачастую сильно отличается от наиболее эффективного с логической точки зрения.

Мы, математики, знаем, что вопросы без ответа никогда не кончатся. А вот учащиеся обычно воспринимают математику как нечто расфасованное и упакованное — по той причине, что они недостаточно далеко зашли в ее изучении.

Мы должны представлять математику учащимся так, чтобы она выглядела и интересной, и достаточно близкой к ситуациям, с которыми учащиеся столкнутся в реальной жизни, когда нет гарантированного ответа.

14. ЧТО МЫ МОЖЕМ СДЕЛАТЬ?

Ответ зависит от того, кто мы.

В нашей системе, для которой характерна разобщенность, отдельной организации или отдельному человеку трудно напрямую повлиять на систему в целом. Я попробую ответить на заданный в заголовке вопрос с позиций преподавателей математики в колледжах и университетах.

Во-первых, необходимо разрабатывать курсы для колледжей и университетов, которые давали бы студентам возможность начать с нуля. Повторительные курсы широко распространены, но их успех невелик: проходить один и тот же материал второй раз скучно и утомительно, вне зависимости от того, был ли он усвоен в первый раз. Такие курсы расхолаживают студентов и препятствуют их творчеству.

Вместо этого должно быть больше курсов, доступных первокурсникам и тем, кто по математике не специализируется, с тем, чтобы эти курсы, благодаря широте математики, позволяли начать изучение почти с начала и без того, чтобы повторять многое из того, о чем учащиеся уже слышали. Например, элементарные курсы по топологии, теории чисел, теории групп и симметриям, теории вероятностей, конечной математике, алгебраической геометрии, динамическим системам (хаосу), компьютерной графике с линейной алгеброй, проективной и начертательной

геометриям, геометрии Лобачевского, математической логике могут отвечать этому критерию.

Во-вторых, следует стремиться улучшить возможность обмена информацией между разными частями образовательной системы. Надо сделать так, чтобы педагогические достижения университетских преподавателей не оставались достоянием их самих или их факультетов, но были известны во всем академическом мире. Нам надо найти средства обмена интересными идеями между различными факультетами (например, ознакомительные визиты деканов факультетов и ответственных за работу на младших курсах). Нам нужно ходить друг к другу на занятия. Нужно, чтобы было больше докладов и заседаний, посвященных образованию, на наших математических конференциях, и чтобы было установлено больше премий за педагогические достижения.

Такие возможности для обмена информацией предоставляют бюллетени «Undergraduate Mathematics Education Trends» и «Focus» (последний издается МАА); есть и еще несколько изданий, публикующих статьи о преподавании на младших курсах. Еще одно средство коммуникации — ежегодное совещание деканов факультетов, проводимое отделом математических наук Национального совета по исследованиям; впрочем, повестка дня этих совещаний посвящена не только образованию. И тем не менее, существующие каналы коммуникации совершенно недостаточны по сравнению с тем, что мы могли бы сделать.

Еще важнее и еще труднее организовать обмен информацией между различными слоями образовательного сообщества. Для колледжей и университетов чрезвычайно важно общение между их математическими факультетами, с одной стороны, и старшей школой — с другой. Это общение должно быть двусторонним: профессора из колледжей и университетов могут научиться многому в преподавании у школьных учителей. Одним из таких каналов коммуникации является MSEB, а также созданные при его участии «математические союзы» на уровне штатов; но нам нужен более широкий обмен.

Как могут профессора с большим стажем, возглавляющие систему, которая, очевидно, работает не лучшим образом, считать, что они учат своих младших коллег, как хорошо преподавать? Аспиранты и молодые преподаватели часто учат математике лучше, чем преподаватели постарше, которые порой смирились с тем, что преподавание стало для них унылой рутинной, и даже не пытаются придумать что-нибудь новое. Даже если они, вопреки указанной тенденции, вполне удачно преподают сами, они обычно не участвуют в реформировании системы в целом.

Профессор, интересующийся преподаванием, часто встречает косые взгляды своих коллег. Обычно они считают, что единственно важное дело — это научные исследования и если кто-то уделяет основное внимание

преподаванию, то это знак того, что у него плохи дела с наукой. Иногда профессора со стажем прямо советуют младшим коллегам не тратить слишком много сил на преподавание, поскольку это может помешать их карьерному росту.

Мы должны признать, что мы можем приносить пользу обществу и существующим общественным институтам многими разными способами. Глупо оценивать математиков исключительно по их научной работе. Преподавание — важное и непростое занятие, которым многие занимаются не из необходимости, а по свободному выбору. И оценивать этих людей надо по тому, чего они добились, а не по тому, чего бы они могли добиться, если бы тратили свое время и силы на другое.

Надо срочно изменить систему стимулов. Нужно создать что-то лучшее, чем нынешняя практика, когда на словах все признают важность преподавания, но как только надо выбирать из нескольких кандидатов при приеме на работу или предоставлении постоянной позиции, так оказывается, что преподавание и общественная работа принимается во внимание в последнюю очередь, при прочих равных.

Люди мотивируются обществом. Если мы будем обсуждать друг с другом проблемы преподавания, то его значимость возрастет. Академическая культура может меняться; она и изменилась. Эти изменения по большей части неформальны: это то, о чем мы говорим в обеденный перерыв, а не какие-то управленческие решения. Тем не менее, когда перемены назреют — а я считаю, что в случае с преподаванием математики они назрели, — то даже небольшие организационные усилия приведут к серьезным изменениям.

Необходимые нам реформы будут проведены благодаря нашим совместным усилиям. Хорошие математические идеи распространяются в математическом сообществе очень быстро, по неформальным каналам. Если мы обратим свое внимание на образование, то столь же быстро распространятся и хорошие педагогические идеи.

Виктор Тебо и его задачи

(к 125-летию со дня рождения В. Тебо (1882–1960))

Е. Д. Куланин

1. Биография

Виктор Мишель Жан-Мари Тебо (Victor Michel Jean-Marie Thebault) родился 6 марта 1882 г. в Амбриер ле Гран (Ambrièges-le-Grand) французского департамента Майенн (Mayenne).¹⁾ Его отец был ткачом. Учитель местной начальной школы, заметивший необыкновенные математические способности мальчика, добился для него стипендии в учительском колледже города Лаваль (Laval, Mayenne), где юноша обучался с 1898 по 1901 г. После окончания колледжа В. Тебо работал школьным учителем в Пре-эн-Пэйл (Pre-en-Pail, Mayenne) в течение 1902–1905 гг. до тех пор, пока его не пригласили на должность преподавателя технической школы в Эрни (Ernée, Mayenne). В 1909 г. в результате победы на конкурсных экзаменах В. Тебо получил право на преподавание в колледжах для учителей.

Поскольку скромное жалование преподавателя не могло обеспечить его семью, в которой к тому времени было уже 6 детей, В. Тебо был вынужден отказаться от преподавания. С 1910 по 1923 г. он работал фабричным суперинтендантом в Эрни. В дальнейшем В. Тебо занимал пост главного страхового инспектора в Ле Манс (Le Mans, Sarthe) и после выхода на пенсию в 1940 г. поселился в местечке Тенни (Tennie, Sarthe).

Все это время, несмотря на занятость на работе, он продолжал интенсивно и плодотворно заниматься математикой. Удивительно, как это ему удавалось, хотя справедливости ради следует заметить, что в истории математики все-таки были подобные примеры и даже в той же области деятельности — страховании. Так, страховщиками работали такие известные математики, как Сильвестр (1814–1897) и Грам (1850–1916), прославившийся своим определителем. Грам даже стал в 1896 г. директором страхового общества и председателем Датского страхового совета.

Но все же по современным меркам В. Тебо был не профессионалом, а любителем математики, что, впрочем, нисколько не умаляет его заслуг,

¹⁾Все биографические сведения взяты из статьи [1].

которые были замечены и по достоинству оценены во всем мире. Так, в 1932 г. В. Тебо стал членом Американской математической ассоциации. В том же году его назначили чиновником по образованию (*Officier de l'Instruction Publique*) по рекомендации академика Оканя. В рекомендации, в частности, говорилось: «Лично я считаю его достойным глубокого уважения за его выдающийся талант математика, проявившийся в многочисленных остроумных достижениях в области элементарной геометрии — неисчерпаемом источнике задач, решение которых требует совершенно особого дара изобретательности».

В 1935 г. В. Тебо стал Кавалером ордена бельгийской короны за его деятельность в Брюссельском научном обществе и сотрудничество с журналами этого общества: *Annales* и *Mathesis*.

В 1943 г. он установил премию Виктора Тебо. Согласно положению об этой премии она присуждается каждые два года Парижской Академией Наук авторам оригинальных исследований по геометрии или теории чисел, причем предпочтение должно отдаваться учителям средних или даже начальных школ.

2. НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

За свою жизнь В. Тебо представил 15 сообщений только в Парижскую Академию Наук, написал сотни статей и мемуаров по геометрии треугольника и тетраэдра, а также теории чисел. Еще большую известность он приобрел как автор оригинальных задач, 582 из которых напечатал только один журнал — *American Mathematical Monthly*. Всего же В. Тебо составил более 1000 задач и, вероятно, не имел равных себе соперников в этой области.

Научные интересы В. Тебо охватывали три раздела математики — геометрию треугольника и тетраэдра, а также теорию чисел. Он стал заниматься геометрией треугольника²⁾ в первом десятилетии XX века, т. е. в то время, когда закончился первоначальный период развития этой дисциплины, и она превратилась в обширную и детально разработанную область геометрии, привлекавшую внимание многих математиков.

В. Тебо получил результаты практически во всех разделах элементарной геометрии: он исследовал треугольники, четырехугольники, многоугольники, коники и кубики, связанные с треугольником, ортопол, изопол и многое тому подобное.

С самого начала своей деятельности В. Тебо удалось доказать такую теорему, которую J. L. Coolidge, автор знаменитого «Трактата об окружности и сфере» (1916), счел нужным включить в свой труд, несмотря на

²⁾ Все сведения об этом взяты из статьи [2].

то, что он узнал об этом результате после того, как соответствующая глава его книги уже была закончена.

В геометрии треугольника у В. Тебо существовали особо излюбленные темы, к которым он неоднократно возвращался. Одной из таких тем была теорема Фейербаха. В. Тебо исследовал точки Фейербаха в самой первой статье, напечатанной в *Nouvelles Annales de Mathematiques* (series 4, vol. 10, 1910, pp. 271–281).

Впоследствии он опубликовал подюжины статей на эту тему, в которых выявил многочисленные свойства этих точек. В 1935 г. В. Тебо доказал следующую интересную теорему: в треугольнике ABC четыре треугольника с вершинами в точках Фейербаха треугольника ABC подобны четырём треугольникам с вершинами, совпадающими с основаниями соответствующих биссектрис треугольника ABC . Много результатов он получил также в геометрии тетраэдра. Выдающийся вклад В. Тебо в геометрию треугольника и тетраэдра позволил ему занять достойное место среди последователей Брокара, Лемуана и Нейберга — основателей геометрии треугольника и тетраэдра. Научная работа В. Тебо не прерывалась и в годы Второй мировой войны, несмотря на то, что на этот период ему пришлось эмигрировать в Испанию.

В. Тебо составлял также арифметические и теоретико-числовые задачи, в том числе занимательные, которые обычно относят к разряду математических развлечений. Интересно привести его ответ на упреки по поводу того, что он занимался такими пустяками: «Некоторые математики демонстрируют тенденцию, не свободную полностью от определенного презрения, видеть в таких задачах только незначительные пустяки. Пустяки, если угодно, но такие, решение которых часто требует не меньшей проницательности, изобретательности и тонкого искусства, чем многие вопросы, считающиеся значительно более важными. Кроме того, изучение элементарных утверждений требует немалых усилий, представляющих собой прекрасное интеллектуальное упражнение и приводящих, в конце концов, к чему-то заслуживающему внимания» [3]. Далее В. Тебо замечает, что не все великие мастера науки проявляли подобное презрение к математическим развлечениям и цитирует Эйлера, Якоби и других крупных математиков.

3. ЗАДАЧИ В. ТЕБО И ВОКРУГ НИХ

Рассмотрим теперь несколько задач из необъятного задачного наследия В. Тебо. Самой знаменитой из них является, несомненно, задача 3887 о трех окружностях с коллинеарными центрами, условие которой было опубликовано в разделе «Задачи и решения» журнала *American Mathematical Monthly* в 1938 г. [4].

Приведем формулировку этой задачи.

Пусть D — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC , I_1 — центр окружности, касающейся отрезков AD , BD и описанной окружности треугольника ABC ; I_2 — центр окружности, касающейся отрезков CD , BD и описанной окружности треугольника ABC . Тогда отрезок I_1I_2 проходит через центр I вписанной в треугольник ABC окружности, и при этом

$$I_1I : II_2 = \operatorname{tg}^2(\varphi/2), \text{ где } \varphi = \angle BDA.$$

Первые метрические решения этой задачи появились в Нидерландах в 1973 г., но не получили широкой известности. Поэтому журнал *American Mathematical Monthly* в 1983 г. дал в редакционном комментарии краткое изложение первого, как тогда казалось, метрического решения англичанина К. Тэйлора, рукопись которого насчитывала 24 страницы и содержала многочисленные формулы [5]. В 1986 г. в швейцарском журнале “*Elemente der Mathematik*” было опубликовано значительно более короткое метрическое решение Г. Турнвальда [6] и, наконец, в 1989 г. в том же журнале появилось первое синтетическое решение швейцарского учителя Р. Старка [7].

С тех пор появилось несколько элементарных синтетических решений, одно из самых удачных из которых принадлежит В. Протасову³⁾ [8], а одно из самых последних — Д. Кодокостасу [9]. Ж. Айме, в статье которого [10] можно найти подробную историю и синтетическое решение этой задачи Тебо, обнаружил [10, с.226], что она является следствием теоремы, доказанной в 1905 г. преподавателем математики из Токио Савайяма [11].

На самом деле теорема Тебо о трех окружностях с коллинеарными центрами справедлива и для вневписанных окружностей. Точнее, пусть D — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC , I_1 — центр окружности, касающейся прямых AD , BD и описанной окружности треугольника ABC внешним образом; I_2 — центр окружности, касающейся прямых CD , BD и описанной окружности треугольника ABC внешним образом. Тогда отрезок I_1I_2 проходит через центр I_b вневписанной в треугольник ABC окружности, касающейся стороны AC .

Приведем еще формулировки двух задач, тесно связанных с задачей 3887.

1. Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC , а также касается стороны AB этого треугольника в точке P . Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP , CP и описанной около этого треугольника

³⁾Интересно отметить, что В. Протасов нашел это решение в то время, когда учился в IX классе средней школы г. Москвы.

окружности, равен радиусу окружности, вписанной в этот треугольник [12].

2. Дан треугольник ABC , K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC . Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC , луча AK и окружности, описанной около треугольника ABC . Доказать, что их радиусы равны радиусу вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC [13].

Рассмотрим еще одну задачу В. Тебо. Это задача 4328, опубликованная в журнале *American Mathematical Monthly* в 1949 г. [14].

ПРЯМЫЕ ЭЙЛЕРА И ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК. Дан треугольник ABC ; AA_1 , BB_1 и CC_1 — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C пересекаются в такой точке P окружности девяти точек, для которой один из отрезков PA_1 , PB_1 , PC_1 равен сумме двух других отрезков.

Элементарное синтетическое решение задачи 4328 приведено в статьях Е. Д. Куланина [15] и [16]. Точка P пересечения прямых Эйлера треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C совпадает с центром равнобедренной гиперболы, являющейся изогональным образом прямой Эйлера треугольника ABC . Эта гипербола называется гиперболой Джерабека (Jerabek). Будем тем не менее для краткости называть в этой статье точку пересечения прямых Эйлера треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C точкой Тебо треугольника ABC и обозначать ее буквой T . В статьях [15] и [16] доказана следующая теорема.

Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , H_1 , H_2 , H_3 — основания его высот; $H'_1H'_2H'_3$ — треугольник, серединный треугольник которого совпадает с треугольником $H_1H_2H_3$. Тогда точки Тебо T , T_a , T_b , T_c треугольников ABC , BHC , CHA , AHB соответственно совпадают с точками Фейербаха треугольника $H'_1H'_2H'_3$, причем точка T совпадает с внутренней, а точки T_a , T_b , T_c — с внешними точками Фейербаха треугольника $H'_1H'_2H'_3$.

Из приведенной теоремы сразу же следует, что точки Фейербаха произвольного треугольника обладают указанным свойством точек Тебо, а именно: наибольшее из расстояний от любой точки Фейербаха треугольника до середин сторон этого треугольника равно сумме расстояний от этой же точки Фейербаха до двух других середин сторон треугольника.

И, наконец, последняя задача, тесно связанная с предыдущей [17].

4432. Окружности с центрами в серединах сторон треугольника проходят через основания соответствующих высот. Покажите, что окружность, ортогональная этим трем окружностям, касается окружности девяти точек данного треугольника в такой точке, расстояние от которой до основания одной из высот равно сумме расстояний от нее до оснований двух других высот.

В статье [16] показано, что на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что наибольшее расстояние от любой из них до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до остальных двух вершин треугольника. Если через вершины треугольника провести прямые, параллельные его противоположным сторонам, то эти точки совпадут с точками Фейербаха полученного треугольника, а если через вершины треугольника провести прямые, перпендикулярные биссектрисам, выходящим из этих вершин, то эти точки совпадут с точками Тебо полученного треугольника. Из всего сказанного становится ясно, что в задачах 4328 и 4432 речь идет об одной и той же точке, которую мы в данной статье называем точкой Тебо.

Назовем окружности с центрами в серединах сторон треугольника, проходящие через основания высот на этих же сторонах, ортомедиальными. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC и S, S_a, S_b, S_c — радикальные центры ортомедиальных окружностей треугольников ABC, BHC, CHA, AHB . Окружности S, S_a, S_b, S_c с центрами в этих точках, проходящие через точки Тебо T, T_a, T_b, T_c , треугольников ABC, BHC, CHA, AHB соответственно, назовем окружностями Тебо, E — общая окружность девяти точек треугольников ABC, BHC, CHA, AHB . Ясно, что четырехугольники $SS_aS_bS_c$ и $TT_aT_bT_c$ перспективны с центром перспективы E .

Тогда из результата задачи 4432 вытекает такое следствие: прямая Гаусса четырехугольника, образованного радикальными осями окружности девяти точек и окружностей Тебо треугольников ABC, BHC, CHA, AHB , т. е. радикальными осями окружностей E и S, E и S_a, E и S_b, E и S_c , совпадает с прямой Эйлера ортоцентрического треугольника треугольников ABC, BHC, CHA, AHB .

Приведем еще пару любопытных фактов, относящихся к рассматриваемой конфигурации.

I. Радикальные оси окружностей S_a, S_b, S_c совпадают с высотами треугольника ABC ; радикальные оси окружностей S и S_a, S и S_b, S и S_c совпадают со сторонами треугольника ABC , так что A, B, C, H — радикальные центры соответствующих троек окружностей.

Интересно сравнить это утверждение с аналогичным результатом [18] об ортоцентроидальных окружностях⁴⁾ треугольников ABC , BHC , CHA , AHB , полученным в качестве следствия известной теоремы Гриффитса [19, 20]: радикальные оси ортоцентроидальных окружностей треугольников BHC , CHA , AHB совпадают с высотами треугольника ABC ; радикальные оси ортоцентроидальных окружностей треугольников ABC и BHC , ABC и CHA , ABC и AHB совпадают со сторонами треугольника ABC , так что A , B , C , H — радикальные центры соответствующих троек окружностей.

II. Точка S — ортоцентр треугольника $S_a S_b S_c$, гомотетичного треугольнику ABC с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести ортоцентрического треугольника ABC , и коэффициентом гомотетии -2 .

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с его противоположными сторонами, пересекаются в одной точке N , которая называется точкой Нагеля. На самом деле существуют еще три точки Нагеля N_a , N_b , N_c . Точка N_b совпадает с точкой пересечения трех прямых, первая из которых проходит через вершину A и точку касания вневписанной окружности I_c со стороной BC , вторая — через вершину B и точку касания вписанной окружности I со стороной AC , третья — через вершину C и точку касания вневписанной окружности I_a с продолжением стороны AB . Точки N_a и N_c определяются аналогично. Эти факты легко доказать, используя теорему Чевы. Приведем без доказательства еще три теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Четырехугольник, вершины которого совпадают с точками Нагеля треугольника ABC , гомотетичен четырехугольнику с вершинами в центрах вписанной и вневписанных окружностей треугольника ABC с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести ортоцентрического треугольника ABC , и коэффициентом гомотетии -2 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть O — центр описанной окружности разностороннего треугольника; N , N_a , N_b , N_c — его точки Нагеля. Тогда четыре точки описанной окружности этого треугольника такие, что расстояние от любой из них до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника, лежат по одной на прямых ON , ON_a , ON_b , ON_c .

Теорема 1 является следствием такого известного факта: отрезки, соединяющие соответствующие точки Нагеля данного треугольника с центрами его вписанной и вневписанных окружностей, пересекаются в

⁴⁾Ортоцентроидальной называется окружность, построенная, как на диаметре, на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром тяжести треугольника.

центре тяжести этого треугольника и делятся им в отношении $2 : 1$, считая от точек Нагеля.

Для доказательства теоремы 2 надо, кроме того, использовать теорему Фейербаха и то, что на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что наибольшее расстояние от любой из них до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до остальных двух вершин треугольника.

ТЕОРЕМА 3. Точки Нагеля ортоцентрического треугольника $H_a H_b H_c$ треугольника ABC совпадают с радикальными центрами ортомедиальных окружностей треугольников ABC , BHC , CHA , AHB , т. е. с точками S , S_a , S_b , S_c .

Поскольку мы договорились называть окружности S , S_a , S_b , S_c окружностями Тебо, то теорему 3 можно сформулировать более кратко.

ТЕОРЕМА 3'. Центры окружностей Тебо треугольников ABC , BHC , CHA , AHB совпадают с точками Нагеля общего ортоцентрического треугольника этих треугольников.

Теперь становится ясно, что утверждение II вытекает из результата задачи 4432 и теорем 1–3.

В заключение заметим, что утверждение I тесно связано со следующим фактом.

I'. Обозначим через I , I_a , I_b , I_c вписанную и невписанные окружности треугольника ABC . Тогда радикальные оси окружностей I_a , I_b , I_c образуют треугольник, гомотетичный треугольнику $I_a I_b I_c$ с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести треугольника ABC , и коэффициентом гомотетии $-1/2$, причем радикальные оси окружностей I и I_a , I и I_b , I и I_c содержат высоты треугольника, образованного радикальными осями окружностей I_a , I_b , I_c , а ортоцентр и вершины этого треугольника совпадают с центрами вписанной и невписанных окружностей треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника ABC .

Из всего сказанного становится понятным, что окружность Тебо остроугольного треугольника совпадает с вписанной окружностью треугольника, серединами сторон которого служат основания высот исходного остроугольного треугольника, а окружность Тебо тупоугольного треугольника совпадает с одной из невписанных окружностей треугольника, серединами сторон которого являются основания высот этого тупоугольного треугольника.

В заключение автор выражает благодарность О. А. Файнштейну (Лейпциг) за предоставленные материалы о В. Тебо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Byrne W. E., col. *Victor Thebault — The man* // Amer. Math. Month. 1947. P. 443–444.
- [2] Court N. A. *Thebault — the geometer* // Amer. Math. Month. 1947. P. 445–446.
- [3] Starke E. P. *Thebault — the number theorist* // Amer. Math. Month. 1947. P. 445.
- [4] Thebault V. *Problem 3887. Three circles with collinear centers* // American Mathematical Monthly. Vol. 45, 1938. P. 482–483.
- [5] Taylor K. B. *Solution of Problem 3887* // Amer. Math. Month. Vol. 90, 1983. P. 482–487.
- [6] Turnwald G. *Über eine Vermutung von Thebault* // Elemente der Mathematik. Bd. 41, 1986. S. 11–13.
- [7] Stark R. *Eine weitere Lösung der Thebault'schen Aufgabe* // Elemente der Mathematik. Bd. 41, 1989. S. 130–133.
- [8] *Факультативный курс по математике*. М: Просвещение, 1991. С. 341–343.
- [9] Kodokostas D. *A really elementary proof of Thebault's theorem*. Worcester Polytechnic Institute, USA.
<http://users.wpi.edu/~goulet/mme518-2004/Project%232.2004/thebth.pdf>
- [10] Ауме J.-L. *Sawayama and Thebault's theorem* // Forum Geometricorum. Vol. 3, 2003. P. 225–229.
- [11] Sawayama Y. *A new geometrical proposition* // Amer. Math. Monthly. Vol. 12, 1905. P. 222–224.
- [12] Четвертая Соросовская олимпиада школьников 1997–1998. М: МЦНМО, 1998. С. 102, 112–113.
- [13] Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 5, М.: МЦНМО, 2001. С. 218–219.
- [14] Thebault V. *Problem 4328* // American Mathematical Monthly. Vol. 56, 1949. P. 39.
- [15] Куланин Е. Д. *Об одном свойстве точек Фейербаха* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №10, 1997.
- [16] Куланин Е. Д. *О некоторых свойствах точек Фейербаха и Тебо* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №15, 2005.

- [17] Thebault V. *Problem 4432* // American Mathematical Monthly. Vol. 58, 1951. P. 195.
- [18] Droussent L. *On the orthocentroidal circle* // American Mathematical Monthly. Vol. 57, 1950. P. 169–171.
- [19] Griffiths J. // Nouvelles Annales de Mathematiques. 1864. P. 345; *ibid.* 1865. P. 322.
- [20] Droussent L. *On a theorem of J. Griffiths* // American Mathematical Monthly. Vol. 54, 1947. P. 538–540.

Наш семинар: математические сюжеты

Многочлен Татта и модель случайных кластеров

Ю.М. Бурман

1. ВВЕДЕНИЕ: РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ

1.1. ХРОМАТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН

Пусть G — конечный граф, вершины которого перенумерованы числами от 1 до n . Мы будем раскрашивать вершины графа в k различных цветов; раскраску назовем правильной, если две вершины, соединенные ребром, раскрашены по-разному. Количество правильных раскрасок графа G в k цветов обозначим $C_G(k)$.

В этом разделе, как и в дальнейшем, мы разрешаем графу иметь кратные ребра (т.е. одну и ту же пару вершин может соединять несколько ребер), а также петли — ребра, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же вершине. Нетрудно, однако, заметить, что если заменить какое-нибудь кратное ребро графа на одиночное, величина $C_G(k)$ не изменится, а если в графе имеется петля, то правильных раскрасок не существует, и $C_G(k) = 0$ для любого k . Заметим также, что если граф G состоит из двух кусков — G_1 и G_2 , между которыми ребер нет (мы записываем это как $G = G_1 \sqcup G_2$), то $C_G(k) = C_{G_1}(k)C_{G_2}(k)$.

ПРИМЕР 1. Пусть граф G — дерево из n вершин (и $(n - 1)$ ребер). Тогда его вершины можно красить последовательно: начать с произвольной вершины — ее можно окрасить в любой из k цветов. Затем выбрать цвета вершин, соединенных с начальной — для каждой из них запрещен в точности 1 цвет — цвет начальной вершины — так что имеется $(k - 1)$ возможностей. Затем перейти к вершинам, соединенным с теми, что были окрашены на втором шаге, и т.д. Поскольку граф — дерево, на каждом

этапе, кроме начального, окрашиваемая вершина будет соседствовать в точности с одной вершиной, окрашенной ранее. Следовательно, общее количество правильных раскрасок не зависит от структуры дерева, а только от количества его вершин, и равно $G_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.

ПРИМЕР 2. Для полного графа K_n из n вершин, попарно соединенных ребрами имеем, очевидно, $C_G(k) = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)$; в частности, $C_G(k) = 0$ при $k < n$.

Выделим теперь в графе G некоторое ребро e , соединяющие вершины i и j , и обозначим $G \setminus e$ граф, полученный разрывом ребра e : вершины те же, что и у графа G , ребро e отсутствует, а остальные ребра — как в G . Правильные раскраски графа $G \setminus e$ в k цветов делятся на два класса: раскраски, в которых цвета вершин i и j совпадают, и раскраски, в которых эти цвета различны. Во втором случае мы можем восстановить ребро e , получив правильную раскраску исходного графа G — следовательно, число правильных раскрасок второго класса равно $C_G(k)$. Что касается раскрасок первого класса, то оно равно $C_{G/e}(k)$, где G/e — граф, полученный из G «стягиванием» ребра e : вершины G/e — это все вершины G , кроме j ; ребро e отсутствует; ребра, соединявшие j с другими вершинами, теперь идут в i , а остальные ребра не меняются. Заметим, что даже если в графе G отсутствовали петли или кратные ребра, они могут появиться в G/e .

Поскольку каждая раскраска вершин графа $G \setminus e$ принадлежит либо к первому, либо ко второму классу, имеет место равенство

$$C_{G \setminus e}(k) = C_G(k) + C_{G/e}(k). \quad (1)$$

Следствием его является такое утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Величина $C_G(k)$ для любого графа G является многочленом от k . Степень многочлена равна числу вершин графа, а старший коэффициент равен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n — число вершин графа G . Если граф не имеет ребер, то, очевидно, $C_G(k) = k^n$, и утверждение доказано. Дальнейшее доказательство проводится совместной индукцией по числу вершин и ребер. Граф $G \setminus e$ имеет n вершин и меньше ребер, чем G — следовательно, по предположению индукции, $C_{G \setminus e}(k)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Граф G/e имеет $(n-1)$ вершин, так что по предположению индукции $C_{G/e}(k)$ — многочлен степени $(n-1)$. Следовательно, $C_G(k) = C_{G \setminus e}(k) - C_{G/e}(k)$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом 1.

Многочлен $C_G(k)$ называется *хроматическим многочленом графа*.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = Z_n$ — цикл из n вершин. Тогда $G \setminus e$ — цепочка L_n из n вершин, а $G/e = Z_{n-1}$. Согласно формуле (1), $C_{Z_n} = C_{L_n} - C_{Z_{n-1}}$. Цепочка является деревом, откуда $C_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$ (в силу примера 1). Следовательно,

$$C_{Z_n} + C_{Z_{n-1}} = k(k-1)^{n-1}. \quad (2)$$

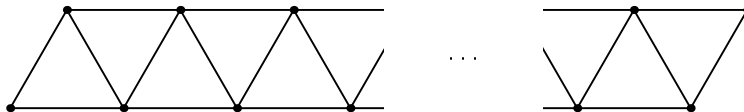
Граф Z_2 является полным графом из 2 вершин (ребро — кратное, но это не влияет на хроматический многочлен), так что

$$C_{Z_2}(k) = k(k-1). \quad (3)$$

Знакопеременная сумма равенств (2) при всех n и равенства (3) дает

$$\begin{aligned} C_{Z_n} &= k(k-1)((k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2}) = \\ &= k(k-1) \frac{(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}}{(k-1) + 1} = (k-1)((k-1)^{n-1} + (-1)^n). \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 1. Найдите $C_G(k)$, если граф G — это а) прямоугольная решетка $2 \times n$, б*) прямоугольная решетка $m \times n$, в) треугольная решетка $2 \times n$, изображенная на рисунке, г*) аналогичная треугольная решетка $m \times n$.



1.2. РАЗРЫВ СЛУЧАЙНЫХ РЕБЕР

Рассмотрим еще раз граф G (который может иметь петли и кратные ребра); на этот раз предположим его связным. Граф подвергается следующему случайному преобразованию: каждое из ребер, независимо от других, с некоторой вероятностью p остается неизменным, а с вероятностью $1 - p$ разрывается (удаляется из графа). Обозначим $R_G(p)$ вероятность того, что получившийся после преобразования граф останется связным.

ПРИМЕР 4. Пусть G — дерево с n вершинами. Тогда оно останется связным только в случае, когда ни одно ребро не будет разорвано. Поскольку число ребер равно $n - 1$, а разрываются они независимо друг от друга, вероятность такого события равна $R_G(p) = p^{n-1}$.

ПРИМЕР 5. Для задачи о разрыве случайных ребер, в отличие от задачи пункта 1.1, кратности ребер существенны. Так, если G — две вершины, соединенные a ребрами, то граф станет несвязным только если все ребра будут разорваны. Отсюда $R_G(p) = 1 - (1 - p)^a$.

Отметим в графе G ребро e . Вероятность того, что после разрыва случайных ребер граф останется связным, *при условии что ребро e будет разорвано*, равна $R_{G \setminus e}(p)$ — вероятности распада на части графа, в котором ребро e стерто заранее. Вероятность того, что граф G останется связным, *при условии что ребро e сохранится*, равна, очевидно, $R_{G/e}(p)$. Вероятность разрыва ребра e равна $(1 - p)$, сохранения — p , поэтому по формуле полной вероятности получаем, что

$$R_G(p) = (1 - p)R_{G \setminus e}(p) + pR_{G/e}(p). \quad (4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Величина $R_G(p)$ является многочленом от p , степень которого не превосходит числа ребер в графе G , считая с кратностями и не считая петли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, разрыв петли не влияет на связность графа, поэтому можно с самого начала считать, что петель в графе нет. Если в графе 1 вершина (и ребер нет), то $R_G(p) = 1$. Дальнейшее доказательство — индукция по числу ребер (граф $G \setminus e$ имеет на 1 ребро меньше, чем G ; граф G/e — по крайней мере на 1 ребро меньше).

ЗАДАЧА 2. Найдите многочлен $R_G(p)$, где G — графы, упомянутые в задаче 1.

1.3. АЦИКЛИЧЕСКИЕ ОРИЕНТАЦИИ

Пусть G — граф. Мы будем давать ребрам графа различные ориентации (= ставить на ребрах стрелки); ориентация называется ациклической, если в полученном ориентированном графе отсутствуют ориентированные циклы, т. е. нельзя пройти по стрелкам и вернуться в исходную вершину. Обозначим A_G количество ациклических ориентаций G ; так, $A_G = 0$, если в графе имеются петли.

ПРИМЕР 6. Если G — дерево с n вершинами (и $(n - 1)$ ребрами), то любая его ориентация является ациклической. Поэтому $A_G = 2^{n-1}$.

Выделим в графе G ребро e . По аналогии с пунктами 1.1 и 1.2 попробуем установить связь между величинами A_G , $A_{G \setminus e}$ и $A_{G/e}$. В данном случае связь зависит от свойств ребра e :

1. Если ребро e — петля, то $A_G = 0$.

2. Пусть ребро e — перешеек. Это означает, что при удалении этого ребра граф распадается: количество компонент связности у графа $G \setminus e$ больше, чем у графа G . Или, что то же самое, через ребро e не проходит ни один цикл в графе G (неориентированный). В этом случае если на всех ребрах графа G , кроме e , уже расставлены стрелки, и ориентированного цикла нет, то на ребре e стрелку можно поставить произвольным

образом — ориентированный цикл не возникнет. Тем самым, когда e — перешеек,

$$A_G = 2A_{G \setminus e}. \quad (5)$$

3. Пусть теперь e — не петля и не перешеек; это означает, что в графе G существует путь, соединяющий концы i и j ребра e и не проходящий через e . В этом случае ациклические ориентации графа $G \setminus e$ делятся на два класса. Для ориентаций первого класса все ребра на всех путях, соединяющих i и j , ориентированы в одну и ту же сторону. В этом случае из двух возможных ориентаций ребра e одна приводит к появлению в графе G ориентированного цикла, а другая не приводит. Для ориентаций $G \setminus e$ второго класса на каждом пути, соединяющем i и j , имеются как ребра, ориентированные от i к j , так и ребра с обратной ориентацией. В этом случае обе ориентации ребра e допустимы (не приводят к появлению ориентированного цикла в G).

Очевидно, если в $G \setminus e$ задана ациклическая ориентация второго класса, то можно склеить вершины i и j — получится ациклическая ориентация графа G/e ; обратно, из каждой ациклической ориентации G/e можно получить ациклическую ориентацию $G \setminus e$ второго класса. Следовательно, количество ациклических ориентаций $G \setminus e$ второго класса равно $A_{G/e}$, первого класса — $A_{G \setminus e} - A_{G/e}$, откуда вытекает равенство (для ребра e — не петли и не перешейка)

$$A_G = A_{G \setminus e} - A_{G/e} + 2A_{G/e} = A_{G \setminus e} + A_{G/e} \quad (6)$$

Равенства (5) и (6) позволяет вычислить A_G любого графа.

ПРИМЕР 7. Пусть $G = Z_n$ — цикл из n вершин и n ребер, $n \geq 2$. Ребра цикла не являются петлями и перешейками; граф $Z_n \setminus e$ является деревом, а $Z_n/e = Z_{n-1}$. Отсюда получаем (при $n \geq 2$) равенство $A_{Z_n} = 2^{n-1} + A_{Z_{n-1}}$. Граф Z_1 содержит петлю, поэтому $A_{Z_1} = 0$, откуда по индукции $A_{Z_n} = 2^n - 2$.

2. МНОГОЧЛЕН ТАТТА

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. *Многочленом Татта* называется функция $G \mapsto T_G(x, y)$ из множества неориентированных графов (возможно, с петлями и кратными ребрами) в множество многочленов от двух переменных, обладающая следующими свойствами:

1. Если граф G не имеет ребер, то $T_G(x, y) = 1$.
2. Если ребро e — не петля и не перешеек, то $T_G(x, y) = T_{G \setminus e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$.

3. Если ребро e — перешеек, то $T_G(x, y) = xT_{G/e}(x, y)$.

4. Если ребро e — петля, то $T_G(x, y) = yT_{G \setminus e}(x, y)$.

Разумеется, существование и единственность многочлена Татта еще нужно доказать. Мы сделаем это позднее (раздел 2.2), а пока выясним, как многочлен Татта связан с теми задачами, которые мы рассматривали до сих пор.

ПРИМЕР 8. Многочлен Татта произвольного дерева с n вершинами (и $(n - 1)$ ребрами) равен x^{n-1} . Это доказывается индукцией по n : в дереве произвольное ребро является перешейком, после стягивания которого получается опять дерево — с $(n - 1)$ вершинами.

ПРИМЕР 9. Пусть $G = Z_n$ — цикл из n вершин. Тогда для произвольного ребра e граф $G \setminus e$ — цепочка L_n из n вершин, а $G/e = Z_{n-1}$. Согласно свойству 2, $T_{Z_n}(x, y) = T_{L_n}(x, y) + T_{Z_{n-1}}(x, y) = x^{n-1} + T_{Z_{n-1}}(x, y)$ по формуле примера 8; это равенство верно при всяком $n > 1$. Граф Z_1 — петля, так что $T_{Z_1} = yT_{\text{точка}} = y$ по свойствам 4 и 1. Следовательно, $T_{Z_{n-1}} = y + x + \dots + x^{n-1}$.

Оказывается, что все комбинаторные характеристики графов, о которых шла речь в разделе 1, выражаются через многочлен Татта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть G — граф с n вершинами и k компонентами связности. Тогда его хроматический многочлен выражается формулой $C_G(s) = (-1)^{n+k} s^k T_G(1 - s, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу ребер графа G . Если ребер нет вовсе, то $k = n$, $T_G(x, y) \equiv 1$, а $C_G(s) = s^n$ — равенство верно. Пусть теперь в графе имеется ребро e . Для графов $G \setminus e$ и G/e утверждение верно по предположению индукции. Пусть вначале e — не петля и не перешеек. Тогда графы $G \setminus e$ и G/e оба содержат по k компонент связности; количество вершин в $G \setminus e$ равно n , а в G/e — $(n - 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} C_G(s) &= C_{G \setminus e}(s) - C_{G/e}(s) = \quad (\text{по формуле (1)}) \\ &= (-1)^{n+k} s^k T_{G \setminus e}(1 - s, 0) - (-1)^{n-1+k} s^k T_{G/e}(1 - s, 0) = \\ &= (-1)^{n+k} s^k (T_{G \setminus e}(1 - s, 0) + T_{G/e}(1 - s, 0)) = \\ &= (-1)^{n+k} s^k T_G(1 - s, 0), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть теперь e — перешеек, соединяющий вершины i и j . Тогда граф $G \setminus e$ имеет $(k + 1)$ компонент связности и n вершин. Из всех $C_{G \setminus e}(s)$ его

раскрасок в s цветов ровно для $1/s$ -ой части цвета вершин i и j совпадают. Следовательно,

$$\begin{aligned} C_G(s) &= (1 - 1/s)C_{G \setminus e}(s) = (1 - 1/s)(-1)^{n+k+1}s^{k+1}T_{G \setminus e}(1 - s, 0) = \\ &\quad (\text{по предположению индукции}) \\ &= (1 - 1/s)(-1)^{n+k+1}s^{k+1}(1 - s)T_G(1 - s, 0) = \quad (\text{по свойству 3}) \\ &= (-1)^{n+k}s^k T_G(1 - s, 0). \end{aligned}$$

Если e — петля, то $C_G(s) = 0$. С другой стороны, $T_G(1 - s, 0) = 0 \cdot T_{G/e}(1 - s, 0) = 0$.

Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть G — связный граф. Многочлен $R_G(p)$, определенный в разделе 1.2, задается формулой

$$R_G(p) = (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_G(1, \frac{1}{1-p}),$$

где n и k — те же, что и в утверждении 3, а r — число ребер графа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять индукция по числу r ребер графа. Для графа с 1 вершиной без ребер $R_G(p) = 1$ и $T_G(p) = 1$, что соответствует формуле, поскольку в этом случае $r = 0$ и $n = k = 1$.

Выделим в графе ребро e . Если оно не является ни перешейком, ни петлей, то граф $G \setminus e$ имеет n вершин, $(r - 1)$ ребер и k компонент связности, а граф G/e — соответственно, $(n - 1)$, $(r - 1)$ и k . Имеем тогда

$$\begin{aligned} R_G(p) &= (1 - p)R_{G \setminus e}(p) + pR_{G/e}(p) = \quad (\text{по формуле (4)}) \\ &= (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_{G \setminus e}(1, \frac{1}{1-p}) + (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_{G/e}(1, \frac{1}{1-p}) = \\ &\quad (\text{по предположению индукции}) \\ &= (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_G(1, \frac{1}{1-p}) \quad (\text{по свойству 2 многочлена Татта}). \end{aligned}$$

Если ребро e — перешеек, то $R_G(p) = pR_{G/e}(p)$. По предположению индукции,

$$pR_{G/e}(p) = (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_{G/e}(1, \frac{1}{1-p}) = (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_G(1, \frac{1}{1-p})$$

(по свойству 3 многочлена Татта).

Если ребро e — петля, то $R_G(p) = R_{G \setminus e}(p)$. По предположению индукции,

$$R_{G \setminus e}(p) = (1 - p)^{r-1-n+k} p^{n-k} T_{G \setminus e}(1, \frac{1}{1-p}) = (1 - p)^{r-n+k} p^{n-k} T_G(1, \frac{1}{1-p})$$

(по свойству 4 многочлена Татта).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Количество ациклических ориентаций графа G равно $A_G = T_G(2, 0)$.*

Доказательство — стандартная индукция по числу ребер графа с использованием свойств величины A_G , доказанных в разделе 1.3.

2.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

Для доказательства существования и единственности мы определим сначала для каждого графа G вспомогательный многочлен $Z(q, v)$ от двух переменных. Он задается формулой

$$Z_G(q, v) = \sum_H q^{k(H)} v^{e(H)}, \quad (7)$$

где сумма берется по всем подграфам H графа G , множество вершин которых совпадает с множеством вершин G , а множество ребер — любое подмножество множества ребер G (так что всякий H имеет, в обозначениях предыдущего раздела, ровно n вершин и не более r ребер). В формуле (7) $k(H)$ обозначает количество компонент связности графа H , а $e(H)$ — число ребер.

Оказывается, многочлен Z_G хорошо ведет себя при разрывах и стягивании ребер: для произвольного ребра e графа G имеет место формула

$$Z_G(q, v) = Z_{G \setminus e}(q, v) + v Z_{G/e}(q, v). \quad (8)$$

Действительно, все подграфы H графа G можно разделить на два непересекающихся класса: содержащие ребро e и не содержащие его. Подграф второго класса — это просто подграф в $G \setminus e$, так что сумма $\sum_H q^{k(H)} v^{e(H)}$, взятая по подграфам второго класса, равна $Z_{G \setminus e}(q, v)$. Во всяком подграфе первого класса можно стянуть ребро e , получив подграф графа G/e . Поскольку при стягивании число ребер уменьшается на единицу, сумма $\sum_H q^{k(H)} v^{e(H)}$, взятая по подграфам первого класса, равна $v Z_{G/e}(q, v)$.

Формула (8) верна для любого ребра e . В случае, если ребро e — петля, то графы $G \setminus e$ и G/e совпадают, что дает равенство

$$Z_G(q, v) = (1 + v) Z_{G \setminus e}(q, v). \quad (9)$$

Пусть теперь e — перешеек. Всякому подграфу H графа G/e можно сопоставить два подграфа графа G : один из них, H_1 содержит все ребра H и еще ребро e , а второй, H_2 — все ребра H , но ребро e не содержит. Очевидно, $e(H_1) = e(H) + 1$, $k(H_1) = k(H)$, и $e(H_2) = e(H)$ и $k(H_2) = k(H) + 1$. Отсюда следует, что $q^{k(H_1)} v^{e(H_1)} + q^{k(H_2)} v^{e(H_2)} = (q + v) q^{k(H)} v^{e(H)}$, то есть

$$Z_G(q, v) = (q + v) Z_{G/e}(q, v). \quad (10)$$

ПРИМЕР 10. Пусть граф G — дерево с n вершинами (и $(n - 1)$ ребрами). Поскольку каждое ребро дерева является перешейком, из формулы

(10) вытекает, что $Z_G = (q + v)^{n-1} Z_{\text{точка}}$. Очевидно, $Z_{\text{точка}} = q$, откуда $Z_G = q(q + v)^{n-1}$.

Теперь мы можем выразить многочлен Татта графа G через многочлен Z_G , доказав тем самым теорему существования и единственности:

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого графа G многочлен Татта $T_G(x, y)$ существует, единствен и задается формулой*

$$T_G(x, y) = \frac{1}{(x-1)^k (y-1)^n} Z_G((x-1)(y-1), y-1), \quad (11)$$

где n — число вершин, а k — количество компонент связности графа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что величина в правой части равенства (11) обладает всеми свойствами многочлена Татта. Если G — граф с n вершинами и без ребер, то его единственный подграф — он сам, так что $Z_G(q, v) = q^n$. Поскольку $k = n$, имеем

$$\frac{1}{(x-1)^k (y-1)^n} Z_G((x-1)(y-1), y-1) = 1,$$

как и требуется (свойство 1). Свойства 2, 3 и 4 легко выводятся из формул (8), (10) и (9) соответственно. Несложной индукцией по числу ребер отсюда выводится, что величина $\frac{1}{(x-1)^k (y-1)^n} Z_G((x-1)(y-1), y-1)$ — многочлен от x и y . Тем самым доказано существование многочлена Татта и формула (11).

Единственность многочлена Татта доказывается независимо от формулы (11) индукцией по числу ребер. Действительно, если ребер нет (база индукции), то $T_G(x, y) = 1$ по свойству 1. Если же имеется ребро e , то вычисление T_G однозначно сводится с помощью свойства 2, 3 или 4 к вычислению многочлена Татта для графов $G \setminus e$ и G/e , имеющих на одно ребро меньше.

2.3. ДРУГИЕ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ МНОГОЧЛЕНА ТАТТА

Подставляя различные величины вместо x и y в многочлен Татта $T_G(x, y)$, можно получить описание многих комбинаторных свойств графа G . С некоторыми примерами мы уже познакомились в разделе 2.1; вот еще несколько утверждений такого же рода (заимствованных из замечательного обзора [2]):

1. Если граф G связный, то $T_G(1, 1)$ равно числу подграфов-деревьев в G .
2. Пусть G — связный граф, и $f_i(G)$ — количество его подграфов-лесов с ровно i ребрами (лес — это граф без циклов, не обязательно связный). Тогда имеет место равенство $\sum_{i=0}^{n-1} f_i(G) s^i = s^{n-1} T_G(1 + 1/s, 1)$;

здесь n — количество вершин в графе G (следовательно, подграф-лес содержит от 0 до $(n-1)$ ребер). Полагая $s = 1$, получим, что $T_G(2, 1)$ равно общему числу подграфов-лесов в G .

3. Пусть G — связный граф, и $c_i(G)$ — количество его связных подграфов с i ребрами. Тогда

$$\sum_{i=0}^{r-n+1} c_i(G) s^i = s^{r-n+1} T_G\left(1, 1 + \frac{1}{s}\right),$$

где r — количество ребер, а n — количество вершин графа G . Полагая $s = 1$, получим, что $T_G(1, 2)$ равно числу связных подграфов в G .

4. $T_G(0, 2)$ равно числу вполне циклических ориентаций графа G , то есть таких способов расставить стрелки на ребрах, что каждое ребро входит в ориентированный цикл.
5. $T_G(1, 0)$ равно числу ациклических ориентаций графа G (ср. утверждение 5), имеющих ровно одну вершину-источник, то есть вершину, в которую не входит ни одна стрелка.
6. $T_G(-1, -1) = (-1)^r 2^d$, где r — число ребер графа, а d — размерность так называемого «велосипедного пространства» графа, см. определение в работе [3].

Доказательства всех этих свойств похожи на доказательства утверждений 3–5 и оставляются читателю в качестве упражнения.

3. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ КЛАСТЕРОВ

«Вспомогательный многочлен» $Z_G(q, v)$, определенный формулой (7), имеет неожиданное применение в математической физике: он описывает статистическую сумму простейшей модели кристалла-магнетика — *модели случайных кластеров*.

Кристалл в этой модели изображается графом (обычно решеткой, типа рассмотренных в задаче 1). Атомы — вершины графа, и каждая вершина соединена ребрами с несколькими другими — «ближайшими соседями». Каждый атом может находиться в одном из q состояний (значений спина), так что состояние всего кристалла описывается парой (G, σ) , где $\sigma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ — функция на множестве вершин графа G (ср. с разделом 1.1).

Атомы кристалла взаимодействуют между собой, и этому взаимодействию отвечает некоторая потенциальная энергия. Взаимодействие зависит от состояния атомов и от их расположения. В модели случайных кластеров предполагается, что атом взаимодействует только со своими

ближайшими соседями (т. е. вершина — с вершинами, соединенными с ней ребрами), и только в том случае, когда значения их спинов совпадают. Тем самым каждому ребру e графа G с концами $e^+, e^- \in V(G)$ отвечает потенциальная энергия, равная $J_e \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-))$. Здесь J_e — константа, характеризующая интенсивность связи вдоль данного ребра, а $\delta(a, b) = 1$, если $a = b$, и 0, если $a \neq b$. Потенциальная энергия всего кристалла в состоянии, характеризуемом парой (V, σ) , складывается из энергий парных взаимодействий:

$$\Pi(G, \sigma) = \sum_{e \in E(G)} J_e \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-)). \quad (12)$$

Под влиянием теплового движения кристалл случайным образом переходит из одного состояния в другое. В классической статистической физике принят постулат Больцмана, согласно которому вероятность для системы находиться в данном состоянии σ равна $P(\sigma) = \exp(-\beta\Pi(\sigma))/Z(\beta)$, где β связана с (абсолютной) температурой T системы равенством $\beta = 1/kT$ (k — физическая константа, называемая постоянной Больцмана), а $Z(\beta)$ — нормировочный множитель, равный (чтобы сумма всех вероятностей равнялась 1)

$$Z(\beta) = \sum_{\sigma} \exp(-\beta\Pi(\sigma)),$$

где сумма берется по всем состояниям системы (в нашем случае — по всем функциям $\sigma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$). Величина $Z(\beta)$ называется *статистической суммой* системы.

Пусть f — некоторая физическая характеристика системы, т. е. функция ее состояния (для определенности, с вещественными значениями). Тогда среднее значение f по всем состояниям системы равно

$$\langle f \rangle = \sum_{\sigma} f(\sigma) P(\sigma) = \sum_{\sigma} f(\sigma) \exp(-\beta\Pi(\sigma))/Z(\beta).$$

ПРИМЕР 11. Среднее значение энергии произвольной системы равно $\langle \Pi \rangle = \sum_{\sigma} \Pi(\sigma) \exp(-\beta\Pi(\sigma))/Z(\beta) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta)$.

Мы докажем следующую теорему, впервые полученную П. Кастелейном и С. Фортюэном в 1969 г.:

ТЕОРЕМА 2 ([4]). Пусть $J_e = J$ не зависит от ребра e . Тогда статистическая сумма модели случайных кластеров равна

$$Z_G(q, \exp(-\beta J) - 1),$$

где многочлен Z определен формулой (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ — состояние системы. Обозначим $v = \exp(-\beta J) - 1$; тогда

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\Pi(\sigma)) &= \exp(-\beta J \sum_e \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-))) \\ &= \prod_e \exp(-\beta J \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-))) = \\ &= \prod_e (1 + v \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-))) = \sum_{A \subset G} \prod_{e \in A} v \delta(\sigma(e^+), \sigma(e^-)), \end{aligned}$$

иными словами,

$$\exp(-\beta\Pi(\sigma)) = \sum_{A \subset G} v^{e(A)},$$

где сумма берется по всем подграфам $A \subset G$, для которых значение функции σ одинаково на обоих концах каждого входящего в них ребра. Это означает, что функция σ постоянна на компонентах связности подграфа A . Тем самым статистическая сумма модели случайных кластеров равна

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \exp(-\beta\Pi(\sigma)) &= \\ &= \sum_{A \subset G} v^{e(A)} \times \#\text{функций } \sigma, \text{ постоянных на компонентах связности } A = \\ &= \sum_{A \subset G} q^{k(A)} v^{e(A)} = Z_G(q, v). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 12. Для одномерного кристалла («цепочки») из N атомов, согласно примеру 10, имеем (в предположении, что веса всех ребер одинаковы) $Z(q, v) = q(q+v)^{N-1}$. Отсюда вытекает, что статистическая сумма равна $q(q-1 + \exp(-\beta J))^{N-1}$, а средняя энергия магнитного взаимодействия атомов системы, согласно примеру 11, равна

$$\langle \Pi \rangle = (N-1) \frac{J \exp(-\beta J)}{q-1 + \exp(-\beta J)}.$$

Средняя энергия в расчете на один атом кристалла равна $\langle E \rangle / N$ и в пределе $N \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{J \exp(-\beta J)}{q-1 + \exp(-\beta J)}$.

Если температура системы велика ($T \rightarrow +\infty$), то $\beta = 1/kT \rightarrow 0$, и средняя энергия на один атом приближается к J/q . Поведение же системы при низких температурах ($T \rightarrow 0$, то есть $\beta \rightarrow +\infty$) зависит от знака константы взаимодействия J . Если $J > 0$, то $\exp(-\beta J) \rightarrow 0$, и средняя энергия стремится к нулю. Такие кристаллы называются антиферромагнитными: в них соседним атомам энергетически невыгодно иметь одинаковые спины, и поэтому при низкой температуре, когда тепловое

движение практически исчезает, такая ситуация практически не встречается. Если же $J < 0$ (ферромагнитный кристалл), то $\exp(-\beta J) \rightarrow +\infty$, и средняя энергия на один атом стремится к J . Иными словами, в ферромагнитном кристалле при низкой температуре все атомы стараются иметь один и тот же спин.

Пусть теперь $q = 2$, то есть спин σ принимает только 2 значения. Будем считать, что эти значения равны $1/2$ и $-1/2$. Тогда можно рассмотреть функцию состояния системы, равную $f(\sigma) = \sum \sigma(v)$, где сумма берется по всем вершинам графа.

Введем теперь в систему внешнее магнитное поле. Тогда энергия системы складывается из двух слагаемых: энергии $\Pi(\sigma)$ попарного взаимодействия, заданной формулой (12), и энергии взаимодействия спинов с магнитным полем, равной $hf(\sigma)$ (h — величина поля).

ЗАДАЧА 3. Пусть граф $G = G_N$ — цепочка, как в примере 12. а) Вычислите статистическую сумму $Z_N(\beta, h) = \sum_{\sigma} \exp(-\beta(\Pi(\sigma) + hf(\sigma)))$. б) Вычислите $\langle f \rangle$ как функцию β и h . в) Найдите предел $\lim_{h \rightarrow +0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle f \rangle$.

Предел в пункте 3в называется *спонтанной намагниченностью*. Он не равен нулю, в отличие от предела $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{N} \langle f \rangle$, который равен нулю по соображениям симметрии.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Из утверждений 3 и 4 следует, что задачи 1 и 2 можно решить, если найти многочлены Татта соответствующих графов-решеток. Для решеток $2 \times n$ (пункты 1а и 1в) это несложно, но явная формула для многочлена Татта произвольных решеток (пункты 1б и 1г, отмеченные звездочкой) в настоящее время неизвестна (так же как и формулы для многочленов C_G и R_G). Поиски такой формулы интенсивно ведутся. Задача про треугольную решетку выглядит несколько проще: для нее известен предел многочлена Татта при $n \rightarrow \infty$ (и фиксированном m), а также доказан ряд других результатов, см. статью [5]. Про прямоугольные решетки литература очень велика; см. недавнюю работу [6].

2. Популярный рассказ о кристаллах-магнетиках см. в книге [7]. Особенно интересной оказывается теория, когда в качестве модели магнетика выступает не граф-цепочка, как в примере 12, а двумерная решетка, наподобие рассмотренных в задаче 1. Устремив размеры решетки к бесконечности, можно вычислить, как в задаче 3, спонтанную намагниченность. В данном случае ее зависимость от температуры оказывается негладкой: при температуре ниже некоторого критического уровня T_c

спонтанная намагниченность отлична от нуля, а при $T > T_c$ — равна нулю. Это явление называется фазовым переходом. Точная формула для T_c была найдена Янгом [8]; см. книги [9], [10] и [11]. Отметим еще книгу [12] (вышедшую в той же серии «Библиотечка „Квант“», что и [7]) — в ней разбираются задачи про большие решетки, весьма близкие по духу к упомянутым выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Татт У. *Теория графов*. М.: Мир, 1988.
- [2] Welsh D. J. A., Merino C. *The Potts model and the Tutte polynomial* // J. Math. Phys. Vol. 41, no 3, 2000. P. 1127–1152.
- [3] Read R. C., Rosenstiehl P. *On the principal edge tripartition of a graph* // Ann. Discrete Math. Vol. 3, 1978. P. 195–226.
- [4] Kasteleyn P. W., Fortuin C. M. *Phase transitions in lattice systems with random local properties* // J. Phys. Soc. Japan. Vol. 26 (Suppl.), 1969. P. 11–14.
- [5] Chang S.-Ch., Jacobsen J. L., Salas J., Shrock R. *Exact Potts model partition functions for strips of the triangular lattice* // J. Stat. Phys. Vol. 114, no 3/4, 2004. P. 763–823.
- [6] Calkin N. et. al., *Improved bounds for the number of forests and acyclic orientations in the square lattice* // Electronic J. Combin., Vol. 10, 2003.
- [7] Каганов М. И., Цукерник В.М. *Природа магнетизма* (серия «Библиотечка «Квант»», выпуск 16). М.: Наука, 1982.
- [8] Yang C. N. *The simultaneous magnetization of a two-dimensional Ising model* Phys. Rev. B. Vol. 85, 1952. P. 806–816.
- [9] Бэкстер Р. *Точно решаемые модели в статистической механике*. М.: Мир, 1985.
- [10] Белавин А. А., Кулаков А. Г., Устинов Р. А. *Лекции по теоретической физике*. М.: МЦНМО, 2001.
- [11] Джимбо М., Мива Т. *Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей*. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика / Удмуртский университет, 2000.
- [12] Эфрос А. Л. *Физика и геометрия беспорядка* (серия «Библиотечка „Квант“», выпуск 19). М.: Наука, 1982.

Разные взгляды на изогональное сопряжение

А. В. Акопян*

А. А. Заславский

Пусть дан произвольный треугольник ABC и точка P , не лежащая на его сторонах. Отразим прямые, соединяющие вершины треугольника с P , относительно биссектрис соответствующих вершин треугольника. Из теоремы Чебы следует, что полученные три прямые пересекаются в одной точке (или же параллельны, т. е. пересекаются в бесконечно удаленной точке на проективной плоскости), обозначим ее P' (рис. 1). Точку P' называют *изогонально сопряженной* точке P относительно треугольника ABC , а преобразование, переводящее каждую точку проективной плоскости в изогонально сопряженную, — *изогональным сопряжением*.

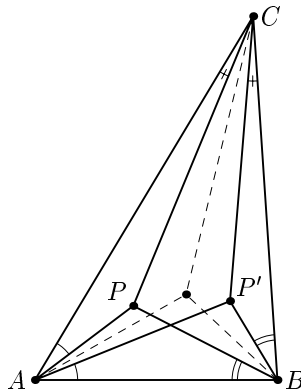


Рис. 1.

Если P лежит на стороне треугольника, то, применив к ней изогональное сопряжение, получим противоположную вершину треугольника. Соответственно, для вершин изогонально сопряженная точка определена неоднозначно. Если же исключить из рассмотрения стороны треугольника, то изогональное сопряжение будет взаимно однозначной инволюцией, т. е. преобразованием, квадрат которого равен тождественному. Очевидно также, что эта инволюция имеет ровно 4 неподвижных точки: центры вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-648

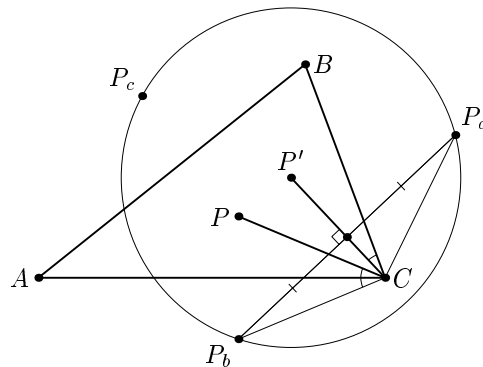


Рис. 2.

Для изучения свойств изогонального сопряжения оказывается полезным еще один способ построения сопряженной точки.

Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC , P_a симметрична P относительно стороны BC , P_b и P_c определены аналогично (рис. 2). Пусть P' — это центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$. Точка C равноудалена от P_a и P_b , следовательно прямая CP' является серединным перпендикуляром к отрезку P_aP_b . А значит $\angle P_aCP' = \frac{1}{2}\angle P_aCP_b = \angle C$. Но тогда $\angle BCP' = \angle P_aCP' - \angle BCP_a = \angle C - \angle BCP = \angle ACP$. Аналогично показывается, что $\angle ABP' = \angle CBP$ и $\angle BAP' = \angle CAP$. А это и означает, что точка P' изогонально сопряжена P относительно ABC .

Если точка P вне треугольника, то рассуждения абсолютно аналогичны, но, когда P лежит на описанной окружности ABC , ее проекции на стороны треугольника лежат на одной прямой (прямая Симсона). Соответственно, треугольник $P_aP_bP_c$ оказывается вырожденным, и центр его описанной окружности не определен. В этом случае естественно описанной окружностью считать прямую P_aP_b , а ее центром — точку на бесконечно удаленной прямой, соответствующую направлению, перпендикулярному P_aP_b . Таким образом, мы фактически доказали следующее свойство изогонального сопряжения.

Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC , то изогонально сопряженной точке P будет точка на бесконечно удаленной прямой, которая задает направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC .

Напомним, что треугольник, образованный проекциями точки P на стороны треугольника ABC , называется *педальным треугольником* P относительно ABC , а описанная около него окружность *педальной окружностью* P . Из второго построения изогонально сопряженных точек

следует, что центр педальной окружности точки P — это середина отрезка PP' , а ее радиус в два раза меньше отрезка $P'P_a$. Действительно, педальная окружность точки P — это окружность, получающаяся из описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$ гомотетией с центром в P и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Отсюда, очевидно, вытекает следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.*

Рассмотрим теперь не лежащую на описанной окружности точку P и изогонально сопряженную ей P' . Пусть K_a, K_b и K_c — это точки пересечения прямых BC и $P'P_a, AC$ и $P'P_b, AB$ и $P'P_c$ (рис. 3). Тогда $\angle PK_aB = \angle P'K_aC$, и, следовательно, коника с фокусами в P и P' и суммой (или модулем разности) расстояний до фокусов, равным $P'P_a$, касается прямой BC . Аналогично показывается, что эта же коника касается двух других сторон треугольника, поскольку $P'P_a = P'P_b = P'P_c$ и равно удвоенному радиусу педальной окружности точки P . Если же P лежит на описанной окружности, то аналогичные рассуждения показывают, что P — фокус касающейся сторон треугольника параболы. Таким образом, для любой пары изогонально сопряженных точек найдется вписанная в треугольник коника с фокусами в этих точках. Легко доказывается и обратное утверждение: фокусы любой вписанной в треугольник коники изогонально сопряжены. Это дает третий способ определения изогонального сопряжения. На рис. 4 отмечены зоны, где соответствующие точкам коники будут эллипсами, параболами или гиперболами.

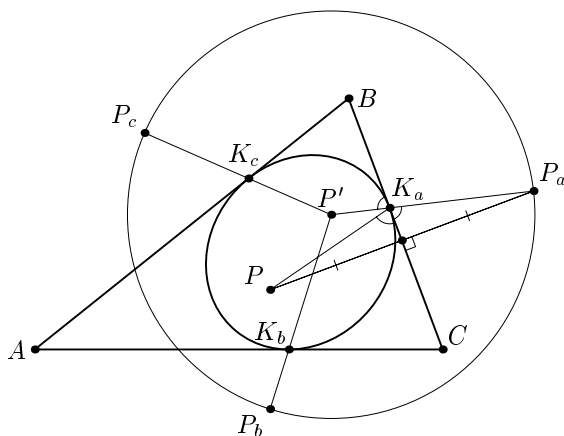


Рис. 3.

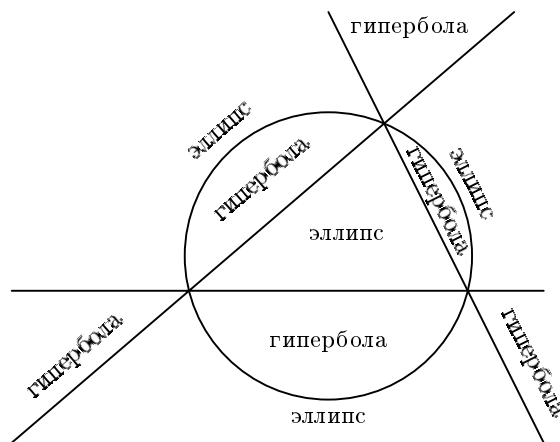


Рис. 4.

Наконец, изогональное сопряжение можно определить проективно. Чтобы сделать это, напомним основные сведения проективной геометрии.

Пусть на комплексной проективной плоскости даны коника C и не лежащая на ней точка A . Проведем через A две прямые, пересекающие C в точках X_1, X_2 и Y_1, Y_2 . Пусть U — точка пересечения прямых X_1Y_1 и X_2Y_2 , V — точка пересечения прямых X_1Y_2 и X_2Y_1 . Тогда прямая UV не зависит от выбора прямых X_1X_2 и Y_1Y_2 , а определяется только точкой A . Эта прямая называется *полярной* A относительно C , а A — *полюсом* прямой UV . Полярной точки, лежащей на конике, является касательная к конике в этой точке. Важным свойством полюсов и поляр является взаимность: если точка A лежит на поляре точки B , то и B лежит на поляре A . Подробнее о свойствах поляр можно прочитать в [3].

Пусть даны четыре точки общего положения A, B, C, D . Они определяют пучок проходящих через эти точки коник. Рассмотрим поляры фиксированной точки P относительно коник этого пучка. Оказывается верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B, C, D — четыре различных точки, X, Y, Z — точки пересечения AB и CD , AC и BD , AD и BC , P — точка, отличная от X, Y, Z . Тогда поляры P относительно всех коник пучка, заданного точками A, B, C, D , проходят через одну точку.

Частным случаем пучка коник является пучок окружностей, т. е. множество окружностей, для любых двух из которых радикальной осью является одна и та же прямая. Эта прямая называется радикальной осью пучка. Пучок коник является пучком окружностей тогда и только тогда,

когда две из задающих его точек являются так называемыми круговыми точками, т. е. комплексными бесконечно удаленными точками с проективными координатами $(1, \pm i, 0)$.

Приведем доказательство теоремы для случая пучка окружностей. Поляра бесконечно удаленной точки относительно любой окружности перпендикулярна задаваемому этой точкой направлению. Поэтому все поляры бесконечно удаленной точки X проходят через бесконечно удаленную точку X^* , которая задает направление, перпендикулярное направлению, задаваемому X .

Теперь рассмотрим конечную точку X .

Пусть l — радикальная ось пучка. Поляра точки X относительно любой окружности ω проходит через точки касания ω с касательными к ней из X , а радикальная ось X и ω — через середины отрезков между X и точками касания. Поскольку наши окружности образуют пучок, существует радикальный центр точки X и окружностей нашего пучка (т. е. точка, степень которой относительно всех окружностей и X одинакова). А именно, это будет точка пересечения l и радикальной оси ω и X . Обозначим ее за X' . Значит, все поляры точки X проходят через точку X^* , лежащую на луче XX' и находящуюся в два раза дальше от точки X , чем точка X' . Из приведенной конструкции легко понять, что для любой прямой l' , проходящей через X' , найдется такая окружность ω' , что l' будет радикальной осью ω' и X . Это будет окружность из пучка, центр которой лежит на перпендикуляре к l' , пущенном из X .

Для доказательства теоремы в общем случае проще перейти к двойственному утверждению.

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны четыре прямые l_i , $i = 1, \dots, 4$. X_{ij} — точка пересечения l_i и l_j . Тогда геометрическим местом полюсов любой прямой, отличной от $X_{12}X_{34}$, $X_{13}X_{24}$, $X_{14}X_{23}$, относительно коник двойственного пучка, заданного прямыми l_i (т. е. коник, касающихся l_i) будет прямая (рис. 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим проективное преобразование, переводящее исходную прямую в бесконечно удаленную. Из условия следует, что в этом случае прямые l_i образуют четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. Докажем, что центры вписанных в него коник лежат на так называемой *прямой Гаусса*, проходящей через середины диагоналей четырехугольника. Теорема отсюда следует, так как полюсом бесконечной прямой относительно коники является центр этой коники.

Отметим, что прямая Гаусса является геометрическим местом точек P , для которых $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PDA}$ (площади считаются положительными или отрицательными в зависимости от ориентации

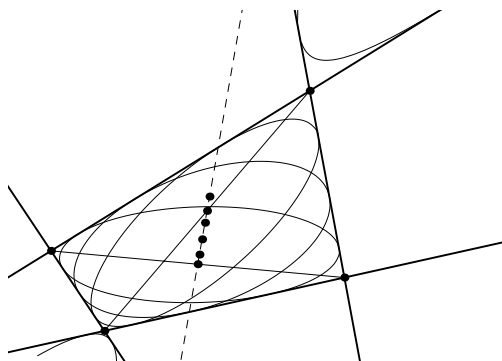


Рис. 5.

соответствующего треугольника). Действительно, площадь каждого из четырех треугольников есть линейная функция от координат точки P , следовательно, множеством точек, удовлетворяющих указанному соотношению, является прямая. Очевидно, что середины диагоналей принадлежат этой прямой.

Пусть теперь в четырехугольник $ABCD$ вписана коника с фокусами F_1, F_2 . Так как ее центром является середина отрезка F_1F_2 , утверждение теоремы равносильно тому, что $S_{F_1AB} + S_{F_1CD} + S_{F_2AB} + S_{F_2CD} = S_{F_1BC} + S_{F_1DA} + S_{F_2BC} + S_{F_2DA}$. Пусть F'_1 — точка, симметричная F_1 относительно AB . Тогда $S_{F_1AB} + S_{F_2AB} = S_{F'_1AF_2B} = AF'_1 \cdot AF_2 \sin \angle F'_1AF_2 + BF'_1 \cdot BF_2 \sin \angle F'_1BF_2$. Но прямые, соединяющие точки F_1, F_2 с любой из вершин $ABCD$, симметричны относительно биссектрисы соответствующего угла, следовательно, $\angle F'_1AF_2 = \angle F_1AB + \angle F_2AB = \angle A$, $\angle F'_1BF_2 = \angle B$ и $S_{F'_1AF_2B} = AF_1 \cdot AF_2 \sin \angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin \angle B$. Из этого и аналогичных равенств следует, что как левая, так и правая части искомого соотношения равны $AF_1 \cdot AF_2 \sin \angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin \angle B + CF_1 \cdot CF_2 \sin \angle C + DF_1 \cdot DF_2 \sin \angle D$.

Отметим, что частным случаем доказанной теоремы является ТЕОРЕМА МОНЖА, утверждающая, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр лежит на прямой Гаусса.

Пусть теперь задающие пучок точки A, B, C, D образуют ортоцентрическую четверку (т. е. каждая точка является ортоцентром треугольника, образованного остальными). Покажем, что полученная точка пересечения поляр изогонально сопряжена P относительно треугольника XYZ .

Действительно, поляра точки P относительно вырожденной кривой, являющейся объединением прямых AB и CD — это прямая, симметричная XP относительно AB . Так как AB и CD — биссектрисы угла YXZ ,

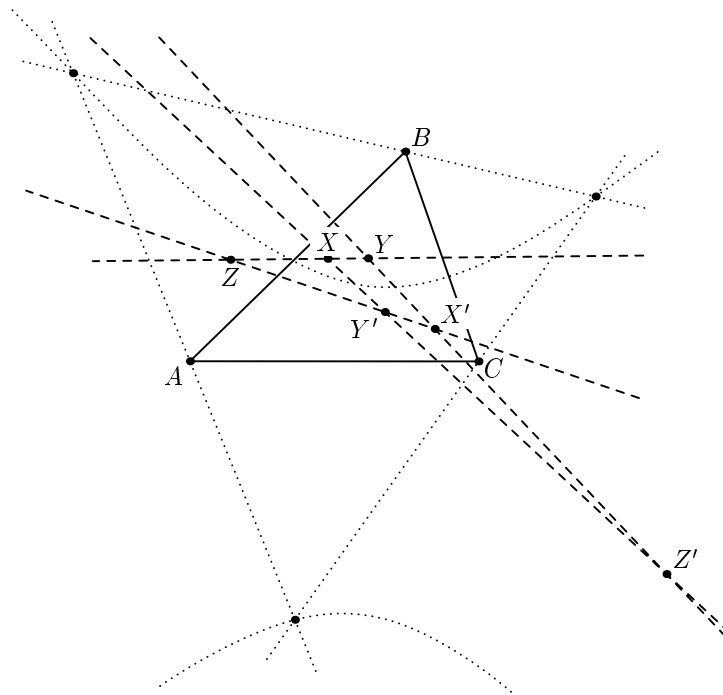


Рис. 6.

эта прямая проходит через изогонально сопряженную P точку P' . Аналогично через P' проходит поляр P относительно другой вырожденной кривой, а значит, и относительно любой кривой пучка.

Таким образом, мы получили четвертый способ определения изогонального сопряжения. Используя его, можно доказать следующее красивое свойство.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПАРАХ ТОЧЕК. Пусть дан треугольник ABC и две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' . Тогда точки пересечения $X'Y'$ с AX и XY' с AX' тоже изогонально сопряжены (рис. 6).

Доказательство. Рассмотрим пучок коник, порождающий нужное сопряжение. Выберем из него конику, относительно которой поляр X совпадает с прямой AX' . Тогда поляр Y' проходит через X , т. е. совпадает с XY' , а полюсом прямой AX' является точка пересечения XY' и AX' . Следовательно, сопряженная к этой точке лежит на XY' . Аналогично она лежит на AX' .

В заключение этого раздела напомним несколько примеров изогонально сопряженных точек.

Самой известной парой изогонально сопряженных точек является пара H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника. Их общей pedalной окружностью будет окружность Эйлера.

Изогонально сопряженной точкой к центру тяжести будет точка Лемуана. Самое простое ее определение следующее. Обозначим через A' точку пересечения касательных к описанной окружности, построенных из вершин B и C нашего треугольника. Аналогично определим B' и C' . Оказывается, что AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке. Эту точку и принято называть точкой Лемуана.

Точки Брокара: первая точка Брокара $(Br)_1$ определяется равенством

$$\angle BA(Br)_1 = \angle CB(Br)_1 = \angle AC(Br)_1,$$

вторая — $(Br)_2$ — равенством:

$$\angle AB(Br)_2 = \angle BC(Br)_2 = \angle CA(Br)_2.$$

Точки Торичелли и точки Аполлония. Точки Торичелли — это точки, из которых все стороны видны под углами (направленными) 60° и 120° . Одна из этих точек интересна тем, что в треугольниках, где все углы меньше 120° , на ней достигается минимум суммы расстояний до вершин. Точки Аполлония — это точки, pedalные треугольники которых правильные.

Точки Жергонна и Нагеля, в которых пересекаются прямые, соединяющие вершины треугольника и точки касания его противоположных сторон с вписанной (внеписанными) окружностью, изогонально сопряжены центрам гомотетии вписанной и описанной окружностей треугольника.

Последний пример несколько необычен для классической геометрии. Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа, а Z_1, Z_2, Z_3 — точки, обозначающие их на комплексной плоскости. Пусть X и Y — точки, соответствующие корням производной многочлена $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Оказывается, они тоже изогонально сопряжены.

Доказательства этих фактов приводятся в [1].

В качестве еще одной иллюстрации докажем теорему Паскаля, используя изогональное сопряжение.

ТЕОРЕМА 4 (ПАСКАЛЬ). Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на конике. Тогда точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и FA лежат на одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только один случай расположения точек на окружности (конике). Остальные рассматриваются аналогично.

Переведем проективным преобразованием конику в окружность. Получим следующую конструкцию (рис. 7):

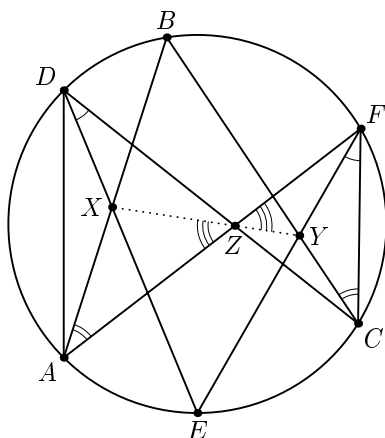


Рис. 7.

Точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке X , прямые BC и EF — в точке Y , а AF и CD — в точке Z . Надо доказать, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

Углы BAF и BCF равны, поскольку опираются на одну дугу. Аналогично равны углы CDE и CFE . Кроме того, треугольники AZD и CZF подобны. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в CZF . При этом преобразовании точка X перейдет в точку X' , изогонально сопряженную точке Y относительно треугольника CZF (в силу вышеуказанных равенств углов). Поэтому $\angle AZX = \angle CZX' = \angle FZY$, что и означает, что точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ В ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ

Пусть дан четырехугольник $ABCD$ и точка P . В общем случае прямые, симметричные AP, BP, CP, DP относительно биссектрис соответствующих углов четырехугольника, не пересекаются в одной точке. Однако нетрудно показать, что если три из этих прямых пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку. Геометрическим местом точек P , для которых это условие выполняется, будет некоторая кривая. Исследуем ее свойства.

Отметим, что существование точки, изогонально сопряженной X , равносильно существованию коники с фокусом в X , касающейся прямых AB, BC, CD, DA , или существованию окружности, проходящей через проекции X на стороны четырехугольника (доказательство этого факта аналогично доказательству для треугольника, см. рис. 8). Последнее и дает нам возможность описать геометрическое место таких точек X .

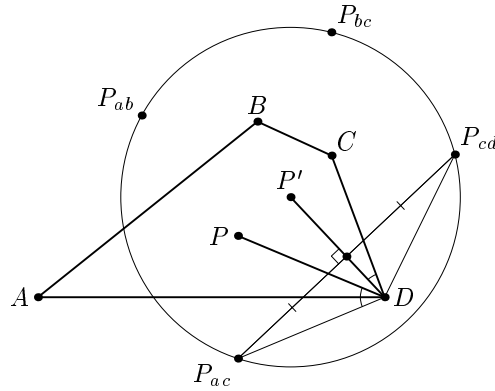


Рис. 8.

Итак, пусть нам дан двойственный пучок коник (т. е. коник, касающихся четырех данных прямых). Для наглядности будем считать, что все коники пучка касаются четырех различных действительных прямых. Все вышесказанное аналогично обобщается и на прямые общего положения.

Рассмотрим двойственный пучок коник, который определяется прямыми l_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Иначе говоря, все рассматриваемые коники касаются этих четырех прямых. Это значит, что проекции фокусов на эти четыре прямые лежат на одной окружности.

Обозначим координаты точки F через (x, y) , а ее проекций на прямые l_i , через (x_i, y_i) . Существование окружности, проходящей через точки с координатами (x_i, y_i) , равносильно существованию ненулевого решения системы уравнений:

$$a(x_i^2 + y_i^2) + bx_i + cx_i + d = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

Что в свою очередь равносильно равенству нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Покажем, что это соотношение дает кубическое уравнение на (x, y) . Элементы второго и третьего столбца, очевидно, являются линейными функциями от (x, y) . Однако элементы первого столбца таковыми не являются. Покажем, что если из первого столбца вычесть второй и третий столбец, помноженные на x и y соответственно (а, как известно, определитель при этом не изменится), то его элементы станут линейными.

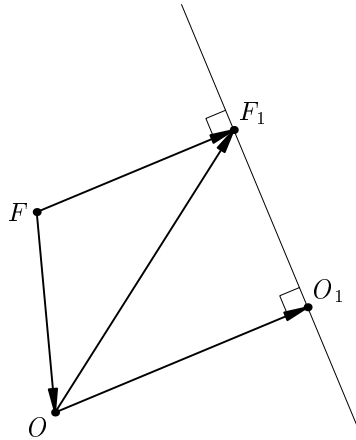


Рис. 9.

А значит, определитель будет многочленом не выше, чем третьей степени от x и y .

Обозначим за O начало координат, проекцию точек F и O на l_1 через F_1 и O_1 соответственно. Тогда (рис. 9):

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - (x_1x + y_1y) &= OF_1^2 - \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OF} \rangle = \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \langle \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1F}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \pm |OO_1| \cdot |FF_1|. \quad (3) \end{aligned}$$

И, значит, $x_1^2 + y_1^2 - (x_1x + y_1y)$ прямо пропорционально расстоянию от точки F до прямой l_1 , а это линейная функция от (x, y) . Аналогично для других трех прямых.

Итак, мы показали, что множеством точек, для которых определено изогональное сопряжение относительно четырехугольника, является некоторая кривая третьего порядка или кубика. Выведем теперь уравнение этой кубики в специально выбранной системе координат.

Известно, что для любых четырех прямых общего положения четыре окружности, описанные около треугольников, образованных каждым тремя из этих прямых, пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Микеля* данных четырех прямых. Проекция точки Микеля на данные прямые лежат на одной прямой, которая является ее прямой Симсона относительно всех четырех треугольников. Отсюда следует, что точка Микеля лежит на нашей кубике, а изогонально сопряженной ей является бесконечно удаленная точка, т.е. точка Микеля — фокус параболы, касающейся всех сторон четырехугольника.

Примем точку Микеля за начало координат, а направление, параллельное оси параболы, за ось y . Если a, b, c и d — удвоенные абсциссы точек касания прямых l_i с параболой, то уравнение кубики имеет вид:

$$4(x^2 + y^2)(4x - (a + b + c + d)) - x(1 - ab - ac - ad - bc - cd + abcd) + y(abc + abd + acd + bcd - a - b - c - d) = 0. \quad (4)$$

Или:

$$(x^2 + y^2)(x + A) = Bx + Cy. \quad (5)$$

Из уравнения следует, что эта кубика проходит через круговые точки.

Отметим также, что ось y при этом будет параллельна прямой Гаусса прямых l_i (см. [1]).

Пусть теперь U, U' и V, V' — две пары лежащих на кубике сопряженных точек. Тогда из теоремы о трех парах точек следует, что точки W и W' пересечения UV с $U'V'$ и UV' с $U'V$, соответственно, изогонально сопряжены относительно треугольника, образованного любыми тремя из прямых l_i . Значит, они изогонально сопряжены и относительно четырехугольника, т.е. тоже лежат на кубике. Таким образом, третьи точки пересечения прямых UV и $U'V'$ с кубикой совпадают. Это утверждение допускает красивую интерпретацию, если рассмотреть на кубике фокусов групповой закон.

Напомним, что на любой кубике можно ввести операцию сложения точек следующим образом [5]. Выделим на кубике некоторую точку O . Для любых двух точек кубики A, B найдем третью точку C пересечения кубики с прямой AB , а затем третью точку пересечения кубики с прямой OC . Эту точку и назовем суммой $A + B$. Очевидно, что введенная операция коммутативна. Нетривиальным оказывается, что она и ассоциативна, и значит, превращает множество точек кубики в группу (отметим, что частными случаями этого утверждения являются известные проективные теоремы Паппа и Паскаля).

Теперь, если функцию сопряжения обозначить через $f()$, то сформулированное выше утверждение можно записать в виде:

$$a + b = f(a) + f(b), \forall a, b. \quad (6)$$

Вместо b взяв 0 получаем, что:

$$a = f(a) + f(0), \forall a. \quad (7)$$

С другой стороны при $b = a$ получаем, что:

$$a + a = f(a) + f(a), \forall a. \quad (8)$$

Из двух последних уравнений следует, что сопряженной к любой точке кубики A будет точка $A + X$, где X такая точка, что $X + X = 0$. Отметим

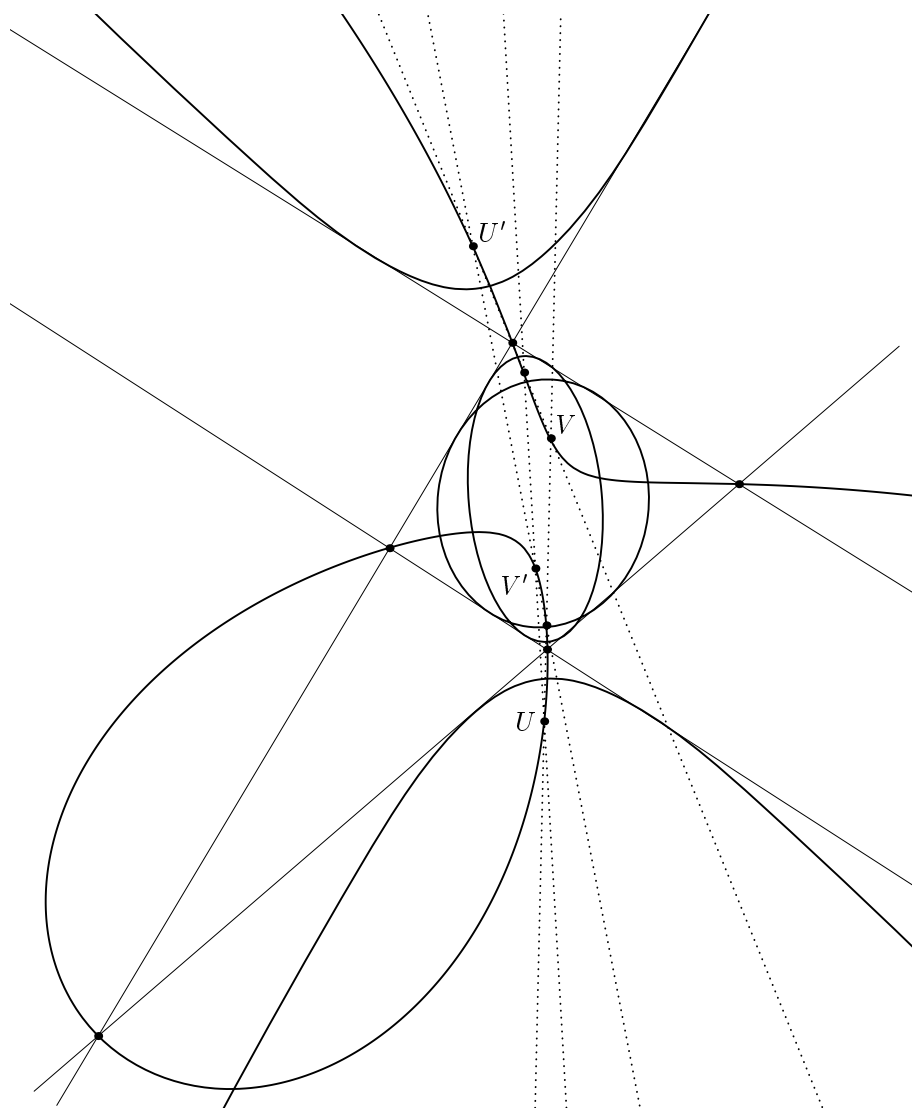


Рис. 10.

также, что *середины отрезков с концами в сопряженных точках лежат на одной прямой* (прямой Гаусса нашего четырехугольника).

На рис. 10 приведен пример такой кубики и проиллюстрирована теорема о трех парах точек.

Выясним теперь, порождается ли кубика фокусов какими-либо другими четырехугольниками.

ЛЕММА 1. Пусть фокусы некоторого двойственного пучка образуют невырожденную (т. е. не распадающуюся на прямую и конику) кубику α . Пусть A, A^* и B, B^* — две пары сопряженных точек на этой кубике. Тогда фокусы коник, касающихся сторон четырехугольника ABA^*B^* , тоже лежат на кубике α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если C и C^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ABA^*B^* , то B и B^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ACA^*C^* . Действительно, если это так, то порожденные этими четырехугольниками кубики в обоих случаях должны проходить через все шесть точек, а также через точки пересечения пар прямых, проходящих через сопряженные точки (например, AB и A^*B^*). Этим точек больше 10, а через 10 точек, лежащих на невырожденной кубике, не может проходить никакая другая кубика. Далее от пары (A, A^*) и (C, C^*) аналогично переходим к паре сопряженных точек (C, C^*) и (D, D^*) . А это и требуется.

Итак, пусть дан четырехугольник ABA^*B^* и две изогонально сопряженные точки C и C^* . Нам надо доказать, что B и B^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ACA^*C^* . Равенства $\angle BAC = \angle C^*AB^*$ и $\angle BA^*C = \angle C^*A^*B^*$ следуют из изогональности точек C и C^* . Для доказательства другого равенства достаточно показать, что $\angle ACB^* + \angle A^*CB = 180^\circ$ (см. рис. 11). Но это, очевидно, следует из

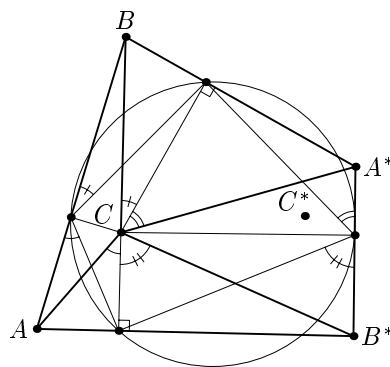


Рис. 11.

того, что проекции точки C на стороны четырехугольника лежат на одной окружности, а сумма углов противоположных вершин вписанного четырехугольника равна развернутому углу.

Опишем теперь некоторые интересные частные случаи кубики фокусов.

Если двойственный пучок содержит окружность, то кубика α имеет самопересечение в центре этой окружности (центр I окружности сопряжен сам себе, так что точки A и $f(A)$ «встречаются» в I). Если таких окружностей две, то кубика будет иметь две точки самопересечения, а это значит что она распадается на прямую и окружность (рис. 12).

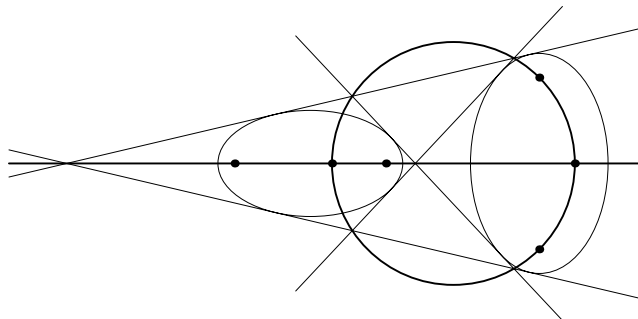


Рис. 12.

В случае, если такая окружность одна, то полученная кубика будет так называемой строфойдой — образом равносторонней гиперболы при инверсии с центром на ней [4]. А именно, пусть четыре прямые касаются нашей окружности в точках A , B , C и D . Тогда середины всех отрезков с концами в этих точках, точки пересечения прямых, проходящих через пары точек (исключая, конечно, сами точки), а также центр самой окружности лежат на равносторонней гиперболе (см. [1]). Причем ее асимптоты будут параллельны биссектрисам угла, образованного прямыми AB и CD (или любой другой аналогичной парой, что, как известно, не важно, рис. 13).

Достаточно показать, что инверсные образы этих точек относительно описанной окружности лежат на кубике фокусов, а инверсный образ точки Микеля четырех прямых лежит на нашей гиперболе. Действительно, расположим начало координат в центре инверсии. Тогда коника, проходящая через этот центр и отличная от окружности, будет задаваться уравнением $P_2(x, y) + P_1(x, y) = 0$, где P_1 , P_2 — однородные многочлены, соответственно, первой и второй степени. При инверсии относительно единичной окружности эта коника перейдет в кривую третьего порядка

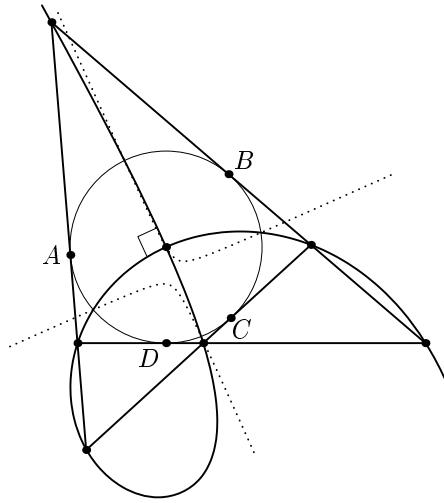


Рис. 13.

$P_2(x, y) + P_1(x, y)(x^2 + y^2) = 0$. Надо доказать, что эта кривая имеет с кубикой фокусов 10 общих точек и, следовательно, они совпадают.

Для доказательства воспользуемся леммой, которая интересна сама по себе и относится к пучкам, не обязательно содержащим окружность.

ЛЕММА 2. Пусть дан четырехсторонник, образованный прямыми l_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда проекция точки пересечения двух диагоналей на третью лежит на нашей кубике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 14. Условие, что проекции точки Q на стороны четырехугольника лежат на одной окружности, равносильно тому, что $\angle AQE = \angle CQF$. Для доказательства последнего достаточно доказать, что прямые AC , QE , QP и QF образуют гармоническую четверку.

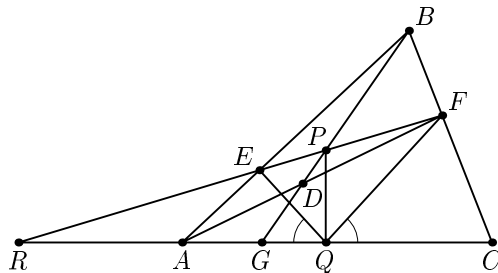


Рис. 14.

Последнее равносильно гармоничности четырех точек E, P, F, R (где R — точка пересечения EF и AC). А это равносильно гармоничности точек A, G, C, R (G — точка пересечения AC и BP). Это хорошо известный факт, который легко получить, записав теорему Чевы для треугольника ABC и точки D , а также теорему Менелая для треугольника ABC и прямой EF .

Вернемся теперь к инверсному образу гиперболы. Легко понять, что именно в точки, указанные в лемме, перейдут точки пересечения диагоналей при инверсии. Середины отрезков переходят в точки пересечения касательных в их концах. Так мы уже нашли 9 точек. Осталось разобраться с образом точки Микеля, которая, как было сказано выше, лежит на кубике фокусов (см. вывод уравнения кубики).

Рассмотрим окружности, описанные вокруг четырех треугольников четырехсторонника, образованного касательными в точках A, B, C и D , которые пересекаются в точке Микеля. Образы этих окружностей при инверсии перейдут в окружности девяти точек треугольников ABC, ABD, ACD и BCD . Заметим, что серединный треугольник треугольника ABC при симметрии относительно центра тяжести $ABCD$ переходит в треугольник, образованный серединами отрезков DA, DB, DC , описанная окружность которого проходит через центр окружности $ABCD$. Следовательно, все четыре окружности девяти точек проходят через точку, симметричную центру окружности относительно центра тяжести четырехугольника $ABCD$. Этот центр тяжести является центром рассматриваемой равносторонней гиперболы, так делит пополам более одной ее хорды. А значит, общая точка окружностей, являющаяся образом точки Микеля, лежит на гиперболе.

Как следствие, можно отметить, что касательные к кубике фокусов в центре окружности двойственного пучка перпендикулярны. Действительно, касательные к строфоиде в двойной точке являются полярами относительно окружности бесконечно удаленных точек гиперболы. Так как гипербола равносторонняя, эти поляры перпендикулярны.

ИЗОГОНАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Рассмотрим теперь пятиугольник. Известно, что существует единственная коника, касающаяся его сторон. Фокусы этой коники образуют единственную пару изогонально сопряженных относительно пятиугольника точек. Если вписанная коника — окружность, эти точки совпадают. Если обе точки конечны, то их проекции на стороны пятиугольника лежат на одной окружности. Если же одна из точек бесконечно удаленная,

т. е. вписанная коника — парабола, то проекции фокуса этой параболы на стороны лежат на одной прямой.

Для многоугольника с числом сторон, большим 5, изогонально сопряженных точек в общем случае не существует. Исключением является многоугольник, стороны которого касаются некоторой коники. Для такого многоугольника, как и для пятиугольника, существует единственная пара изогонально сопряженных точек — фокусы вписанной коники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акопян А. В., Заславский А. А. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. В печати.
- [2] Берже М. *Геометрия*. М.: Мир, 1984.
- [3] Заславский А. А. *Геометрические преобразования*. М.: МЦНМО, 2003.
- [4] Руинский А. *Инверсии равносторонней гиперболы* // Математическое просвещение. Третья Серия. Вып. 4. 2000. С. 120–126.
- [5] Уокер Р. *Алгебраические кривые*. ИЛ, 1952.

Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

М. Б. Скопенков*

Цель данной статьи — подробно познакомить читателей с красивой идеей академика В. И. Арнольда о связи теоремы о высотах треугольника с тождеством Якоби [1]. Основное отличие нашей статьи от статьи В. И. Арнольда в том, что мы имеем дело в основном со сферической геометрией, а не с геометрией Лобачевского, и это делает основную идею более понятной. В частности, большая часть нашей статьи доступна школьнику-старшекласснику. При этом нужно иметь в виду, что можно единообразно доказать теорему о высотах в сферической геометрии и в геометрии Лобачевского.

Мы расскажем о двух интересных применениях идеи В. И. Арнольда — двух обобщениях теоремы о высотах треугольника.

Первый результат — это обобщение теоремы о высотах на криволинейные треугольники. *Криволинейным треугольником* мы называем фигуру, составленную из трех дуг окружностей a , b и c (рис. 1а). *Высотой* h_a криволинейного треугольника мы называем окружность, проходящую через обе точки пересечения окружностей b и c , перпендикулярную окружности a (смотри рисунок 1б). Аналогично определяются две другие высоты h_b и h_c . (Мы исключаем из рассмотрения криволинейные треугольники с двумя прямыми углами.)

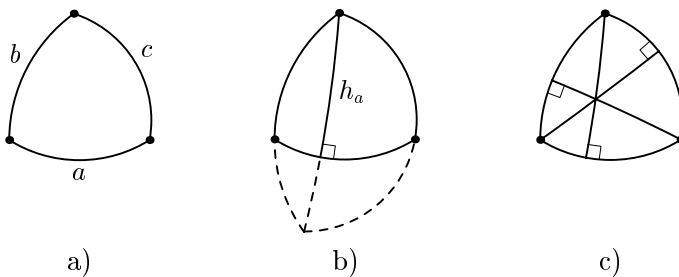


Рис. 1.

* Автор частично поддержан грантами РФФИ №05-01-00993 и №06-01-72551.

ТЕОРЕМА О ВЫСОТАХ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА¹⁾. Если две высоты криволинейного треугольника пересекаются в некоторой точке, то и третья высота проходит через эту точку (см. рис. 1с).

Эта теорема переходит в классическую теорему о высотах треугольника, если радиусы окружностей a , b и c увеличивать неограниченно.

Второй результат — это обобщение теоремы о высотах на случай трехмерного пространства:

ТЕОРЕМА ПЕТЕРСЕНА – МОРЛИ. Пусть a , b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c . Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c'' . Тогда три прямые a'' , b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т. е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

Эта теорема превращается в теорему о высотах треугольника, если прямые a , b и c лежат в одной плоскости. Теорема Петерсена – Морли — трудная теорема стереометрии, и одна из наших основных целей — рассказать ее доказательство.

Идея В. И. Арнольда наиболее явно проявляется в сферической геометрии, поэтому мы начнем со знакомства с *геометрией на сфере*.

Не следует думать, что геометрия на сфере сложнее геометрии на плоскости. Напротив, оказывается, во многом эта геометрия устроена проще! Многие известные теоремы, например, теоремы синусов и косинусов, были открыты в сферической геометрии раньше, чем в планиметрии (поскольку они были необходимы для приложений в астрономии).

СЮЖЕТ ПЕРВЫЙ. СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (сферической *прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O .

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность.

¹⁾Эта элегантная формулировка теоремы о высотах треугольника в неевклидовой геометрии была найдена участником Летней конференции Турнира Городов А. Мафусаловым.

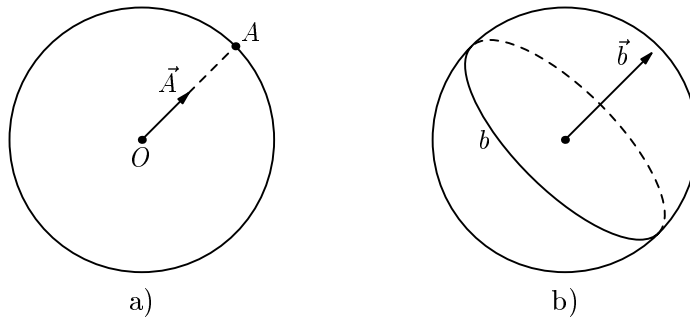


Рис. 2.

А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 2а), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 2б).

Будем обозначать точки на сфере большими буквами, сферические прямые — маленькими. Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Например, если \vec{A} и \vec{b} — два вектора, то A обозначает точку, соответствующую вектору \vec{A} , а b обозначает сферическую прямую, соответствующую вектору \vec{b} .

Исследуем простейшие свойства построенных соответствий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (Рисунок 3а) Если векторы \vec{A} и \vec{b} перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, проведем из точки O луч в направлении вектора \vec{A} . По нашему определению, точка A — точка пересечения нашего луча со сферой. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную вектору \vec{b} . По нашему определению, сферическая прямая b — сечение сферы нашей плоскостью. Поскольку \vec{A} и \vec{b} перпендикулярны, то построенный луч лежит в нашей плоскости. Поэтому точка A лежит на сферической прямой b , что и требовалось.

Будем обозначать через $[\vec{A}, \vec{B}]$ векторное произведение двух векторов \vec{A} и \vec{B} . Напомним, что *векторное произведение* двух векторов \vec{A} и \vec{B} — это вектор, перпендикулярный данным векторам и равный по модулю площади натянутого на них параллелограмма. Направление этого вектора определяется правилом правой руки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. (Рисунок 3б) Вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B .

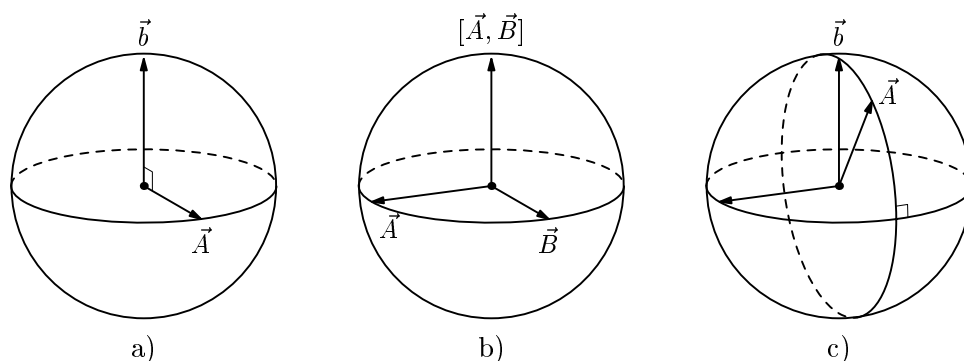


Рис. 3.

Действительно, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ перпендикулярен обоим векторам \vec{A} и \vec{B} . Поэтому согласно утверждению 1 обе точки A и B лежат на сферической прямой, соответствующей вектору $[\vec{A}, \vec{B}]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. (Рисунок 3с) Вектор $[\vec{A}, \vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b .

Действительно, пусть вектору $[\vec{A}, \vec{b}]$ соответствует сферическая прямая c . Поскольку этот вектор перпендикулярен вектору \vec{A} , то согласно утверждению 1 сферическая прямая c проходит через точку A . А поскольку он перпендикулярен \vec{b} , то сферическая прямая c перпендикулярна сферической прямой b . Иными словами, c — перпендикуляр, опущенный из точки A на сферическую прямую b .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. (Рисунок 4) Если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то три сферические прямые a , b и c пересекаются в одной точке.

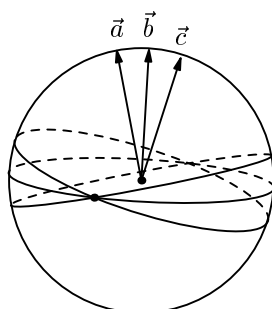


Рис. 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ следует, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} параллельны некоторой плоскости. Рассмотрим вектор \vec{P} , перпендикулярный этой плоскости. Применяя утверждение 1, получим, что точка P лежит на всех трех сферических прямых a , b и c .

Теперь мы готовы к выводу более содержательных результатов. Для любых трех векторов трехмерного пространства выполняется *тождество Якоби*:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] + [\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]] + [\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]] = 0.$$

Это тождество позволяет без всяких усилий получить следующую неочевидную теорему:

ТЕОРЕМА 5. Высоты треугольника на сфере пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} — три вектора, соответствующие вершинам треугольника на сфере. Согласно утверждению 2 вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B . Тогда согласно утверждению 3 вектор $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]]$ соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую BC , т. е. сферической прямой, содержащей высоту h_A треугольника ABC . Аналогично векторы $[\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]]$ и $[\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]]$ соответствуют сферическим прямым, содержащим две другие высоты треугольника ABC . Поэтому тождество Якоби, ввиду утверждения 4, означает, что построенные три прямые пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Пользуясь этим методом, геометрические теоремы можно буквально «считывать» с алгебраических тождеств — в конце статьи мы приводим несколько задач на эту тему.

Легко видеть, что теорема 5 является частным случаем теоремы о высотах криволинейного треугольника (на сфере). Ее можно доказать и проще: при центральной проекции из центра сферы на плоскость, касающуюся сферы в одной из вершин треугольника, теорема 5 переходит в обычную теорему о высотах.

Тождество Якоби позволяет также доказать следующее ослабление теоремы Петерсена – Морли: *прямые a'' , b'' и c'' параллельны одной плоскости*. Для доказательства достаточно записать тождество Якоби для векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , параллельных исходным прямым a , b и c .

Вот еще одно элементарное применение тождества Якоби: для любых четырех точек O , A , B и C на плоскости выполняется равенство $\vec{OA} \cdot S(\triangle BOC) + \vec{OB} \cdot S(\triangle COA) + \vec{OC} \cdot S(\triangle AOB) = 0$.

О применении тождества Якоби в теории узлов можно прочесть в [4].

Следующие два сюжета не опираются друг на друга и их можно читать независимо. Сюжет второй посвящен доказательству теоремы о

высотах криволинейного треугольника, а сюжет третий — доказательству теоремы Петерсена – Морли.

СЮЖЕТ ВТОРОЙ. ОКРУЖНОСТИ

Назовем *окружностью* сечение сферы произвольной плоскостью, не обязательно проходящей через центр сферы. Точка на сфере и сферическая прямая — частные случаи окружности.

Окружность на сфере можно задать уравнением

$$(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha,$$

где \vec{A} — фиксированный вектор, α — фиксированное число, а \vec{X} — радиус-вектор переменной точки на сфере. Это уравнение задает сечение сферы плоскостью, перпендикулярной вектору \vec{A} и находящейся на расстоянии $\alpha/|\vec{A}|$ от начала координат.

В частности, если $\alpha = 0$, то наша окружность является большой окружностью сферы, а если $\alpha = |\vec{A}|$, то она вырождается в точку.

Следующее свойство уравнений окружностей почти очевидно:

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ пересекаются, то окружность $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$ проходит через обе их точки пересечения.

Действительно, пусть \vec{X} — радиус-вектор одной из точек пересечения первых двух окружностей. Тогда по определению $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$. Складывая эти равенства, получим $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$, то есть третья окружность тоже проходит через точку X .

На языке наших уравнений легко выразить также условие перпендикулярности двух окружностей:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны. Пусть \vec{X} — радиус-вектор одной из точек пересечения этих окружностей. Тогда векторы $[\vec{A}, \vec{X}]$ и $[\vec{X}, \vec{B}]$ параллельны касательным к окружностям A и B в этой точке. Рассмотрим тождество

$$([\vec{A}, \vec{X}], [\vec{X}, \vec{B}]) = (\vec{A}, \vec{X})(\vec{B}, \vec{X}) - (\vec{A}, \vec{B})(\vec{X}, \vec{X}).$$

Его левая часть равна нулю в силу перпендикулярности окружностей A и B , а правая часть в точности равна $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$. Тем самым в одну сторону нужное утверждение доказано. Обратное утверждение доказывается от противного.

Это утверждение является мотивировкой для следующего определения.

Рассмотрим множество пар вида $(\alpha; \vec{A})$, где α — действительное число, а \vec{A} — вектор трехмерного пространства. Скалярным произведением двух таких пар $\mathcal{A} = (\alpha; \vec{A})$ и $\mathcal{B} = (\beta; \vec{B})$ назовем число $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$.

Определим сложение пар и умножение пары на число покомпонентно: $\mathcal{A} + \mathcal{B} := (\alpha + \beta; \vec{A} + \vec{B})$, $\lambda\mathcal{A} := (\lambda\alpha; \lambda\vec{A})$.

Будем обозначать окружность, задаваемую уравнением $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$, той же буквой, что и саму пару $(\alpha; \vec{A})$.

Оказывается, введенных операций достаточно, чтобы получить уравнение высоты криволинейного треугольника исходя из уравнений его сторон:

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пары $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ соответствует высота h_A криволинейного треугольника, составленного из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пара $\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является линейной комбинацией пар \mathcal{B} и \mathcal{C} , то согласно утверждению 6 соответствующая ей окружность \mathcal{H} проходит через обе точки пересечения окружностей \mathcal{B} и \mathcal{C} . А поскольку

$$(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = (\mathcal{B}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - (\mathcal{C}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0,$$

то согласно утверждению 7 окружность \mathcal{H} перпендикулярна окружности \mathcal{A} . То есть, по определению, \mathcal{H} — высота сферического треугольника, составленного из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} .

В случае, когда \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} — большие окружности сферы, это утверждение согласуется с формулой из предыдущего сюжета, ввиду замечательного тождества $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$.

Теперь мы готовы доказать теорему о высотах криволинейного треугольника на сфере. Действительно, пусть наш треугольник составлен из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} , не обязательно больших. Согласно утверждению 8 паре $\mathcal{H}_A = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и двум аналогично определяемым парам \mathcal{H}_B и \mathcal{H}_C соответствуют высоты этого треугольника. Предположим, что \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B пересекаются. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{H}_C = -\mathcal{H}_A - \mathcal{H}_B$, поэтому ввиду утверждения 6 высота \mathcal{H}_C проходит через точку пересечения высот \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B , что и требовалось.

Теорема о высотах криволинейного треугольника на плоскости легко сводится к теореме о высотах криволинейного треугольника на сфере, если радиус сферы увеличивать неограниченно.

Определенный нами объект (множество пар с операциями сложения, умножения на число и скалярного произведения) называется пространством Минковского и играет фундаментальную роль в теории относительности [2].

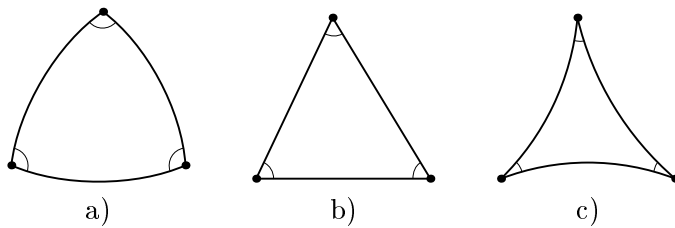


Рис. 5.

В действительности для доказательства теоремы о высотах криволинейного треугольника достаточно результатов только первого сюжета.

А именно, рассмотрим следующие 3 случая:

СЛУЧАЙ 1. Сумма углов криволинейного треугольника больше 2π (рисунок 5а). В этом случае наша теорема сводится к теореме 5. Для этого нужно сделать стереографическую проекцию на сферу подходящего радиуса, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей a , b и c .

СЛУЧАЙ 2. Сумма углов криволинейного треугольника равна 2π (рисунок 5б). Легко видеть, что тогда окружности a , b и c пересекаются в одной точке. Наша теорема сводится к обычной теореме о высотах с помощью инверсии с центром в этой точке.

СЛУЧАЙ 3. Сумма углов криволинейного треугольника меньше 2π (рисунок 5в). Тогда существует окружность d , перпендикулярная всем трем окружностям a , b и c . Наша теорема есть в точности теорема о высотах в геометрии Лобачевского, сформулированная в модели Пуанкаре (в которой d — абсолют). Теорему о высотах в геометрии Лобачевского можно получить аналогично первому сюжету, исходя из тождества Якоби для векторного произведения $[\vec{A}, \vec{B}] := *(\vec{A} \wedge \vec{B})$ в псевдоевклидовом пространстве [1].

СЮЖЕТ ТРЕТИЙ. ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u, x] = v.$$

Здесь u и v — фиксированные векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Вектор u для данной прямой имеет простой геометрический смысл — это направляющий вектор данной прямой. Отсюда, в частности, следует, что если прямая $[u, x] = v$ перпендикулярна прямой $[u', x] = v'$, то $(u, u') = 0$.

Оказывается, условие пересечения прямых тоже легко можно выразить на языке их уравнений:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u, v') + (v, u') = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение в одну сторону. Пусть наши прямые пересекаются в некоторой точке с радиус-вектором x . Тогда $(u, v') + (v, u') = (u, [u', x]) + ([u, x], u') = 0$ в силу известного тождества.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть $(u, v') + (v, u') = 0$. Выберем произвольную точку x на первой прямой и точку x' на второй. Тогда $(u, v') + (v, u') = (u, [u', x']) + ([u, x], u') = (u, [u', x' - x])$ в силу все того же тождества. Значит, $(u, [u', x' - x]) = 0$. Это означает, что $x' - x = \lambda u + \lambda' u'$ для некоторых чисел λ и λ' . Тогда $x + \lambda u = x' - \lambda' u'$ — искомая точка пересечения наших прямых.

Наша основная цель — понять, как исходя из уравнений двух прямых получить уравнение их общего перпендикуляра. Иными словами, нам нужно найти такие векторы u'' и v'' , чтобы прямая $[u'', x] = v''$ пересекала прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ и была перпендикулярна им.

Ясно, что прямая с направляющим вектором $[u, u']$ перпендикулярна обоим нашим прямым. Положим $u'' = [u, u']$.

Оказывается, для вектора v'' тоже есть простая формула. В качестве вектора v'' нужно взять проекцию вектора $[u, v'] + [v, u']$ на плоскость, перпендикулярную вектору u'' . То, что прямая $[u'', x] = v''$ пересекает прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$, проверяется с помощью утверждения 9.

Эта формула является мотивировкой для следующего определения.

Пусть $(u; v)$ и $(u'; v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u''; v'')$, где $u'' = [u, u']$ и $v'' = [u, v'] + [v, u']$.

Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u; v) + (u'; v') = (u + u'; v + v')$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одной из геометрических интерпретаций таких пар являются *скользящие векторы* [3].

Мы имеем естественное отображение из множества пар векторов в множество прямых в пространстве: паре $(u; v)$ ставится в соответствие прямая $[u, x] = \text{pr } v$, где $\text{pr } v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u . Фактически мы показали, что это отображение переводит произведение в общий перпендикуляр (строго говоря, только в случае, если $u \perp v$ и $u' \perp v'$, но к нему все сводится — при замене $v \rightarrow v + \lambda u$, $v' \rightarrow v' + \lambda' u'$ происходит замена $v'' \rightarrow v'' + (\lambda + \lambda')u$).

Приведем одно простое применение нашего соответствия: прямая $[u + u', x] = v + v'$ пересекает общий перпендикуляр к прямым $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ (проверяется с помощью утверждения 9).

С помощью нашего соответствия получается также теорема Петерсена – Морли. Действительно, произведение пар векторов удовлетворяет

тождеству Якоби. Если посмотреть, что оно означает геометрически, получим теорему Петерсена – Морли.

Это доказательство можно пересказать на более научном языке. Дело в том, что тот объект, который мы определили (пары векторов с операцией умножения) — это в действительности алгебра Ли группы движений трехмерного пространства. По теореме Шаля любое собственное движение трехмерного пространства — это винтовое движение вдоль некоторой прямой либо параллельный перенос. Сопоставим каждому бесконечно малому движению, то есть элементу алгебры Ли группы движений трехмерного пространства, такую прямую. Ключевой факт: коммутатор при таком соответствии переходит в общий перпендикуляр. Это следует из того, что прямая, соответствующая коммутатору, должна быть неподвижна при любой симметрии, меняющей местами прямые, соответствующие исходным элементам. Теперь теорема Петерсена – Морли непосредственно получается из тождества Якоби.

В таком виде доказательство проходит без существенных изменений и для пространства Лобачевского — теорема Петерсена – Морли оказывается справедливой и в неевклидовом пространстве [5].

ЗАДАЧИ

Во всех задачах предполагается, что \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} — единичные векторы, идущие в вершины сферического треугольника ABC из центра сферы. Через AB , BC и CA обозначаются длины сторон треугольника, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей.

1. Рассматривая вектор $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, докажите, что медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.
2. С помощью тождества $([\vec{A}, \vec{B}], [\vec{B}, \vec{C}]) = (\vec{A}, \vec{B})(\vec{B}, \vec{C}) - (\vec{A}, \vec{C})(\vec{B}, \vec{B})$ получите сферическую теорему косинусов:

$$\sin AB \sin BC \cos \angle ABC = \cos AB \cos BC - \cos AC.$$

3. С помощью тождества $([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}) = ([\vec{B}, \vec{C}], \vec{A}) = ([\vec{C}, \vec{A}], \vec{B})$ докажите сферическую теорему синусов:

$$\frac{\sin AB}{\sin \angle ACB} = \frac{\sin BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sin CA}{\sin \angle CBA}.$$

4. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисах криволинейного треугольника на плоскости.

БЛАГОДАРНОСТИ. Автор благодарен В. Прасолову за помощь в подготовке данной статьи, В. Арнольду за важные замечания, В. Дремову, которому принадлежит множество ценных идей, реализованных в данном цикле задач, а также А. Канелю, О. Карпенкову, И. Лосеву и А. Скопенкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. *Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости* // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 93–99.
- [2] Берже М. *Геометрия*. М: Мир, 1984.
- [3] Соловьев Ю. П., Сосинский А. Б. *Геометрия скользящих векторов* // Квант №8, 1985. С. 9–17.
- [4] Conant J., Schneiderman R., Teichner P. *Jacobi identities in low-dimensional topology*. To appear in *Compositio Mathematica*, 2007.
- [5] Fenchel W. *Elementary geometry in hyperbolic space*. WdeG, 1989.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

А. К. Звонкин. **Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников.** 2006. 240 с.

Автор этой книги — профессиональный математик — рассказывает о своем опыте занятий математикой с дошкольниками. Жанр книги смешанный: дневниковые записи перемежаются рассуждениями о математике или о психологии, наблюдения за детьми и за их реакцией на происходящее служат источником для новых задач, а те в свою очередь позволяют углубить и развить как бы намеченные пунктиром идеи. Книга будет интересна родителям дошкольников (а также их бабушкам и дедушкам), воспитателям детских садов, учителям начальных классов, и вообще всем тем, кого интересует процесс развития детского интеллекта.

А. М. Райгородский. **Проблема Борсука.** Б-ка «Математическое просвещение», вып. 33. 2006. 56 с.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной на Малом мехмате МГУ для школьников 9–11 классов. В ней рассказывается об одной из знаменитых задач комбинаторной геометрии — гипотезе Борсука. Многие главы снабжены задачами. Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. От читателя потребуются знание элементарных понятий комбинаторики, а, кроме того, будет полезным (но не обязательным) знакомство с аналитической геометрией и началами анализа.

В. А. Успенский. **Четыре алгоритмических лица случайности.** 2006. 48 с.

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором в летней школе «Современная математика». Она посвящена формализации такого интуитивно ясного термина, как «случайность». В брошюре рассматриваются четыре разных подхода к этому понятию, основанных на характерных свойствах случайных последовательностей: частотоустойчивость, хаотичность, типичность и непредсказуемость. Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов. Предварительных знаний от читателя не потребуется, однако будет полезным знакомство с теорией алгоритмов, а для чтения последней главы — с основными понятиями теории вероятностей.

А. Г. Хованский. **Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности.** 2006. 96 с.

В брошюре изложена теория Галуа и ее применения к вопросам о разрешимости алгебраических уравнений. Рассматривается аналогия между основной теоремой теории Галуа и классификацией накрытий над топологическими пространствами. В последней части приведено геометрическое описание конечных алгебраических расширений поля мероморфных функций на римановых поверхностях. Для студентов, аспирантов и специалистов в области математики.

А. Шень. **О «математической строгости» и школьном курсе математики.** 2006. 72 с.

Математики традиционно (и не без оснований) гордятся «математической строгостью» — точностью и полнотой доказательств теорем на основе определений и аксиом. Насколько этот идеал достигнут в школьном курсе математики? Можно ли его достигнуть? И нужно ли к этому стремиться? В брошюре разбираются несколько деликатных вопросов школьного курса математики (в чём проблема, как ее пытаются решить в школьных учебниках и как ее можно было бы решать). Изложение рассчитано на любознательных школьников, квалифицированных учителей и добросовестных экзаменаторов.

Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта*

С. Б. Гашков

Пусть M_n — выпуклый n -угольник, p_n — его периметр, d_n — диаметр, b_n — ширина, R_n — минимальный радиус содержащего его круга (радиус Юнга), r_n — максимальный радиус лежащего в нем круга (радиус Бляшке), s_n — квадратный корень из его площади. Определения диаметра, ширины и обоих радиусов можно найти, например в [1], [2]. Справедливы следующие неравенства (индекс n опускаем), некоторые из которых также можно найти в [1], [2].

	r	R	b	d	s	p
r		$\frac{r}{R} > 0$	$\frac{r}{b} \geq \frac{1}{3}$	$\frac{r}{d} > 0$	$\frac{r}{s} > 0$	$\frac{r}{p} > 0$
R	$\frac{r}{R} \leq \cos \frac{\pi}{n}$		$\frac{b}{R} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}$	$\frac{d}{R} \leq 2$	$\frac{s}{R} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}}$	$\frac{p}{R} > 4$
b	$\frac{b}{r} \geq 2$	$\frac{b}{R} \geq 0$		$\frac{b}{d} > 0$	$\frac{b}{s} > 0$	$\frac{b}{p} > 0$
d	$\frac{r}{d} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$	$\frac{R}{d} \leq \sqrt{3}$	$\frac{b}{d} \leq \cos \frac{\pi}{2n}$		$\frac{s}{d} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}$	$\frac{p}{d} \leq 2n \sin \frac{\pi}{2n}$
s	$\frac{s}{r} \geq \sqrt{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$	$\frac{s}{R} > 0$	$\frac{b}{s} \leq 3^{1/4}$	$\frac{s}{d} > 0$		$\frac{s}{p} > 0$
p	$\frac{p}{r} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{R} \leq 2n \sin \frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{b} \geq 2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$	$\frac{p}{d} > 2$	$\frac{p}{s} \geq 2 \sqrt{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$	

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 05-01-0099, УР.04.02.528

Правое неравенство следующей теоремы было доказано в 1922 г. К. Рейнхардтом [3]. Здесь приводится более простое доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть p периметр, b ширина и d диаметр выпуклого n -угольника M . Тогда справедливы неравенства

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leq p \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Каждое из неравенств точное, если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M^* — симметризация Минковского n -угольника M , т. е.

$$M^* = \frac{1}{2}(M + (-M)) = \{(x - y)/2 : x, y \in M\}$$

(все необходимые свойства этой операции можно найти в [2]). Тогда M^* есть центрально-симметричный выпуклый $2m$ -угольник, где $m \leq n$, с теми же периметром, диаметром и шириной, что и у M . Из центральной симметричности M^* следует, что его внутренний радиус $r^* = b/2$ и внешний радиус $R^* = d/2$. Из неравенства

$$2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq p \leq 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

следует, что последовательность $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ строго монотонно убывает, а последовательность $n \sin \frac{\pi}{n}$ строго монотонно возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} &\leq \\ &\leq 2mb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} = 4mr^* \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} \leq p \leq 4mR^* \sin \frac{\pi}{2m} = 2md \sin \frac{\pi}{2m} \leq \\ &\leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

причем равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$, $p = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$ лишь тогда справедливы, когда M^* есть правильный $2n$ -угольник.

Очевидно, для правильного n -угольника при нечетном n справедливы равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$, а при четном n ни одно из них не верно. Однако при четном n , не равном степени двойки, указанные равенства могут достигаться.

Примеры n -угольников, для которых они достигаются, можно построить следующим образом. Представим n произвольным образом в виде $m(2k + 1)$. Очевидно, что если $n = 2^s n_0$, где n_0 — нечетно, то число представлений в виде $n = m(2k + 1)$ будет равно $\tau(n_0)$ — числу всех различных делителей числа n_0 . Возьмем правильный $(2k + 1)$ -угольник с диаметром (наибольшей диагональю) d и с центром в каждой его вершине построим круг радиуса d . Очевидно, он будет проходить через

концы противоположащей к данной вершине стороны $(2k + 1)$ -угольника, которая будет его хордой, отсекающей от него сегмент, соприкасающийся извне с $(2k + 1)$ -угольником по этой стороне. Рассмотрим выпуклую фигуру, являющуюся пересечением построенных кругов. Очевидно, она будет получаться объединением $(2k + 1)$ -угольника с указанными сегментами. Назовем ее правильным $(2k + 1)$ -угольником Рело. Диаметр этой фигуры по-прежнему будет d , а периметр будет равен сумме дуг построенных кругов, т. е. πd , так как сложив эти дуги вместе, получим половину окружности радиуса d . Ширина этой фигуры во всех направлениях одинакова и равна d . Поэтому данная фигура является примером фигуры постоянной ширины. Впишем в нее n -угольник с равными сторонами так, чтобы среди его вершин содержались все вершины рассматриваемого $(2k + 1)$ -угольника. Очевидно каждая из $2k + 1$ упомянутых дуг при этом будет разбиваться на m равных дужек, хорды которых будут сторонами рассматриваемого n -угольника. Диаметр его будет очевидно d , а ширина равна $b = d \cos(\pi/2n)$ — высоте равнобедренного треугольника с ребром d и углом при вершине π/n . Тогда периметр, очевидно, равен $2nd \sin(\pi/2n) = 2b \operatorname{tg}(\pi/2n)$.

Следующая теорема была доказана в 1922 г. К. Рейнхардтом [3]. Здесь приводится более простое доказательство.

ТЕОРЕМА 2. Пусть p периметр, s^2 площадь и d диаметр выпуклого n -угольника M . Тогда справедливо неравенство

$$\frac{s}{d} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}},$$

которое обращается в равенство только для правильных нечетноугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств

$$\frac{p}{s} \geq 2 \sqrt{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}, \quad p \leq 2nd \sin \frac{\pi}{2n}$$

следует неравенство

$$\frac{s}{d} \leq \sqrt{\frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}},$$

которое, очевидно, обращается в равенство только когда оба неравенства обращаются в равенства. Но для второго из них это верно только в случае правильного n -угольника, а для первого из них в этом случае равенство возможно, лишь когда n нечетно.

В следующей теореме более подробно рассматривается случай обращения неравенств теоремы 1 в равенства.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $R(n)$ есть наибольшее число попарно не подобных n -угольников Рейнхардта, т. е. таких, что выполнены равенства

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} = p = 2nd \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Тогда

$$(i) \quad R(n) = 0 \iff n = 2^k, \quad k \in \mathbb{N};$$

для любого $n \in \mathbb{N}$

$$(ii) \quad \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \leq R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m|n} 2^{n/m} \varphi(m);$$

для $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число,

$$(iii) \quad \begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{2 \nmid m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) = \\ &= \frac{1}{2n} (2^{n/p} p + 2^{n/p^2} p(p-1) + \dots + 2^{n/p^k} p^{k-1} (p-1)) \sim 2^{n/p} p / 2n; \end{aligned}$$

$$(iv) \quad R(n) = 1 \iff n = p \text{ или } n = 2p, \quad p > 2, \quad p - \text{простое.}$$

Здесь $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $m | n$ — обозначение для отношения делимости натуральных чисел (определения см., например, в [4]).

Пункт (iv) дает следующую геометрическую характеристику простых чисел: нечетное число n является простым, если и только если $R(n) = 1$, т. е. если существует единственный n -угольник Рейнхардта. Аналогично получается и вторая характеристика: нечетное число n является простым если и только если $R(2n) = 1$, т. е. если существует единственный $2n$ -угольник Рейнхардта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M такой n -угольник, что M^* — правильный $2n$ -угольник. Ориентируем все стороны многоугольника M^* в одном направлении и сопоставим им вектора, изображающие комплексные корни $2n$ -й степени из единицы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{2n-1}$, где $\varepsilon = \exp \frac{i\pi}{n}$. Ясно, что $-\varepsilon^j = \varepsilon^{n+j}$. Тогда сторонам n -угольника M однозначно сопоставляется n -элементное множество, также обозначаемое M , лежащее в группе корней из единицы $W_{2n} = \{1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{2n-1}\}$. Если расположить векторы этого множества в определенном порядке так, чтобы начало очередного вектора совпало с концом предыдущего, то они будут ограничивать n -угольник, подобный n -угольнику M . Если расположить векторы аналогичным

образом, но в противоположном порядке, получится многоугольник, симметричный предыдущему относительно некоторой прямой. Естественно, центрально-симметричному многоугольнику $(-M)$ соответствует множество $(-M)$ такое, что $M \cap (-M) = \emptyset$. Ясно, что условия $M \cap (-M) = \emptyset$ и $M \cup (-M) = W_{2n}$ равносильны. Они равносильны также тому, что в каждой паре противоположных векторов $\{\varepsilon^j, -\varepsilon^j\}$ один принадлежит M , а другой принадлежит $-M$. Также очевидно, что

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0,$$

так как сумма векторов, в которые превращаются ориентированные в одном направлении стороны многоугольника, равна нулю. Расположение векторов в любом другом порядке, хотя и имеет всегда сумму, равную нулю, приводит к невыпуклому или самопересекающемуся многоугольнику.

Обозначим через A_n множество

$$\{M : M \subset W_{2n}, |M| = n, M \cap (-M) = \emptyset\}$$

(здесь и далее $|M|$ обозначает число элементов множества M).

Так как из каждой пары $\{\varepsilon^j, -\varepsilon^j\}$ только один элемент принадлежит M , то $|A_n|$ равно 2^n . Обозначим через A_n^* подмножество A_n , состоящее из таких множеств M , для которых сумма входящих в них векторов равна нулю. Обозначим $A_{n,m}$ подмножество

$$\{M : M \in A_n, |\text{Aut } M| = m\},$$

где группа $\text{Aut } M = \{w : w \in W_{2n}, M = Mw\}$. С геометрической точки зрения $\text{Aut } M$ есть группа вращений, переводящих множество M в себя. Если $|\text{Aut } M| = m$, то $m \mid 2n$ и эта группа

$$\text{Aut } M = \{1, \varepsilon^{2n/m}, \varepsilon^{4n/m}, \dots, \varepsilon^{2n-2n/m}\},$$

т. е. состоит из поворотов на углы $2k\pi n/m$, $k = 0, \dots, m-1$ (поворот на нулевой угол — это тождественное преобразование). Так как множество $M \in A_{n,m}$, $m > 1$ переходит в себя при нетривиальном повороте вокруг начала координат, то сумма его векторов равна нулю, иначе бы она изменялась при этом повороте. Алгебраическое доказательство этого также умещается в несколько строк. Действительно, если $M \in A_{n,m}$, $m > 1$, $x \in \text{Aut } M$, $x \neq 1$, тогда

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = \sum_{x\varepsilon^j \in M} x\varepsilon^j = x \sum_{x\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = x \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j,$$

следовательно

$$(1-x) \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0, \quad \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0,$$

поэтому

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0$$

и $M \in A_n^*$. Значит $A_{n,m}$ содержится в A_n^* , т. е. $A_{n,m}$ можно было определить равенством

$$\{M : M \in A_n^*, |\text{Aut } M| = m\}.$$

Если m четное число, то $-1 = \varepsilon^{(2n/m)(m/2)} \in \text{Aut } M$, т. е. указанная группа содержит поворот на 180 градусов (центральную симметрию), поэтому в этом случае $-M = M$. Но по условию это невозможно, так как $M \cap (-M) = \emptyset$ для $M \in A_{n,m}$, следовательно $A_{n,m} = \emptyset$ при четных m .

Если же m нечетно, делит n и $M \in A_{n,m}$, то рассмотрим подмножество

$$M_m = M \cap \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{\frac{2n}{m}-1}\}.$$

Ясно, что

$$|M_m| = n/m, \quad (-M)_m = \left(M_m + \frac{n}{m}\right) \bmod \frac{2n}{m}, \quad M_m \cap (-M)_m = \emptyset,$$

ведь

$$\varepsilon^{2n/m} M = M, \quad \varepsilon^{n/m} M = \varepsilon^{n/m} (\varepsilon^{2n/m})^{(m-1)/2} M = -M.$$

Удобно вместо множества

$$M_m = \{\varepsilon^{k_1}, \dots, \varepsilon^{k_{n/m}}\}$$

рассматривать множество $M_m = \{\varepsilon^{mk_1}, \dots, \varepsilon^{mk_{n/m}}\} \subset W_{2n/m}$. Тогда

$$|M_m| = n/m, \quad M_m \cap (-M)_m = \emptyset, \quad |\text{Aut } M_m| = 1,$$

ведь из условия $|\text{Aut } M_m| = k > 1$ следовало бы, что $|\text{Aut } M| = mk > m$ в противоречии с условием $M \in A_{n,m}$. Поэтому $M_m \in A_{n/m,1}$. Указанное выше отображение $M \leftrightarrow M_m$ взаимно однозначно, поэтому справедливо равенство

$$|A_{n,m}| = |A_{n/m,1}|.$$

Следовательно

$$|A_n| = \sum_{2 \nmid m|n} |A_{n,m}| = \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| = \sum_{m|n_0} |A_{n/m,1}|,$$

где n_0 максимальный нечетный делитель n , т. е. $n = n_0 2^s$, $s = 0, 1, \dots$

Если положить $f_k = |A_{kn/n_0}| = (2^k)^{n/n_0}$, $g_k = |A_{kn/n_0,1}|$, $k \in \mathbb{N}$, то для нечетных k получим, что

$$f_k = |A_{kn/n_0}| = \sum_{m|k} |A_{(kn/n_0)/m,1}| = \sum_{m|k} g_{k/m}.$$

Применяя преобразование Мёбиуса (см. [4]), имеем

$$g_k = \sum_{m|k} \mu(m) f_{k/m} = \sum_{m|k} \mu(m) (2^{k/m})^{n/n_0} = \sum_{m|k} \mu(m) 2^{kn/(mn_0)}$$

для нечетных k , следовательно

$$|A_{n,1}| = g_{n_0} = \sum_{m|n_0} 2^{n/m} \mu(m).$$

Любопытно, что если n нечетно, то

$$\frac{|A_{n,1}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m)$$

равно числу неприводимых двоичных многочленов степени n (формулу для их числа см. в [4]). Известна также связь этого числа с количеством непериодических двухцветных ожерелий из n бусинок. Произвольное двухцветное ожерелье из n бусинок назовем n/k -периодическим, если его можно разрезать на k одинаковых подвесок. Ожерелья, которые не являются k -периодическими ни при каком k , назовем непериодическими и их количество обозначим I_n (ожерелья, получающиеся друг из друга вращением в содержащей их плоскости, считаем одинаковыми). Очевидно, что число ожерелий с минимальным периодом k равно I_k . Разрезая разными способами каждое из таких ожерелий, получаем k различных двухцветных ориентированных подвесок. Общее количество подвесок, полученных из всех ожерелий, равно с одной стороны

$$\sum_{d|n} d I_d,$$

а с другой стороны равно 2^n . Поэтому по формуле Мёбиуса (см. [4])

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m).$$

Это число, очевидно, равно $|A_{n,1}|/n$ при нечетных n .

В [5, гл. 1, задача 27] доказано также, что число I_n при нечетных n равно числу подмножеств аддитивной циклической группы \mathbb{Z}_n , таких, что сумма элементов во множестве равна нулю.

Если для некоторого $w \in W_{2n}$ и двух n -элементных множеств $M_1, M \in A_n$ справедливо равенство $M_1 = Mw$ в группе W_{2n} , то эти множества назовем эквивалентными. Другими словами, два множества M и M_1 эквивалентны, если одно из них получается поворотом из другого. В частности, M и $-M$ эквивалентны. Очевидно, что если $M \in A_{n,m}$, и M_1 эквивалентно M , то $M_1 \in A_{n,m}$, поэтому множество $A_{n,m}$ распадается

на непересекающиеся классы эквивалентности. Если $M \in A_{n,m}$, то число различных множеств, которые можно получить поворотами множества M , равно $2n/m$. Значит, в каждом классе $2n/m$ множеств и поэтому число классов эквивалентности в $A_{n,m}$ равно $|A_{n,m}|m/2n$. Геометрически любое разбиение W_{2n} на пару множеств M и $-M$ можно представить в виде ожерелья из равного количества черных и белых бусинок, в котором при повороте на 180 градусов меняются цвета всех бусинок. Если $M \in A_{n,m}$, то это ожерелье будет $2n/m$ -периодическим. Эквивалентным множествам соответствуют ожерелья, получающиеся друг из друга вращениями. Если такие ожерелья считать одинаковыми, то каждому классу эквивалентности соответствует одно ожерелье и число классов эквивалентности равно числу различных ожерелий. Если множества M и M_1 эквивалентны, то соответствующие им многоугольники Рейнхардта получают друг из друга поворотами, т. е. равны. Очевидно, что не эквивалентным множествам соответствуют не равные друг другу многоугольники Рейнхардта.

Ясно, что существует множество $M \in A_{n,1}$ со свойством $\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j \neq 0$ (например, множество $\{1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$). Поэтому

$$R(n) < \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} |A_{n/m,1}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} \sum_{k|n_0/m} 2^{n/mk} \mu(k),$$

так как $n/m = 2^s n_0/m$. Меняя порядок суммирования и подставляя $k = l/m$, имеем

$$R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} = \sum_{m|l} m \mu(l/m) = \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} \varphi(l),$$

так как

$$\sum_{m|l} m \mu(l/m) = \varphi(l).$$

Так как разным ожерельям соответствуют разные n -угольники Рейнхардта, то

$$\begin{aligned} R(n) &\geq \\ &\geq \sum_{1 < m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} - \frac{|A_{n,1}|}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} (\varphi(l) - \mu(l)) = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \end{aligned}$$

и соотношения (ii) доказаны.

Заметим, что при нечетном n

$$\sum_{1 < m | n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{1 < m | n} |A_{n/m,1}| \frac{m}{2n}$$

равна половине числа всех периодических двухцветных ожерелий из n бусинок.

Пусть $n = 2^s p^k$, $s, k = 0, 1, \dots$, где p — простое число, $M \in A_n$ и

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0.$$

Подставляя $-\varepsilon^{j-n}$ вместо ε^j при $j \geq n$ в предыдущее равенство, имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \varepsilon^j = 0,$$

где $\alpha_j = \pm 1$, $j = 0, \dots, n-1$. При этом ясно, что

$$\alpha_j = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^j \in M, \quad \alpha_j = -1 \Leftrightarrow \varepsilon^j \in (-M).$$

Пусть

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^j,$$

и f_{2n} есть полином деления круга (определение и свойства см. в [4]). Тогда $P(\varepsilon) = 0$, и так как f_{2n} минимальный полином для ε , то согласно свойству минимальных полиномов он будет делителем полинома $P(x)$. Если $p = 2$, то $n = 2^l$, следовательно $f_{2n} = x^n + 1$ и поэтому $f_{2n}(x)$ не может делить $P(x)$, так как степень $P(x)$ меньше n . Следовательно, $R(n) = 0$ и равенство (i) доказано.

Рассмотрим случай $p > 2$, $n = 2^s p^k$. Для круговых полиномов известны соотношения

$$f_p(x) = 1 + x + \dots + x^{p-1}; \quad f_{2p}(x) = f_p(-x) = 1 - x + x^2 - \dots + x^{p-1};$$

$$f_n(x) = f_{p_1 \dots p_s} \left(x^{p_1^{r_1-1} \dots p_s^{r_s-1}} \right),$$

где $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$. Из них следует, что

$$f_{2n} = 1 - x^{n/p} + x^{2n/p} - \dots + x^{n(1-1/p)}, \quad n = 2^s p^k.$$

Так как

$$\frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = \sum_{j=0}^{n/p-1} a_j x^j,$$

где a_j — целые числа, то

$$P(x) = f_{2n}(x) \frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = f_{2n}(x) \sum_{j=0}^{n/p-1} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n/p-1} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k x^{\frac{n}{p}k+j}.$$

Отсюда следует, что последовательность α_j антипериодична с периодом n/p , т. е. $\alpha_{j+n/p} = -\alpha_j$, $j = 0, \dots, n-1-n/p$. Так как

$$\alpha_j = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^j \in M, \quad \alpha_j = -1 \Leftrightarrow \varepsilon^j \in (-M),$$

то

$$\varepsilon^j \in M \Leftrightarrow \varepsilon^{j+n/p} \in (-M), \quad j = 0, \dots, n-1-n/p,$$

следовательно $\varepsilon^j \in M \Leftrightarrow \varepsilon^{j+2n/p} \in M$, $j = 0, \dots, 2n-1$, ведь $\varepsilon^{j+n} = -\varepsilon^j$. Поэтому $\varepsilon^{2n/p} \in \text{Aut } M$, $|\text{Aut } M| > 1$, значит $M \notin A_{n,1}$ и множество $A_{n,1}$ пусто. Следовательно,

$$R(n) = \sum_{1 < m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m))$$

и равенство (iii) доказано. В частности, $R(n) = 1$, если $n = p$ или $n = 2p$, где $p > 2$ — простое число. Если $n = 2^s p$, $s \geq 2$, тогда согласно (iii)

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) = \frac{1}{2n} 2^{n/p} (\varphi(p) - \mu(p)) = \\ &= \frac{1}{2^{s+1}} 2^{2s} = 2^{2s-s-1} \geq 2, \end{aligned}$$

так как $2^s \geq s+2$ для $s \geq 2$.

Если $1 < p \leq \sqrt{n}$ делит n , то для $n > 4$

$$\begin{aligned} R(n) &\geq \frac{1}{2n} \sum_{2|m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) > \frac{1}{2n} 2^{n/p} (\varphi(p) - \mu(p)) = \\ &= \frac{1}{2n} 2^{n/p} (p-1+1) = \frac{p}{2n} 2^{n/p} \geq 2^{\sqrt{n}-1} / \sqrt{n} \geq 1, \end{aligned}$$

так как $2^x/x$ возрастающая функция при $x \geq 2$, и $2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$ при $n \geq 4$. Следовательно, $R(n) = 1$ только когда n простое число, и пункт (iv) доказан.

Доказанная теорема дает примеры многоугольников Рейнхардта, которые нельзя получить из правильных $(2k+1)$ -угольников Рело. Это очевидно при сравнении полученных нижних оценок для $R(n)$ и оценки $\tau(n_0)$ числа n -угольников Рейнхардта – Рело. Если n не равно ни степени двойки, ни простому, ни удвоенному простому числу, то из доказанных неравенств следует асимптотическое неравенство $2^{n/p} p / 2n \lesssim R(n)$, где p —

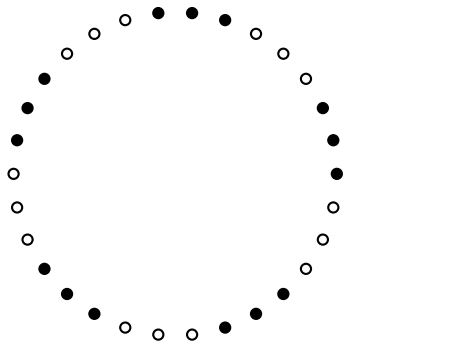


Рис. 1.

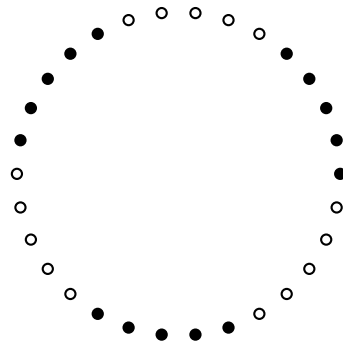


Рис. 2.

минимальный нечетный простой делитель n . Из него следует, что $\tau(n_0) \leq \leq \tau(n) \leq 2\sqrt{n} \lesssim 2\sqrt{n-1}/\sqrt{n} \lesssim R(n)$, т. е. $R(n)$ в рассматриваемых случаях растет существенно быстрее $\tau(n)$. Минимальное значение n , при котором $R(n) > \tau(n_0)$, равно 15. В этом случае

$$R(15) \geq \frac{2^5 \cdot 3 + 2^3 \cdot 5 + 2(2 \cdot 4 - 1)}{30} = 5.$$

Из 5 этих 15-угольников один правильный и еще два нам уже известны как 15-угольники Рейнхардта – Рело, один из которых строится на базе 5-угольника, а другой — на базе треугольника Рело. Покажем для примера, как описанный в доказательстве метод позволяет построить еще два многоугольника Рейнхардта с нетривиальной группой вращений. Вначале рассмотрим случай, когда эта группа содержит 15 вращений. Тогда, очевидно, существует только правильный 15-угольник Рейнхардта. Если группа содержит 5 вращений, то соответствующее множество M может иметь только вид

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^6, \varepsilon^7, \varepsilon^8, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{18}, \varepsilon^{19}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{25}, \varepsilon^{26}\}$$

и соответствует 5-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 1.

В рассматриваемом случае 15-угольник можно построить на базе пятиугольника Рело.

Если группа содержит 3 вращения, то множество M может совпадать с множеством

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{22}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}\}$$

которое соответствует 3-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 2.

В этом случае 15-угольник можно построить на базе треугольника Рело. Однако множество M можно выбрать еще двумя способами. Один

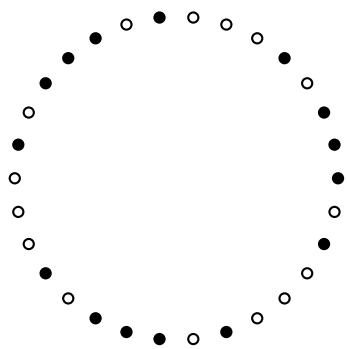


Рис. 3.

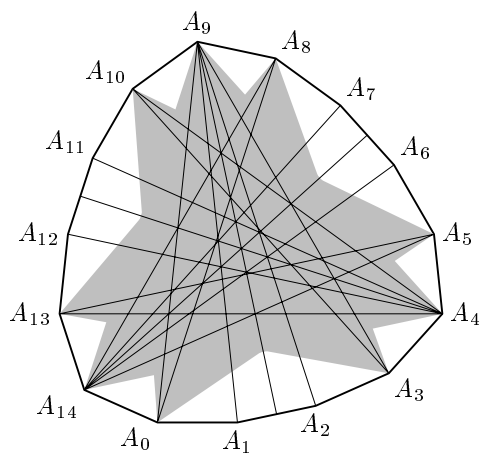


Рис. 4. 15-угольник Рейнхардта

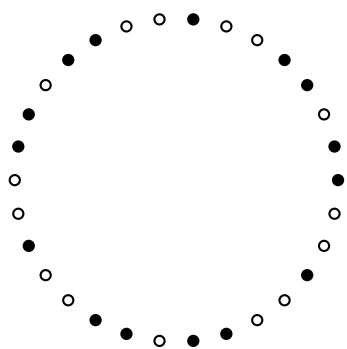


Рис. 5.

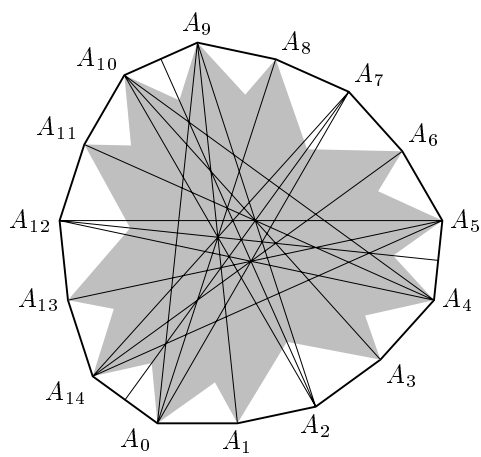


Рис. 6. Другой 15-угольник Рейнхардта

из них соответствует множеству

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{18}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{22}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{28}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 3.

Соответствующий 15-угольник Рейнхардта изображен на рис. 4.

Во втором случае в качестве M выбирается множество

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^7, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{17}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{27}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 5.

Соответствующий 15-угольник Рейнхардта изображен на рис. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. М.: Наука, 1974.
- [2] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. М.: ГИТТЛ, 1951.
- [3] Reinhardt K. *Extremal Polygone gegebenen Durchmessers // Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 31, 1922. S. 251–270.*
- [4] Кострикин А. И. *Основные структуры алгебры*. М.: Физматлит, 2000.
- [5] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. М.: Мир, 1990.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

В. О. Бугаенко. **Обобщенная теорема Ван дер Вардена.** 2006. 12 с.

Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов. Никаких предварительных знаний от читателя не требуется.

Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. **Комбинаторика.** (Совместно с издательством «ФИМА».) 2006. 400 с.

В книге в популярной форме рассказывается о комбинаторике, методах решения комбинаторных задач, о рекуррентных соотношениях и производящих функциях. Книга будет полезна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям, студентам первых курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также всем, сталкивающимся с комбинаторными задачами.

А. Ю. Зубов и др. **Олимпиады по криптографии и математике.** 2006. 136 с.

В сборник включены условия, ответы и решения пятнадцати олимпиад по криптографии и математике, проведенных в Москве с 1991 по 2005 гг. Для учащихся старших классов, учителей математики и информатики, а также студентов младших курсов, интересующихся вопросами информационной безопасности.

Московские олимпиады по информатике. Под ред. Е. В. Андреевой, В. М. Гуровица и В. А. Матюхина. 2006. 256 с.

Книга предназначена для школьников, учителей информатики, студентов и просто любителей решать задачи по программированию. Большинство задач приведены с подробными разборами и комментариями.

В. В. Прасолов. **Задачи по планиметрии.** 5-е изд. испр. и доп. (совместно с ОАО «Московские учебники») 2006. 640 с.

Ставший классическим сборник содержит около 1900 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения. 4-е издание этой книги вышло в 2001 году. При перенборе текста третьего издания возникло огромное количество опечаток. В 5-м издании эти опечатки исправлены. В новое издание добавлено около 200 задач. Добавлена также новая глава 31, посвященная эллипсу, параболе и гиперболу.

В. В. Прасолов. **Элементы теории гомологий.** 2006. 448 с.

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии». В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения. Для студентов старших курсов и аспирантов математических и физических специальностей; для научных работников.

У. Фултон. **Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.** Пер. с англ. под ред. А. М. Вершика. 2006. 328 с.

Книга посвящена комбинаторным свойствам таблиц Юнга и их приложениям. Для студентов, аспирантов и научных сотрудников.

А. В. Шаповалов. **Принцип узких мест.** 2006. 24 с.

Книга посвящена поиску решения нестандартных математических задач. Книга адресуется всем любителям интересных задач, в первую очередь — школьникам старших классов, а также учителям и руководителям математических кружков.

А. Н. Ширяев. **Задачи по теории вероятностей.** 2006. 416 с.

Настоящее учебное пособие содержит более 1500 задач (включая подзадачи), непосредственно «привязанных» к учебнику автора в двух книгах «Вероятность. Т. 1» и «Вероятность. Т. 2» (2004 г.) и упорядоченных в соответствии с содержанием этих книг. Пособие рассчитано на студентов физико-математических специальностей. Может служить учебным пособием для аспирантов и справочным пособием для специалистов.

О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц

М.Н. Истомина А.Б. Певный

ВВЕДЕНИЕ

Через $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ обозначим скалярное произведение векторов x, y из n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n . Пусть $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — длина вектора x , $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера в \mathbb{R}^n .

В содержательной статье Н. Н. Андреева и В. А. Юдина [1] рассматривается задача минимизации потенциальной энергии N отрицательных зарядов, расположенных на сфере S^2 . Авторы оригинальным методом решили задачу при $N = 6$ и $N = 12$. О физической интерпретации задачи можно узнать на сайте www.etudes.ru в разделе «Задача Томсона». Аналогичная задача в n -мерном пространстве может быть сформулирована так.

ЗАДАЧА 1. Минимизировать функцию

$$W = W(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(i,j): i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

по всем наборам (x_1, \dots, x_N) из N попарно различных точек сферы S^{n-1} .

Мы решим эту задачу при $N = n + 1$, но предварительно установим связь с задачей максимизации суммы расстояний точек на сфере (на эту связь также обращено внимание в [1]).

Воспользуемся известным неравенством между средним гармоническим и средним арифметическим положительных чисел a_1, \dots, a_m :

$$\frac{m}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_m}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_m}{m},$$

откуда

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_m} \geq \frac{m^2}{a_1 + \dots + a_m}.$$

(Равенство достигается только тогда, когда $a_1 = \dots = a_m$.)

Отсюда получаем неравенство

$$W = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|} \geq \frac{(N^2 - N)^2}{\sum_{i \neq j} |x_i - x_j|}. \quad (1)$$

Естественно рассмотреть следующую задачу.

ЗАДАЧА 2. Расположить N точек на сфере так, чтобы сумма попарных расстояний

$$S(x_1, \dots, x_N) = \sum_{(i,j): i \neq j} |x_i - x_j| \quad (2)$$

точек x_1, \dots, x_N сферы S^{n-1} была бы максимальной.

В некотором смысле задача 1 является подчинённой задаче 2, как показывает следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ — оптимальное решение задачи 2 и пусть при этом расстояния $d_{ij} = |x_i^* - x_j^*|$, $i \neq j$, равны между собой. Тогда набор $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ является решением задачи 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного набора $X = (x_1, \dots, x_N)$ попарно различных точек сферы в силу (1) и (2) имеем

$$W(X) \geq \frac{(N^2 - N)^2}{S(X)} \geq \frac{(N^2 - N)^2}{S(X^*)} = W(X^*).$$

Последнее равенство следует из того, что $N^2 - N$ чисел $d_{ij} = |x_i^* - x_j^*|$, $i \neq j$, равны между собой. Лемма доказана.

В связи с этой леммой представляется разумным сначала решить задачу 2, и если в решении расстояния d_{ij} окажутся равными, то бесплатно получим решение задачи 1.

При $N = n + 1$ решение задачи 2 интуитивно ясно. При $n = 2$ оптимальные точки будут располагаться в вершинах правильного треугольника, при $n = 3$ — в вершинах правильного тетраэдра, а при $n > 3$ — в вершинах правильного n -мерного симплекса.

Векторы, ведущие из начала координат в вершины симплекса, образуют фрейм Мерседес–Бенц.

В следующем разделе построим этот фрейм в явном формульном виде. Надеемся, что читателю будет интересно узнать, что значит модное слово «фрейм». Полученные формулы будут использованы при доказательстве оптимальности построенного решения задачи 2.

ФРЕЙМ МЕРСЕДЕС–БЕНЦ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Система векторов $\{e_i\}_{i=1}^M$ в \mathbb{R}^n называется жёстким фреймом в \mathbb{R}^n , если существует число $A > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

равенство

$$\sum_{i=1}^M (\langle x, e_i \rangle)^2 = A|x|^2. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $M \geq n$. Каждый вектор x можно разложить по фрейму. Действительно, в силу (3) справедливо тождество

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} [|x + y|^2 - |x - y|^2] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A} \sum_{i=1}^M (\langle x + y, e_i \rangle)^2 - \frac{1}{A} \sum_{i=1}^M (\langle x - y, e_i \rangle)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^M \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \left\langle \frac{1}{A} \sum_{i=1}^M \langle x, e_i \rangle e_i, y \right\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку равенство выполнено для любого $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$x = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^M \langle x, e_i \rangle e_i. \quad (4)$$

Классическим примером жёсткого фрейма является фрейм Мерседес – Бенц в \mathbb{R}^2 , состоящий из трёх векторов единичной длины, расположенных под углом 120° :

$$e_1^2 = (0, 1), \quad e_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e_3^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Для него равенство (3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^3 (\langle x, e_i^2 \rangle)^2 = \frac{3}{2}|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Характеристическим свойством этого фрейма является то, что углы между различными векторами равны 120° .

Оказывается, для любого $n \geq 3$ можно построить аналогичную конструкцию в \mathbb{R}^n , которая называется каноническим фреймом Мерседес–Бенц.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $n \geq 2$ можно построить систему из $n + 1$ векторов $\mathfrak{F}_n = \{e_1^n, e_2^n, \dots, e_{n+1}^n\}$ со свойствами:

1. $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}, \quad i, j \in [1, n + 1], i \neq j;$
2. $|e_i^n| = 1, \quad i \in [1, n + 1];$
3. $\sum_{i=1}^{n+1} e_i^n = \mathbb{O};$

4. Система \mathfrak{F}_n является жёстким фреймом с константой $A = (n+1)/n$.

Доказательство. Индукция по n . При $n = 2$ фрейм (5) удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

Допустим, что для $n - 1$ все утверждения выполнены. Система \mathfrak{F}_n получается из \mathfrak{F}_{n-1} с помощью процедуры добавления.

Для $i \in [1, n]$ вектор e_i^n строится из e_i^{n-1} добавлением n -й компоненты $-h_n$ и нормированием получившегося вектора:

$$e_i^n = c_n(e_i^{n-1}, -h_n), \quad \text{где } c_n = \frac{1}{\sqrt{1+h_n^2}}.$$

Положим $e_{n+1}^n = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. По индуктивному предположению $\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle = -\frac{1}{n-1}$, $i, j \in [1, n]$, $i \neq j$. Тогда

$$\langle e_i^n, e_j^n \rangle = \begin{cases} c_n^2(\langle e_i^{n-1}, e_j^{n-1} \rangle + h_n^2), & i, j \in [1, n], i < j, \\ -c_n h_n, & i \in [1, n], j = n+1. \end{cases}$$

Получим уравнение для определения h_n :

$$\frac{1}{1+h_n^2} \cdot \left(h_n^2 - \frac{1}{n-1} \right) = -c_n h_n = -\frac{h_n}{\sqrt{1+h_n^2}}.$$

Отсюда $h_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, $c_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Тогда $\langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, $i \neq j$. Имеем

$$|e_i^n|^2 = c_n^2(|e_i^{n-1}|^2 + h_n^2) = 1, \quad i \in [1, n]; \quad |e_{n+1}^n| = 1.$$

Так же просто проверяются свойства 3 и 4. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ.

- Угол φ_n между двумя различными векторами e_i^n и e_j^n находится из условия $\cos \varphi_n = \langle e_i^n, e_j^n \rangle = -\frac{1}{n}$, отсюда $\varphi_n = \arccos(-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n}$, значит

$$\frac{2\pi}{3} = \varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_n > \dots > \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

- Избыточное количество векторов в разложении (4) повышает надёжность при восстановлении вектора x по коэффициентам $c_i = \langle x, e_i^n \rangle$, $i \in [1, n+1]$. Если любой из коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^{n+1}$ будет утрачен, то по оставшимся вектор x восстановить можно.

Допустим, что утрачен коэффициент $c_k = \langle x, e_k^n \rangle$ с некоторым номером $k \in [1, n+1]$. Рассмотрим систему

$$\{e_1^n, \dots, e_{k-1}^n, e_{k+1}^n, \dots, e_{n+1}^n\} \quad (6)$$

с выкинутым вектором e_k^n . В системе (6) скалярное произведение двух различных векторов равно $-\frac{1}{n}$, а норма каждого вектора равна 1. Поэтому матрица Грама системы (6) имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет диагональное преобладание, поэтому $\det G \neq 0$ и, значит, система (6) линейно независима. Поэтому существует единственная система $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{k-1}, \tilde{e}_{k+1}, \dots, \tilde{e}_{n+1}\}$, биортогональная к (6), и вектор x восстанавливается по формуле

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{e}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} c_i \tilde{e}_i.$$

3. Вопрос о восстановлении вектора x в случае, когда часть фреймовых коэффициентов утрачена, рассматривался во многих работах, см., например, [3]. Там же использовалось название Mercedes-Benz frame.
4. Из стандартного фрейма \mathfrak{F}_n можно получить другие жесткие фреймы. Умножим все векторы фрейма на произвольную ортогональную матрицу Q и перед получившимися векторами в произвольном порядке расставим знаки $+$ и $-$:

$$\{\pm Qe_1^n, \pm Qe_2^n, \dots, \pm Qe_{n+1}^n\}. \tag{7}$$

Система (7) является жёстким фреймом.

НЕРЕШЕННАЯ ЗАДАЧА. Доказать, что любой жёсткий фрейм с константой $\frac{n+1}{n}$, состоящий из $n+1$ единичных векторов, после некоторой перестановки элементов фрейма принимает вид (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОПТИМАЛЬНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор из $n+1$ точек $M = \{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subset S^{n-1}$ называется фреймом Мерседес-Бенц, если выполнены два условия:

1. $\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$ при $i \neq j$; (8)
2. $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = \mathbb{O}$.

Такое определение полезно для описания всего множества решений в задаче 2.

ТЕОРЕМА 2. При $N = n + 1$ решениями задачи 2 являются фреймы Мерседес-Бенц и только они.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный фрейм Мерседес-Бенц M . Расстояния $d_{ij}^* = |e_i - e_j|$, $i \neq j$, равны между собой:

$$(d_{ij}^*)^2 = |e_i|^2 + |e_j|^2 - 2\langle e_i, e_j \rangle = 2 + \frac{2}{n} = \frac{2n+2}{n}.$$

Количество чисел d_{ij}^* , $i \neq j$, равно $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$, поэтому

$$S(M) = (n^2 + n) \sqrt{\frac{2n+2}{n}} = \sqrt{2}(n+1) \sqrt{n(n+1)}.$$

Для произвольного набора $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$ точек сферы нужно доказать, что $S(X) \leq S(M)$. Для этого используем идею статьи [1]. Имеем $|x_i - x_j| = \sqrt{2}y(\langle x_i, x_j \rangle)$, где $y(t) = \sqrt{1-t}$. Поскольку $y''(t) < 0$ при $t < 1$, то $y(t)$ вогнута. Проведем касательную в точке $-\frac{1}{n}$:

$$h(t) = y\left(-\frac{1}{n}\right) + y'\left(-\frac{1}{n}\right)\left(t + \frac{1}{n}\right).$$

Тогда $y(t) \leq h(t)$ при всех $t \leq 1$. Легко подсчитать, что

$$h(t) = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}t.$$

Итак,

$$|x_i - x_j| \leq \sqrt{2}h(\langle x_i, x_j \rangle). \quad (9)$$

Суммируя $n^2 + n$ слагаемых, получим

$$S(X) \leq \sqrt{2}(n^2 + n) \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} \sum_{i \neq j} \langle x_i, x_j \rangle.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i \neq j} \langle x_i, x_j \rangle = \left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right|^2 - (n+1).$$

Поэтому

$$S(X) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (2n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right|^2 \right\} \quad (10)$$

Придем к неравенству

$$S(X) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (2n+2)\sqrt{n(n+1)} \right\} = \sqrt{2}(n+1)\sqrt{n(n+1)} = S(M).$$

Значит, M — решение задачи 2.

Если X другое решение, $S(X) = S(M)$, то в (10) отброшенное слагаемое равно нулю: $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \mathbb{O}$. Кроме того, в (9) будет равенство, а это возможно только при выполнении равенства $\langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}$ при всех $i \neq j$. Значит, X — фрейм Мерседес–Бенц. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

Опираясь на теорему 2, доказать, что в задачах 3–5 решениями являются фреймы Мерседес–Бенц и только они.

ЗАДАЧА 3. Расположить $n + 1$ точек на сфере S^{n-1} так, чтобы произведение расстояний между ними стало максимальным. (Указание: используйте неравенство «среднее арифметическое \geq среднего геометрического»).

ЗАДАЧА 4 (ЗАДАЧА О ДИКТАТОРАХ). Расположить $n + 1$ точек на сфере S^{n-1} так, чтобы минимальное расстояние между ними стало максимальным. (Геометрическое решение этой задачи для $n = 3$ можно найти в [4, задача 120]).

ЗАДАЧА 5. При $N = n + 1$ минимизировать функцию

$$W(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^{n-2}}$$

по всем наборам из N попарно различных точек сферы S^{n-1} , $n \geq 3$. (Указание: использовать неравенство «среднее порядка $m = -(n - 2)$ не превосходит среднего арифметического». Эта задача решена в [5], там же решается задача при $N = 2n$).

ЗАДАЧА 6. Расположить N точек на сфере S^{n-1} , где $3 \leq N \leq n$, так, чтобы сумма расстояний между ними стала максимальной. Доказать, что векторы фрейма \mathfrak{F}_{N-1} в \mathbb{R}^{N-1} , дополненные $n - N + 1$ нулями:

$$e_i = [e_i^{N-1}, 0, \dots, 0], \quad i = 1, \dots, N,$$

дают оптимальное решение задачи.

Авторы благодарят В. Н. Малозёмову и В. И. Звонилову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андреев Н. Н., Юдин В. А. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. 1997. С. 115–121.
- [2] White L. L. *Unique arrangements of points on a sphere* // Amer. Math. Monthly. Vol. 59, no. 9. 1952. P. 606–611.

- [3] Casazza P., Kovačević J. *Equal-norm tight frames with erasures* // Advances in Comp. Math. (Special issue on frames). 2002. P. 387-430.
- [4] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. М.: Наука, 1974.
- [5] Юдин В. А. *Минимум потенциальной энергии точечной системы за-рядов* // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 2. С. 115–121.

О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского

П. В. Бибиков И. В. Ткаченко

В геометрии Лобачевского «замечательных точек» в треугольнике «больше», чем в евклидовой геометрии. В данной статье рассматриваются *трисектор* и точка пересечения *бисекционных отрезков*. Точка T называется трисектором треугольника ABC , если площади треугольников TAB , TAC , TBC равны одной трети площади треугольника ABC . Бисекционным отрезком называется отрезок, который проходит через вершину треугольника и делит его на два равновеликих. Оказывается, что бисекционные отрезки треугольника пересекаются в одной точке. В евклидовой геометрии обе эти точки совпадают с точкой пересечения медиан.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Геометрию Лобачевского можно интерпретировать с помощью терминов и объектов геометрии Евклида (иначе говоря, внутри евклидовой геометрии можно построить *модель* геометрии Лобачевского). Первая из подобных моделей (*модель Кэли – Клейна*) была создана для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. Здесь мы будем использовать другую модель — *модель Пуанкаре*. Эта модель во многом удобнее модели Кэли – Клейна.

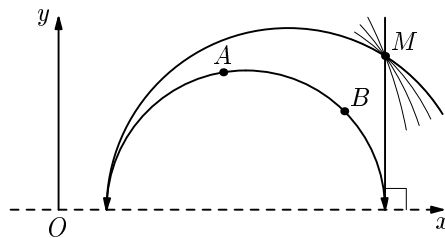


Рис. 1.

Плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x; y) \mid y > 0\}$ без границы $\{y = 0\}$. Прямую $\{y = 0\}$

вместе с бесконечно удаленной точкой назовем *абсолютом*. *Прямыми в геометрии Лобачевского* называются верхние полуокружности с центрами на абсолюте и лучи, перпендикулярные абсолюту. Точки абсолюта назовем *бесконечно удаленными*. *Параллельными прямыми в геометрии Лобачевского* являются прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Прямые, не имеющие общих (в том числе и бесконечно удаленных) точек, называются *сверхпараллельными*.

Нетрудно проверить, что модель Пуанкаре удовлетворяет всем аксиомам и постулатам абсолютной геометрии, кроме пятого постулата (через точку, не лежащую на данной прямой, проходят две прямые, параллельные данной, и бесконечное количество прямых, сверхпараллельных с данной), и построенная модель геометрии Лобачевского является *логически непротиворечивой* (если непротиворечива евклидова геометрия).

Углы между прямыми в геометрии Лобачевского равны углам между касательными, проведенными в точке пересечения соответствующих полуокружностей. Признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского совпадают с тремя признаками в евклидовой геометрии. Кроме того, к ним добавляется еще и четвертый признак: *равны треугольники с попарно равными углами*.

Площадь треугольника в геометрии Лобачевского равна

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

Для вычисления расстояния на плоскости Лобачевского удобно ввести в модели Пуанкаре комплексные координаты так, чтобы действительная ось совпадала с абсолютом, а положительный луч мнимой оси был направлен в полуплоскость модели Пуанкаре. Расстояние на плоскости Лобачевского между точками с координатами z_1 и z_2 равно

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}. \quad (1)$$

(См., например, [2].)

2. ЭКВИДИСТАНТЫ

Эквидистанта есть геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой u (эту сторону мы будем называть *полуплоскостью эквидистанты*) на одинаковых расстояниях от нее. Прямая u называется *базой эквидистанты*, величина расстояния h — *высотой*.

ТЕОРЕМА 1. *Для перпендикулярных абсолюту лучей с началом в точке O эквидистантами являются наклонные лучи с тем же началом в точке O .*

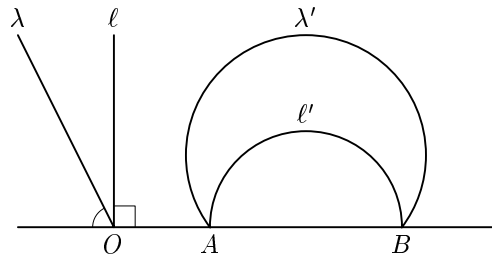


Рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности считаем, что O совпадает с началом координат (формула (1) инвариантна относительно сдвигов вдоль действительной оси). Возьмем на перпендикулярном абсолюту луче ℓ произвольную точку z_1 и проведем через нее окружность с центром в точке O (в геометрии Лобачевского это перпендикуляр к прямой ℓ). Пусть она пересекает наклонный луч λ в некоторой точке z_2 . Из соображений подобия очевидно, что основанием перпендикуляра для любой точки pz_2 на луче λ будет точка pz_1 . Так как

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} = \ln \frac{|pz_1 - p\bar{z}_2| + |pz_1 - pz_2|}{|pz_1 - p\bar{z}_2| - |pz_1 - pz_2|} = \rho(pz_1, pz_2),$$

расстояние между лучами ℓ и λ постоянно. Значит, λ является эквидистантой для прямой ℓ (очевидно, что других точек в полуплоскости эквидистанты, удаленных на то же расстояние от ℓ , нет).

ТЕОРЕМА 2. Для верхних полуокружностей, проходящих через бесконечно удаленные точки A и B , эквидистантами являются верхние дуги окружностей, проходящих через точки A и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем луч ℓ , перпендикулярный абсолюту, с началом в точке A , и произвольную его эквидистанту λ . Проведем инверсию относительно окружности с центром в точке B и радиусом BA . По свойствам инверсии луч ℓ перейдет в верхнюю полуокружность, проходящую через точки A и B , а эквидистанта λ — в дугу окружности, проходящей через точки A и B . Поскольку инверсия сохраняет углы, она сохраняет и расстояния. Значит, эквидистанта перейдет в эквидистанту.

ТЕОРЕМА 3. Каждая прямая имеет с эквидистантой не более двух общих точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в модели Пуанкаре прямые и эквидистанты являются евклидовыми окружностями или прямыми, то это утверждение следует из того, что прямые и окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК ХАЙАМА – САККЕРИ

В истории вопроса о параллельных линиях большую роль сыграл четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Впервые этот четырехугольник рассматривал Омар Хайам (1048–1122). Эта же фигура была положена в основу построения теории параллельных итальянским математиком Саккери (1667–1733), которому удалось получить ряд теорем неевклидовой геометрии. Однако Саккери ошибочно считал, что ему удалось обнаружить противоречие среди следствий положения, отрицающего постулат Евклида, и тем самым доказать этот постулат. Лобачевский не знал о работах Хайама и Саккери, однако и он в своих работах часто рассматривал тот же специальный вид четырехугольника, который мы будем в дальнейшем называть *четырёхугольником Хайама – Саккери* или *четырёхугольником Саккери*.

Итак, рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с двумя прямыми углами при вершинах A и B и с равными сторонами $AD = BC$. Будем называть сторону AB *базой*, сторону CD *антибазой* этого четырехугольника, а стороны AD и BC его *боковыми сторонами*. Отметим одно важное свойство четырехугольника Саккери: *углы при антибазе равны*. Из него следует, в частности, что углы при антибазе острые.

Пусть теперь ABC — произвольный треугольник, а MN — прямая, проходящая через середины M и N сторон AC и BC . Проведем перпендикуляры AP , BQ и CR к прямой MN и докажем, что они равны друг другу. Рассмотрим треугольники APM и CMR . Они равны по гипотенузе и острому углу, значит, $AP = CR$. Рассмотрим треугольники BNQ и CNR . Они равны по гипотенузе и острому углу, значит, $BQ = CR$. Поэтому $AP = BQ = CR$. Таким образом, $ABQP$ — четырехугольник Саккери с базой PQ . Будем говорить, что этот четырехугольник *присоединен к треугольнику ABC по стороне AB* .

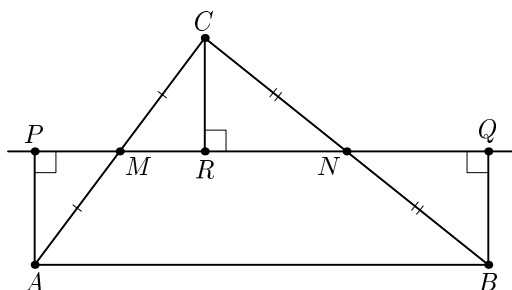


Рис. 3.

ТЕОРЕМА 4. *Каждый из острых углов четырехугольника Саккери, присоединенного к данному треугольнику ABC , равен $\sigma/2$, где σ — сумма углов треугольника ABC .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $ABQP$ — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC по стороне AB . Докажем, что $\angle BAP = \angle ABQ = \sigma/2$. Рассмотрим случай, когда середины M и N боковых сторон треугольника лежат на отрезке PQ (другие случаи аналогичны). Пусть CR — перпендикуляр к прямой MN . Так как $\triangle APM = \triangle CRM$ и $\triangle BQN = \triangle CRN$, то $\angle ACR = \angle PAM$ и $\angle BCR = \angle QBN$. Но $\angle PAB + \angle QBA = \angle PAM + \angle CAB + \angle ABC + \angle NBQ = \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \sigma$. Учитывая, что $\angle PAB = \angle QBA$, получаем $\angle PAB = \angle QBA = \sigma/2$.

ТЕОРЕМА 5. *Четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC , равновелик с ним.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $ABQP$ — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC по стороне AB . Докажем, что площади этого четырехугольника и треугольника равны. Рассмотрим случай, когда середины M и N боковых сторон треугольника лежат на отрезке PQ (другие случаи разбираются аналогично). Пусть CR — перпендикуляр к прямой MN . Так как $\triangle APM = \triangle CRM$ и $\triangle BQN = \triangle CRN$, то $S(ABQP) = S(AMNB) + S(APM) + S(BQN) = S(AMNB) + S(CMR) + S(CNR) = S(ABC)$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть антибаза четырехугольника Саккери равна a , боковая сторона равна h , а площадь равна S . Тогда*

$$\operatorname{th} h = \sin \frac{S}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Здесь и далее мы будем использовать стандартные факты гиперболической тригонометрии. Найти из можно, например, в [1, 5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан четырехугольник Саккери $ABQP$ с антибазой $AB = a$ и углом σ при ней. Введем следующие обозначения: $AQ = x$, $\angle AQB = \varphi$. Тогда

$$\frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{sh} x} = \cos \varphi = \frac{\operatorname{ch} h \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} h \operatorname{sh} x}$$

(первое равенство — теорема синусов в треугольнике APQ , второе — теорема косинусов в треугольнике ABQ). Кроме того, по теореме косинусов в треугольнике ABQ получаем, что

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} h \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} h \operatorname{sh} a \cos \sigma,$$

где σ — острый угол в четырехугольнике Саккери. Подставляя это

равенство в первую формулу и упрощая, получаем

$$\operatorname{th} h = \cos \sigma \operatorname{cth} \frac{a}{2}.$$

Осталось воспользоваться формулой площади четырехугольника: $S = 2\pi - (\pi + 2\sigma) = \pi - 2\sigma$.

4. ТРИСЕКТОР

4.1. Одно геометрическое место точек

Найдем геометрическое место точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади.

ТЕОРЕМА 7. *Геометрическим местом точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади, является эквидистанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный отрезок AB на прямой ℓ . Построим четырехугольник Саккери $ABCD$ с антибазой AB и данной площадью S . В каждой точке H прямой p , содержащей отрезок CD , в полуплоскость, не содержащую точки A относительно прямой p , восстановим перпендикуляр $HX = AC$ (рис. 4). Очевидно, что множество всех точек X есть эквидистанта с базой p . С другой стороны, площадь каждого треугольника AXB равна площади четырехугольника Саккери $ABDC$ и других искомым точек Y в полуплоскости эквидистанты нет. Действительно, взяв точку пересечения эквидистанты с перпендикуляром к прямой ℓ , проходящим через точку Y , получим, что либо $\triangle AXB \subset \triangle AYB$, либо $\triangle AYB \subset \triangle AXB$, т.е. $S(\triangle AXB) \neq S(\triangle AYB)$. Значит, эквидистанта действительно является искомым ГМТ.

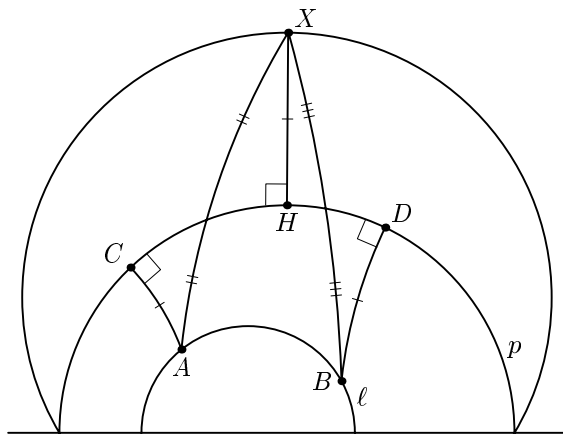


Рис. 4.

В этом случае будем говорить, что эквидистанта *ограничивает* треугольники данной площади S . Из формулы (2) немедленно следует, что высота ограничивающей эквидистанты выражается по формуле

$$\operatorname{th} h = \sin \frac{S}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2},$$

где $AB = a$ — длина данного отрезка.

4.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ТРИСЕКТОРА

ТЕОРЕМА 8. *В каждом треугольнике существует трисектор, лежащий внутри треугольника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На двух сторонах треугольника ABC построим эквидистанты λ_1 и λ_2 , ограничивающие треугольники площади, равной одной трети площади треугольника ABC . Докажем, что они пересекутся внутри треугольника ABC . Действительно, пусть эквидистанты построены на сторонах AB и AC , точки M_1, N_2 лежат на BC , точка M_2 — на AB , а точка N_1 — на AC , при этом $S(ABM_1) = S(ABN_1) = S(ACM_2) = S(ACN_2) = S(ABC)/3$, и построенные эквидистанты, проходящие соответственно через точки M_1, N_1 и M_2, N_2 , не пересекаются. Тогда $BN_2 < BM_1$. Отсюда получаем, что $2S(ABC)/3 = S(ACM_1) < S(ACN_2) = S(ABC)/3$ — противоречие, значит, эквидистанты пересекаются в искомой точке T .

ТЕОРЕМА 9. *Для данного треугольника существует ровно один трисектор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для треугольника ABC существуют два трисектора T и T_1 . Обозначим через A', B', C' точки, которые лежат на прямых AT, BT, CT соответственно, причем точка T лежит между A и A', B и B', C и C' . Плоскость разбивается лучами TA', TB', TC' на три угла. Точка T_1 попадает в один из них, допустим, это угол $A'TB'$. Тогда $S(ABC)/3 = S(ABT) < S(ABT_1) = S(ABC)/3$ — противоречие.

5. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИСЕКЦИОННЫХ ОТРЕЗКОВ

Проведем в треугольнике ABC бисекционный отрезок CX . Будем использовать обозначения с рис. 5.

Поскольку площадь треугольника CXB равна половине площади треугольника ABC , то

$$\pi - (x + u + \beta) = \frac{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2},$$

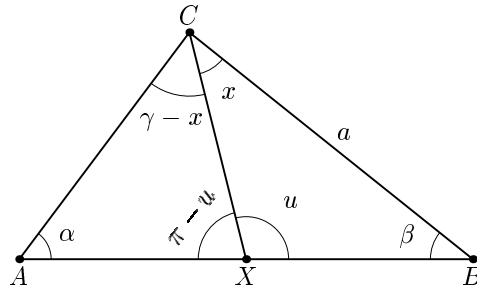


Рис. 5.

откуда

$$x + u + \beta = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{\pi + \alpha - \beta + \gamma}{2}, \quad \omega = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

ЛЕММА 1. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \gamma (\cos \varphi + \cos \beta)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) получаем $x + u = \varphi$. По второй теореме косинусов для треугольника CXB

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \frac{\cos u + \cos x \cos \beta}{\sin x \sin \beta}, \\ \operatorname{ch} a \sin x \sin \beta &= \cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x + \cos x \cos \beta, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\operatorname{ch} a \sin \beta - \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

По второй теореме косинусов для треугольника ABC

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Подставим в (4) и получим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} - \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \beta} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \gamma (\cos \varphi + \cos \beta)}. \quad (5)$$

ЛЕММА 2. $\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\sin x}{\sin \gamma \cos x - \sin x \cos \gamma} = \frac{1}{\sin \gamma \operatorname{ctg} x - \cos \gamma} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\cos \varphi + \cos \beta} - \cos \gamma} = \frac{\cos \varphi + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \gamma)} = \\
 &= \frac{\cos(\omega - \beta) + \cos \beta}{\cos \alpha + \cos(\omega - \alpha)} = \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}.
 \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из

$$\varphi - \gamma = \frac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi - \alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - (\omega - \alpha).$$

ТЕОРЕМА 10. Бисекционные отрезки пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве используем теорему Чевы для геометрии Лобачевского [1]: если

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} = 1, \tag{6}$$

то отрезки пересекаются в одной точке (обозначения на рис. 6).

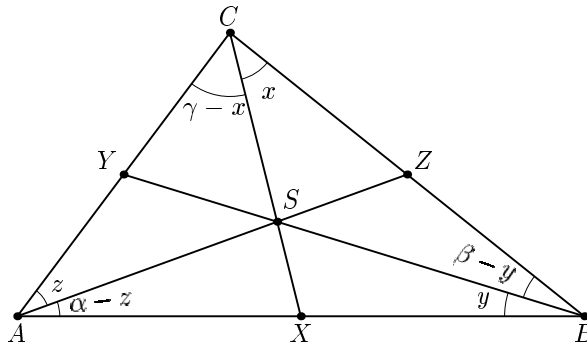


Рис. 6.

Преобразуем левую часть формулы (6) с помощью леммы 2. Получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} = \\
 &= \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \alpha)}{\cos(\omega/2 - \gamma)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \gamma)}{\cos(\omega/2 - \beta)} = 1,
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

6. ТРИСЕКТОР, ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИСЕКЦИОННЫХ ОТРЕЗКОВ И ДРУГИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом разделе мы проверим, что найденные выше точки — трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков — в общем случае не совпадают друг с другом и с другими замечательными точками треугольника:

ни с точкой пересечения медиан (как в геометрии Евклида), ни с точкой пересечения биссектрис, ни с точкой пересечения высот.

Для анализа взаимного расположения этих точек нам потребуется изучить геометрическое место точек, образующих с двумя данными отрезками с общим концом треугольники равной площади и лежащих внутри образованного этими отрезками угла. Назовем это ГМТ Σ . (Будем также использовать обозначения Σ_O или Σ_{AOB} , если нужно указать вершину угла или весь угол, относительно которого строится кривая Σ .)

Докажем следующий важный факт, относящийся к структуре Σ .

ТЕОРЕМА 11. *В общем случае любая прямая, проходящая через вершину угла, пересекает Σ не более одного раза (помимо вершины угла).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть есть угол \widehat{AOB} , прямая ℓ проходит через вершину O угла и пересекает Σ_{AOB} в двух точках M и N , тогда $S(OAM) = S(OBM)$, $S(OAN) = S(OBN)$, $S(AMN) = S(BMN)$. Отразим точку B симметрично относительно прямой ℓ , получим точку B_1 , не совпадающую с A , для которой верны эти же равенства (рис. 7; если точки A и B_1 совпадают, то $OA = OB$ и Σ_{AOB} является биссектрисой угла \widehat{OAB}).

Докажем, что у всех этих треугольников общая средняя линия. Действительно, так как $S(OAM) = S(OB_1M)$, то у них общая средняя линия p , проходящая, в частности, и через середины сторон AM и B_1M , а значит, и через середины сторон AN и B_1N (см. рис. 7 и теорему 7).

Рассмотрим четырехугольники Саккери, присоединенные к треугольникам AOM и AMN по сторонам OM и MN соответственно. У этих

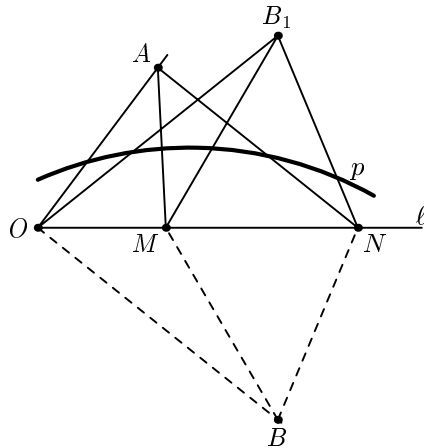


Рис. 7.

четыреугольников есть общая боковая сторона, поэтому расстояния от точек O , M и N до прямой p равны. Пришли к противоречию, так как прямая l не может пересекать эквидистанту в трех точках.

СЛЕДСТВИЕ. Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $AB < BC$, BL — биссектриса угла \widehat{ABC} . Тогда кривая Σ_{ABC} целиком лежит в угле \widehat{LBC} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N — произвольная точка Σ_{ABC} . Предположим, что точка N лежит в угле \widehat{ABL} . Отразим треугольник ABN относительно биссектрисы BL и получим треугольник A_1BN_1 , где точка A_1 лежит на BC , а точка N_1 — внутри треугольника A_1BN . Приходим к противоречию:

$$S(ABN) = S(A_1BN_1) < S(A_1BN) < S(CBN),$$

но $S(ABN) = S(CBN)$ по определению Σ .

СЛЕДСТВИЕ. Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения биссектрис.

СЛЕДСТВИЕ. Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения высот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть так же, как в теореме, $AB < BC$, а BL — биссектриса, BH — высота в треугольнике ABC . Точно так же, как в евклидовой геометрии, докажем, что H лежит на отрезке AL . Отразим A относительно BH , получим точку A_1 на стороне AC . Треугольник ABA_1 равнобедренный, поэтому BH является его биссектрисой. Так как $\angle ABA_1 < \angle ABC$, то $\angle ABH < \angle ABL$.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $AB < BC$, M — основание медианы треугольника ABC , проведенной из вершины B . Тогда часть Σ_{ABC} , находящаяся внутри треугольника ABC , лежит в треугольнике ABM .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T_1 точку, симметричную B относительно точки M . Легко проверить, что T_1 лежит на Σ_{ABC} . Если найти на луче BM такую точку X , что $S(ABX) > S(CBX)$, то из теоремы 11 получим искомое утверждение.

Проведем среднюю линию в треугольнике ABC , которая пересекает медиану в точке K . Возьмем на отрезке BT_1 точку N так, чтобы $BK = KN$. Возможны два случая.

1. Точка N лежит на отрезке KM . Обозначим через σ_1 и σ_2 острые углы четырехугольников Саккери, присоединенных соответственно к треугольникам ABC и ABM . Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то

$$\begin{aligned} S(ABC) - 2S(ABM) &= \\ &= (\pi - 2\sigma_1) - 2(\pi - 2\sigma_2) = 2(2\sigma_2 - \sigma_1) - \pi < \\ &< 2\sigma_2 - \pi < 0. \end{aligned}$$

Значит, $S(ABM) > S(BCM)$ и можно взять $X = M$.

2. Точка N лежит на отрезке MT_1 . Тогда $AN > CN$ и по формуле (2) получаем, что

$$\frac{\sin \frac{S(ABN)}{2}}{\sin \frac{S(BCN)}{2}} = \frac{\operatorname{th} AN}{\operatorname{th} CN} > 1, \quad \text{откуда } S(ABN) > S(BCN).$$

Можно взять $X = N$.

СЛЕДСТВИЕ. Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения медиан.

7. ОБОБЩЕНИЕ

С помощью Σ можно обобщить теоремы о пересечении бисекционных отрезков и медиан в треугольнике.

ТЕОРЕМА 14. Если на Σ_A , Σ_B и Σ_C в треугольнике ABC отметить точки A_1 , B_1 и C_1 , такие, что $S(ABB_1) = S(BCC_1) = S(CAA_1)$, то прямые (AA_1) , (BB_1) и (CC_1) пересекутся в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан произвольный треугольник ABC и проведены Σ_A , Σ_B и Σ_C . Возьмем произвольную точку $B_1 \in \Sigma_B$. Введем следующие обозначения: $AB = 2a$, $BC = 2b$, $\angle ABB_1 = \alpha$, $\angle CBB_1 = B - \alpha$, $S(ABB_1) = S(CBB_1) = \pi - 2\sigma$. Проведем средние линии ℓ_1 и ℓ_2 в треугольниках ABB_1 и CBB_1 , параллельные BB_1 и пересекающие сторону AB в точке K , а сторону BC — в точке L (рис. 8). Опустим на них перпендикуляры BH_1 и BH_2 , тогда по формуле (2) и по формулам тригонометрии в треугольниках BKH_1 и BLH_2 получаем следующие равенства:

$$\cos(\sigma - \alpha) \operatorname{th} a = \operatorname{th} BH_1 = \operatorname{th} BH_2 = \cos(\sigma - (B - \alpha)) \operatorname{th} b.$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin(\sigma - B) \operatorname{th} b + \sin \sigma \operatorname{th} a}{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} b - \cos \sigma \operatorname{th} a},$$

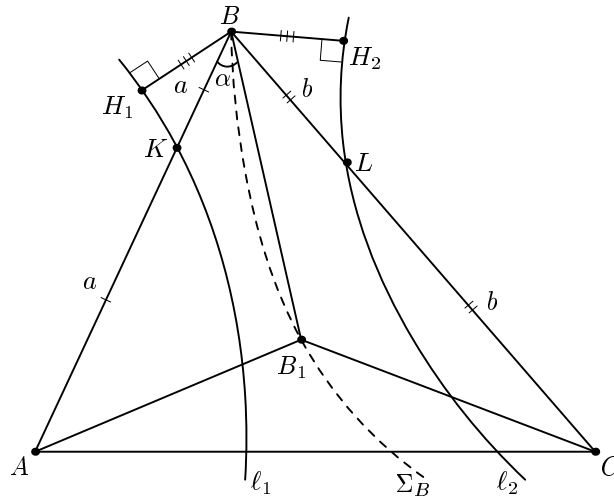


Рис. 8.

значит,

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} a - \cos \sigma \operatorname{th} b}{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} b - \cos \sigma \operatorname{th} a}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{M_1 \operatorname{ctg} \sigma + N_1}{M'_1 \operatorname{ctg} \sigma + N'_1}.$$

Аналогичные равенства верны и для двух других углов треугольника. Перемножим три полученных выражения, тогда получается равенство

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(C - \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(A - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x = \operatorname{ctg} \sigma$ и $\deg f = \deg g = 3$. Нам нужно доказать, что $f \equiv g$. Но мы знаем, что $f = g$ при четырех различных σ (они соответствуют случаям трисектора, бисекционных отрезков, медиан и касательных, проведенных в вершинах, т. е. когда $\sigma = \pi/2$), а значит, для любого σ

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(C - \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(A - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

и по теореме Чебы получаем требуемое.

ЗАДАЧИ

1. Рассчитайте длину бисекционного отрезка, считая углы треугольника известными.

2. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делит сторону треугольника.
3. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делится точкой пересечения бисекционных отрезков.
4. Пользуясь леммой 2 (с. 120), докажите, что бисекционный отрезок в общем случае лежит между медианой и биссектрисой треугольника.
5. Докажите, что вне треугольника ABC существуют такие точки T_1, T_2, T_3 , что площади треугольников $ABC, ABT_1, ACT_1, BCT_1, ABT_2, ACT_2, BCT_2, ABT_3, ACT_3$ и BCT_3 равны.
6. Докажите, что кривая Σ в общем случае не является ни прямой, ни окружностью, ни эквидистантой, ни орициклом.
7. Пусть Ω — это геометрическое место точек, из которых две стороны треугольника видны под равными углами. Докажите, что Ω лежит между высотой и Σ .
8. Докажите, что ни трисектор, ни точка пересечения бисекционных отрезков не совпадают с точкой Торичелли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Атанасян Л. С. *Геометрия Лобачевского*. М.: Просвещение, 2001.
- [2] Гальперин Г. А. *Бильярдная формула для измерения расстояний на плоскости Лобачевского* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 8, 2004. С. 93–112.
- [3] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Физматлит, 2003.
- [4] Норден А. П. *Введение в геометрию Лобачевского*. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [5] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

П. В. Бибииков, механико-математический факультет МГУ
email: tsdtp4u@proc.ru

И. В. Ткаченко, ФУПМ МФТИ
email: ilyatk@yandex.ru

Комментарий к статье П. В. Бибикова и
И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции
треугольника на плоскости Лобачевского»

О. В. Шварцман

1. О ТРЕУГОЛЬНИКАХ С ДАННЫМ ОСНОВАНИЕМ AB И ЗАДАННОЙ
ПЛОЩАДЬЮ S

Все рассуждения проведем в единичном диске Пуанкаре $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим в единичном диске отрезок AB (рис. 1). Пусть A' и B' — инверсные образы точек A и B при инверсии inv_S относительно единичной окружности $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

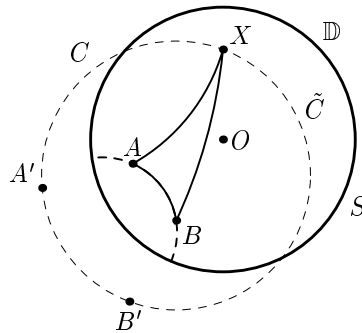


Рис. 1.

ЛЕММА. Пусть C — любая окружность, проходящая через точки A' и B' и пересекающая диск \mathbb{D} по дуге $\tilde{C} = D \cap C$. Тогда для всех точек X дуги \tilde{C} площадь гиперболического треугольника AXB принимает одно и то же значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое движение t гиперболического диска \mathbb{D} продолжается до преобразования $\hat{t}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, которое а) сохраняет окружность S , б) переводит окружности расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$ в окружности.

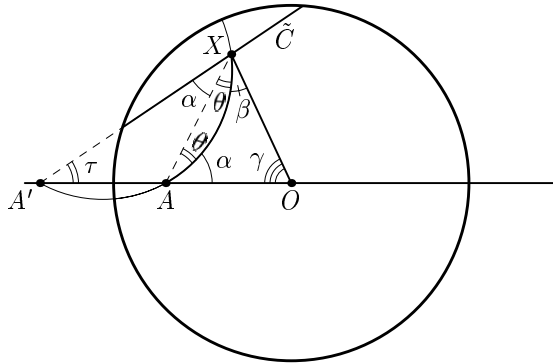


Рис. 2.

Из свойства а) следует, в частности, что $\hat{t} \circ \text{inv}_S = \text{inv}_S \circ \hat{t}$. Поэтому, применив подходящее движение t , можно считать, что точка B совпадает с центром диска, а точка A лежит на вещественной оси. Поскольку $\text{inv}_S(0) = \infty$, то по свойству б) «дуга» \hat{C} будет хордой диска — пересечением прямой, проходящей через точку A' с окружностью S , см. рис. 2. Рассмотрим гиперболический треугольник AXO , в котором стороны OX и OA есть отрезки прямых, а сторона AX представляет собой дугу окружности T , проведенной через точки A' , A и X . Докажем, что сумма углов α , β и γ в треугольнике AXO не зависит от положения точки X на «дуге» \hat{C} . С этой целью проведем хорду AX окружности T и обозначим θ равные углы, которые эта хорда образует с окружностью T (см. рис. 2). Из (евклидовых) теорем о вписанном угле и угле между касательной и хордой следует, что $\theta = \tau$. Угол τ не зависит от положения точки X . Таким образом, $\alpha + \beta + \gamma + 2\tau = \pi$, т. е. гиперболическая площадь треугольника AXO равна $\pi - \alpha - \beta - \gamma = 2\tau$ и не зависит от положения точки X . \square

Кажется, что такой прямой взгляд на происходящее и элементарнее, и проще. По ходу дела мы инвариантно охарактеризовали линии уровня функции

$$S(X) = \text{площадь треугольника } AXO$$

как след пучка окружностей через точки A' , B' в диске \mathbb{D} . Это бывает полезно при решении разного рода «гиперболических» задач на экстремумы.

Теперь уже легко показать, что в гиперболическом треугольнике ABC существует единственная точка O такая, что площади треугольников OAB , OBC , OAC равны. В самом деле, пусть K — такая точка на стороне AB , что площадь треугольника AKC равна одной трети площади

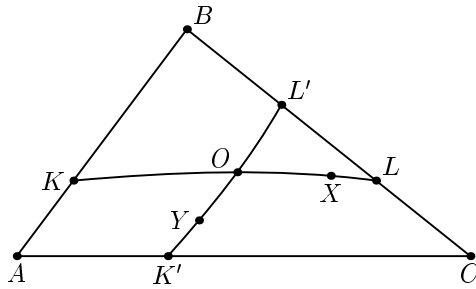


Рис. 3.

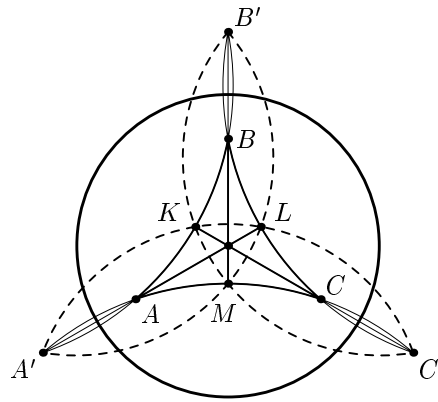


Рис. 4.

исходного треугольника (существование такой точки следует, например, из соображений непрерывности). Аналогично, на стороне BC выбирается точка L так, что $S_{ALC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Согласно лемме через точки K и L проходит единственная линия уровня функции $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Искомая точка O является единственной точкой пересечения линии уровня $S(X)$ и аналогичной линии уровня $S(Y) = S_{AYB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающей стороны AC и BC в точках K' и L' соответственно (см. рис. 3).

2. О БИСЕКТОРАХ ПЛОЩАДИ

Назовем бисектором площади прямую, проходящую через вершину треугольника и делящую его площадь пополам.

ТЕОРЕМА (И. Ткаченко, [1, ТЕОРЕМА 10, с. 121]). *Три бисектора в треугольнике (евклидовом, сферическом или гиперболическом) пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим гиперболический треугольник ABC в диске Пуанкаре \mathbb{D} и пусть K, L, M — точки, в которых бисекторы пересекают стороны AB, BC и CA соответственно. Мы сохраняем обозначения A', B' и C' из предыдущего раздела для точек, инверсных точкам A, B и C относительно граничной окружности S диска \mathbb{D} . Требуется доказать, что бисекторы пересекаются в одной точке. В рассматриваемой модели это эквивалентно следующему утверждению (см. рис. 4): дуга KC' окружности S_K , проходящей через точки K, C, C' , дуга $B'M$ окружности S_M , проходящей через точки M, B, B' и дуга $A'L$ окружности S_L , проходящей через точки

L, A, A' , пересекаются в одной точке. Если обозначить через O точку пересечения двух бисекторов, то без потери общности можно считать, что O — центр диска \mathbb{D} (почему?). Рассматриваемые дуги превращаются при этом в общие хорды трех окружностей, о которых идет речь в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ [2, задача 116]. *Даны три круга, все пересекающиеся между собой. Тогда три общие хорды каждой двух из трех окружностей пересекаются в одной точке (рис. 5).*

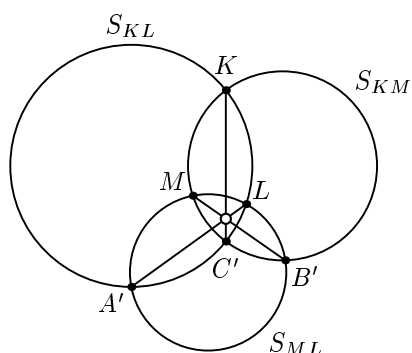


Рис. 5.

Давайте поймем, к каким трем кругам нужно применить это утверждение. Для этого нужно заметить, что по лемме существует единственная окружность S_{KL} (соответственно, S_{LM} и S_{MK}), проходящая через точки A', K, L, C' (соответственно, точки B', B, C, C' и A', A, C, C'). Это окружность, содержащая геометрическое место точек X , таких что $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Пусть D_{KL} (соответственно, D_{KM}, D_{ML}) — круг, ограниченный окружностью S_{KL} . Теорема о бисекторах есть прямое следствие нашего утверждения, примененного к кругам D_{KL}, D_{KM}, D_{ML} (см. рис. 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бибииков П. В., Ткаченко И. В. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2005. С. 113–126.
- [2] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия)*. М.: ГТТИ, 1952.

Конкурсы и олимпиады

Студенческие олимпиады по геометрии и ТОПОЛОГИИ

А. А. Ошемков А. Б. Скопенков

Великий русский ученый А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика. С целью поддержать престиж умения решать трудные задачи на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова проводятся студенческие олимпиады. Отдельные кафедры мехмата МГУ проводят олимпиады по теории вероятностей, дифференциальным уравнениям, механике, геометрии и топологии (для студентов 1–2 курса; эти олимпиады помогают студенту в выборе кафедры), а также по теории вероятностей (для студентов 3–5 курсов) и уравнениям с частными производными (для студентов 3 курса). Проводятся также общематематические олимпиады — олимпиада, посвященная Пифагору, и отборочная на международную олимпиаду.

Задачи олимпиад по геометрии и топологии принадлежат математическому фольклору, но малоизвестны. Большинство этих задач либо являются частными случаями недавних результатов или нерешенных проблем, либо открывают новый для студентов взгляд на знакомый им материал (см. комментарии к решениям). Варианты олимпиад — плод коллективного труда сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (окончательные варианты подготовлены А. Б. Скопенковым в 2005 г. и А. А. Ошемковым в 2006 г.).

Победители олимпиад по геометрии и топологии награждаются математическими призами, зачетом по курсу классической дифференциальной геометрии и приглашением на отборочный тур на международную олимпиаду (см. www.imc-math.org). Победители олимпиады 2005 года

(решили 4 задачи): второкурсники Авдеев Роман, Горин Вадим, Ероховец Николай, Изосимов Антон, Кулумжиян Каринэ, Поршнева Евгений и 10-классник Девятков Ростислав. Победители олимпиады 2006 года (решили 3 задачи): второкурсники Айзенберг Антон, Дильман Глеб, Мешин Юрий и Шнурников Игорь.

Приведем задачи олимпиад по геометрии и топологии, а также ответы, указания и ссылки на полные решения. На олимпиадах разрешалось пользоваться без определения и доказательств понятиями и теоремами из программы 1–2 курса мехмата МГУ. Все остальные используемые определения требовалось явно приводить, а используемые теоремы — формулировать.

Задачи олимпиады 6.04.2005 (16.15–19.45)

1. На плоскости фиксированы точки O, A_1, \dots, A_s и числа m_1, \dots, m_s . Моментом инерции относительно прямой l системы $A_1, \dots, A_s, m_1, \dots, m_s$ называется число

$$I(l) = m_1|A_1l|^2 + \dots + m_s|A_sl|^2,$$

где $|A_i l|$ — расстояние от точки A_i до прямой l . Будем рассматривать прямые l на плоскости, проходящие через точку O . Пусть I_+ и I_- — наибольшее и наименьшее значения момента инерции $I(l)$ (возможно, $I_+ = I_-$). Возьмем одну из прямых l_+ , для которой $I(l_+) = I_+$. Докажите, что $I(l) = I_+ \cos^2 \varphi + I_- \sin^2 \varphi$, где $\varphi = \angle(l, l_+)$.

2. Разрежьте бутылку Клейна так, чтобы получился (один) лист Мёбиуса. Бутылкой Клейна называется фигура, полученная из квадрата $ABCD$ склейкой противоположных сторон AB с CD и BC с AD (с учетом направления).

3. Какие правильные многогранники могут получиться в сечении четырехмерного куба трехмерной гиперплоскостью?

4. Докажите, что композиция осевых симметрий пространства относительно перпендикулярных скрещивающихся прямых является винтовым движением, т. е. композицией вращения на некоторый угол относительно некоторой направленной оси и параллельного переноса на вектор, параллельный этой оси. Найдите направленную ось, угол вращения и вектор переноса.

5. Пусть N — график непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любых чисел $s, t \in \mathbb{R}$ существует диффеоморфизм $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $M(N) = N$ и $M(s, f(s)) = (t, f(t))$. Верно ли, что функция f дифференцируема?

Примечания: функция с бесконечной производной в точке считается дифференцируемой в этой точке; отображение $M = (M_1, M_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, для M_1 и M_2 существуют частные производные всех порядков и

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} \frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x} \frac{\partial M_1}{\partial y} \neq 0$$

в любой точке плоскости.

Задачи Олимпиады 13.04.2006 (16.30–20.00)

1. Пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC . Докажите, что для любой точки M плоскости выполнено неравенство $AM + BM + CM \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(BC + CA)$.

2. Найдите наибольшее целое n , для которого на плоскости существует кривая второго порядка, имеющая в точке $(0, 1)$ касание n -го порядка с графиком функции $y = \cos x$.

Напомним [9, §§ 22, 23], что если P — общая точка параметризованных кривых $r_1(t)$ и $r_2(t)$, то говорят, что они имеют в этой точке *касание n -го порядка*, если первые n производных радиус-векторов $r_1(t)$ и $r_2(t)$ в точке P совпадают.

3. Пусть K — (двумерный) многоугольник на плоскости и a — вектор, для которого образ $K + a$ многоугольника K при сдвиге на вектор a не пересекается с K , т. е. $K \cap (K + a) = \emptyset$. Докажите, что два веза (т. е. круга диаметра $|a|$) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K , при котором везы не сталкиваются.

4. (а) Пусть $\gamma(t)$ — бесконечно дифференцируемая плоская кривая и $\alpha(t)$ — касательная к ней прямая в точке $P = \gamma(0) = \alpha(0)$. Предположим, что модули векторов скорости кривой $\gamma(t)$ и прямой $\alpha(t)$ равны единице в каждой точке (т. е. и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ за любой промежуток времени длины τ). Докажите, что модуль $|\gamma''(0)|$ ускорения кривой $\gamma(t)$ в точке P равен $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t))$, где ρ — расстояние.

(б) Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости [1, I.10.1], [7, §3], [6, §3]. Пусть $\gamma(t)$ — кривая с уравнением $y = 1$ (горизонтальная евклидова прямая) и $\alpha(t)$ — касательная к $\gamma(t)$ прямая (в смысле геометрии Лобачевского) в точке $\gamma(0) = \alpha(0) = (0, 1)$. Предположим, что и кривая $\gamma(t)$, и прямая $\alpha(t)$ проходят путь длины τ (в смысле геометрии Лобачевского) за любой промежуток времени длины τ . Вычислите величину $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t))$, где ρ — расстояние на плоскости Лобачевского.

5. Для каждой пары целых чисел n и k выясните, сколько имеется (с точностью до движений и гомотетий) неупорядоченных наборов из k

ненулевых векторов в n -мерном евклидовом пространстве, сумма которых равна нулю и все попарные углы между которыми равны.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И ССЫЛКИ НА ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ

2005-1. Утверждение задачи вытекает из того, что момент инерции есть сумма функций вида $f(\varphi) = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi$, а значит, и сам является функцией такого вида.

КОММЕНТАРИЙ. Аналогично получается элементарное доказательство формулы Эйлера о кривизне нормального сечения поверхности, см. формулировку и неэлементарное доказательство в [9, §55], [1, I.8.3].

2005-2. Надо резать по $BC = AD$.

2005-3. Ответ: тетраэдр, куб и октаэдр. Поскольку у четырехмерного куба восемь трехмерных граней, то у его сечения трехмерной гиперплоскостью не может быть более восьми двумерных граней. Кубом, правильным тетраэдром и правильным октаэдром являются сечения куба $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, трехмерными гиперплоскостями $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, соответственно.

2005-4. Ответ: осью является прямая l , содержащая общий перпендикуляр, угол вращения равен π , а длина вектора переноса равна удвоенной длине общего перпендикуляра. Для доказательства можно рассмотреть проекции на прямую l и на ортогональную ей плоскость.

2006-1. Пусть M' и B' — образы точек M и B при повороте на $\pi/3$ относительно точки C . Тогда

$$MA + MB + MC = AM + MM' + M'B' \geq AB' \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(CA + CB).$$

Здесь последнее неравенство следует по теореме косинусов из $\angle ACB' = \angle ACB + \pi/3 \geq 2\pi/3$.

КОММЕНТАРИЙ. Эта задача — простейший случай (для трехточечного множества) знаменитой гипотезы Гилберта – Поллака (1960): *отношение длины кратчайшего дерева, соединяющего данное конечное множество точек плоскости, к длине кратчайшего дерева без дополнительных вершин больше или равно $\sqrt{3}/2$* . Подробности см. в [3].

2006-2. Ответ: 5. Пусть график функции $y = \cos x$ задан в параметрической форме $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, а кривая второго порядка — уравнением $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$, где $F(0, 1) = 0$. Чтобы найти порядок касания этих кривых в точке $(0, 1)$, рассмотрим функцию $\varphi(t) = F(x(t), y(t))$ и ее производные в точке $t = 0$. Если $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$, то рассматриваемые кривые имеют касание n -го

порядка [9, с. 110]. Вычисляя производные функции $\varphi(t) = at^2 + bt \cos t + c \cos^2 t + pt + q \cos t + r$ в точке $t = 0$ и приравнявая их к нулю (а также учитывая условие $\varphi(0) = 0$), получаем (однородную) систему линейных уравнений на коэффициенты a, b, c, p, q, r . Если приравнять к нулю производные до 5-го порядка включительно, то система имеет ненулевое решение, а при добавлении условия $\varphi^{(6)}(0) = 0$ ненулевых решений нет. Поэтому максимально возможный порядок касания равен 5. Он достигается для гиперболы $(y - 4)^2 - 3x^2 = 9$.

КОММЕНТАРИЙ. Рассматриваемый пример является частным случаем общей задачи, которую можно сформулировать следующим образом: для данной кривой $\gamma(t)$ требуется найти кривую из некоторого семейства кривых (зависящих от параметров), которая наилучшим образом приближает $\gamma(t)$. Эту задачу можно решать аналогичным образом. Так, например, одно из определений кривизны кривой основано на рассмотрении семейства окружностей, касающихся кривой в данной точке [9].

2006-3. [13, §2], [11, глава 1].

2006-5. [5]. Ответ: одна при $n \geq k - 1$ (это система векторов, соединяющих центр правильного $(k - 1)$ -мерного симплекса с его вершинами), ни одной при $n < k - 1$.

РЕШЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ 2005-5.

Ответ: да. Докажем это.

Возьмем точку $a \in \mathbb{R}^2 \setminus N$. Расстояние от a до N не равно нулю. Значит, существует точка $y \in N$, для которой $|a - y|$ равно этому расстоянию. Тогда открытый круг D с центром в a радиуса $|a - y|$ не пересекает N .

При любом $x \in N$ существует диффеоморфизм $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, переводящий y в x и N в N . Обозначим через R^φ поворот плоскости на угол φ вокруг начала координат. Обозначим через B_l равнобедренный треугольник (открытый двумерный) с вершиной в начале координат, углом $2\pi/l$ при вершине и высотой длины $1/l$, параллельной оси Oy . Так как M — диффеоморфизм, то $M(D) \supset x + R^\varphi B_l$ для некоторых l и φ . Поэтому

$$\begin{aligned} &\text{при любом } x \in N \text{ существуют такие } l \text{ и } \varphi, \text{ что} \\ &(x + R^\varphi B_l) \cap N = \emptyset. \end{aligned} \quad (*)$$

Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_l\}$, всюду плотную на $[0, 2\pi]$. Обозначим

$$N_l := \{x \in N \mid (x + R^{\varphi_l} B_l) \cap N = \emptyset\}.$$

Ввиду условия (*) имеем $N = \bigcup_{l=1}^{\infty} N_l$. Нетрудно проверить, что N_l замкнуто в N (докажите или см. детали в [15, лемма 3.1]). Значит, по

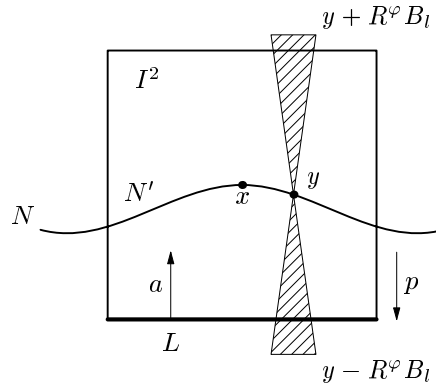


Рис. 1.

теореме Бэра о категории [2, 4] некоторое N_l содержит непустое открытое в N множество.

Поэтому существуют точка $x \in N$ и замкнутый квадрат I^2 со стороной меньше $1/l$ с центром в x , для которых $N' := N \cap I^2 \subset N_l$ (рис. 1). Тогда

$$[(y + R^{\varphi_l} B_l) \cup (y - R^{\varphi_l} B_l)] \cap N' = \emptyset \quad \text{при любом } y \in N'. \quad (**)$$

Действительно, если $z \in (y - R^{\varphi_l} B_l) \cap N'$, то $y \in (z + R^{\varphi_l} B_l) \cap N' \subset N_l$, что невозможно.

Можно считать, что угол между некоторой стороной L квадрата I^2 и осью Ox равен φ_l . Можно также считать, что N' связано и гомеоморфно отрезку (иначе заменим N' на малую окрестность точки $a \in N'$, которая гомеоморфна отрезку, поскольку N — график функции). Тогда ортогональная проекция множества N' на L содержит некоторый отрезок ненулевой длины. Можно считать, что этот отрезок совпадает с L (иначе уменьшим L).

Напомним, что отображение $q: L \rightarrow [0, 1]$ называется *липшицевым*, если существует такое s , что $|q(x) - q(y)| < s|x - y|$ для любых двух различных точек $x, y \in L$. Из (***) следует, что N' есть график некоторой липшицевой функции $q: L \rightarrow [0, 1]$ (при естественном представлении $I^2 = L \times [0, 1]$). Функция q имеет точку дифференцируемости [2, 4]. Значит, и исходная функция f имеет точку дифференцируемости. Тогда из существования диффеоморфизмов $M = M_{s,t}$ вытекает, что f дифференцируема в любой точке.

КОММЕНТАРИЙ. Какой формы могут быть ножны, чтобы из них можно было вытащить саблю? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N трехмерного (или

m -мерного евклидова) пространства называется *риманово объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует движение (т. е. изометрия) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящее x в y и N в N . Хорошо известно, что *риманово объемлемо однородными кривыми в трехмерном пространстве являются только прямые, окружности и винтовые линии*.

А какой формы может быть электрический кабель, чтобы провод можно было вытащить из его обмотки (провод можно гнуть, но нельзя ломать)? Математическая формулировка этого вопроса приводит к следующему понятию. Подмножество N пространства \mathbb{R}^m называется *дифференцируемо объемлемо однородным*, если для любых двух точек $x, y \in N$ существует диффеоморфизм $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, переводящий x в y и N в N . Непрерывность производной диффеоморфизма h не предполагается.

Напомним, что подмножество $N \subset \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым подмногообразием*, если для любой точки $x \in N$ найдется ее окрестность в \mathbb{R}^m , диффеоморфная $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ (отождествим ее с $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$) и дифференцируемое инъективное отображение $q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, график которого есть $N \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$. (Это определение, удобное для доказательства ниже следующей теоремы, равносильно стандартному [8].) Например, график любой дифференцируемой функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемым подмногообразием плоскости \mathbb{R}^2 , а образ канторова множества [8, 4.4] при произвольном вложении в плоскость не является дифференцируемым подмногообразием плоскости \mathbb{R}^2 .

Нетрудно проверить, что любое дифференцируемое подмногообразие является дифференцируемо объемлемо однородным. Замечательно, что справедливо и обратное.

ТЕОРЕМА. *Если $N \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто и дифференцируемо объемлемо однородно, то N является дифференцируемым подмногообразием [14, 15].*

Кроме задачи 2005-5, эта теорема имеет следующее элементарное (но нетривиальное) следствие: *канторово множество не может быть дифференцируемо объемлемо однородно вложено в плоскость*. Другие интересные следствия приведены в [16].

Доказательство теоремы аналогично приведенному решению задачи 2005-5. См. [16], где доказательство проще предложенного в [14, 15].

РЕШЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ 2006-4

Докажем утверждение пункта (а). Прямая $\alpha(t)$ задается уравнением $\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0)$. Для кривой $\gamma(t)$ имеем

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $\alpha(0) = \gamma(0)$ и $\alpha'(0) = \gamma'(0)$, получаем

$$\rho(\gamma(t), \alpha(t)) = |\gamma(t) - \alpha(t)| = \left| \frac{t^2}{2} \gamma''(0) + o(t^2) \right| = \frac{t^2}{2} |\gamma''(0)| + o(t^2).$$

Откуда и следует требуемое равенство $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t)) = |\gamma''(0)|$.

Ответ к (b): 1.

Чтобы привести решение, напомним сначала стандартные факты из геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости с координатами (x, y) , где $y > 0$), которые мы будем использовать. Они входят в программу курса «Классическая дифференциальная геометрия» для второго курса мехмата МГУ [1, I.10.1]; [7, §3]; [6, §3]). Длина кривой $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре ($y(t) > 0$) равна $\int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$. Прямыми для рассматриваемой модели плоскости Лобачевского являются (евклидовы) полуокружности, перпендикулярные оси x , и вертикальные полупрямые $y > 0$. Расстояние между точками плоскости Лобачевского определяется как длина отрезка прямой с концами в этих точках (где слова «длина» и «прямая» понимаются в указанном выше смысле, т. е. в смысле геометрии Лобачевского). Если рассматривать точки плоскости Лобачевского как комплексные числа с положительной мнимой частью, то формулу для расстояния между точками z_1 и z_2 можно записать в следующем виде [6, задача 3.31]:

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_2 - \bar{z}_1| + |z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1| - |z_2 - z_1|}.$$

Перейдем к решению пункта (b). В координатах (x, y) кривая $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t) = (t, 1)$. Действительно, образ этой параметризованной кривой какой нужно, а ее параметр равен длине дуги. Касательная прямая (Лобачевского) $\alpha(t)$ (к кривой $\gamma(t)$) в рассматриваемой модели является полуокружностью $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$. Вычислив длину дуги этой полуокружности в метрике Лобачевского, найдем ее параметризацию: $\alpha(t) = \left(\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}, \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} \right)$.

Используя приведенную выше формулу для расстояния между точками, можно явно выразить $\rho(\gamma(t), \alpha(t))$ через t . Поскольку нам нужна не сама эта функция, а лишь ее вторая производная в нуле, можно упростить вычисления, раскладывая $\alpha(t)$ в ряд по t и отбрасывая члены порядка выше 2. Получаем $\alpha(t) = \left(t, 1 - \frac{t^2}{2} \right) + o(t^2)$. Отсюда

$$\rho(\gamma(t), \alpha(t)) = \left| \ln \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) \right| + o(t^2) = \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

В итоге получаем ответ: $\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \rho(\gamma(t), \alpha(t)) = 1$.

КОММЕНТАРИЙ. Кривизна кривой в евклидовом пространстве обычно определяется как модуль вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. А как определить кривизну кривой в «неевклидовом» пространстве (т. е. в пространстве с неевклидовой римановой метрикой)? Можно и здесь определить ее как длину вектора ускорения точки, движущейся вдоль этой кривой с единичной по модулю скоростью. Но для этого надо по-новому определить саму операцию дифференцирования в этом пространстве. Оказывается, нельзя определить вектор ускорения как вектор с координатами, равными вторым производным координат точки по времени. Определение «правильной» — ковариантной — операции дифференцирования см. в [10], [1, I, §§ 28,29], [12].

В задаче 2006-4 предлагается еще одно (менее распространенное) определение кривизны кривой. Пункт (а) лишь показывает, что в обычной ситуации это определение равносильно обычному. А в пункте (б) предлагается вычислить по этому определению кривизну кривой для конкретного примера (без использования формул ковариантного дифференцирования). Отметим, что точно так же кривизна кривой может быть определена в любом пространстве с римановой метрикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия: методы и приложения*. М.: Наука, 1979.
- [2] Зорич В. А. *Математический анализ*. Том I. М.: МЦНМО, 2001. Том II. М.: МЦНМО, 1998.
- [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей*. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1976.
- [5] Мирзоян В. А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. Т. 197, №7, 2006. С. 47–76.
- [6] Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П., Фоменко А. Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. М.: Физматлит, 2004.
- [7] Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского*. М.: МЦНМО, 1995, 2000, 2004. См. также <http://www.mccme.ru/prasolov>.

- [8] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
- [9] Рашевский П. К. *Курс дифференциальной геометрии*. М: УРСС, 2003.
- [10] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М: УРСС, 2004.
- [11] Скопенков А. Б. *Алгебраическая топология с элементарной точки зрения*.
<http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/obstruct2.ps>
<http://www.mcsme.ru/iium/s05>
- [12] Скопенков А. Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах*. <http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/DIFGEOM.ps>
- [13] Cavicchioli A., Repovš D., Skopenkov A. B. *Open problems on graphs arising from geometric topology* // Topol. Appl. Vol. 84, 1998. P. 207–226.
- [14] Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V. *A characterization of C^1 -homogeneous subsets of the plane* // Boll. Unione Mat. Ital. Vol. 7-A, 1993. P. 437–444.
- [15] Repovš D., Skopenkov A. B., Scepın E. V. *C^1 -homogeneous compacta in R^n are C^1 -submanifolds of R^n* // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 124, no 4, 1996. P. 1219–1226.
- [16] Skopenkov A. *A characterization of submanifolds by a homogeneity condition*. Eprint, 2006. www.arxiv.org/math.GT/0606470

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия; Независимый московский университет, Б. Власьевский, 11, Москва, 119002, Россия; Московский институт открытого образования.

E-mail: skopenko@mcsme.ru

А. А. Ошемков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия.

E-mail: oshemkov@mech.math.msu.su

Об одноцветных связных графах

К. А. Матвеев

В книге В. А. Садовниченко, А. А. Григорьяна и С. В. Конягина «Задачи студенческих математических олимпиад» приведена следующая задача.

ЗАДАЧА. Все ребра полного графа на n вершинах покрашены в 3 цвета. Докажите, что можно выбрать в нем связный подграф, содержащий не менее $n/2$ вершин, все ребра которого покрашены в один цвет (в дальнейшем подграфы, удовлетворяющие этому условию, будем называть одноцветными).

Основная цель настоящей заметки состоит в обобщении этого факта, а именно в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Все рёбра полного графа на n вершинах покрашены в k цветов. Тогда в нём существует связный одноцветный подграф, в котором не менее $n/(k-1)$ вершин.*

При $k = 3$ — это утверждение вышеприведенной задачи, а при $k = 2$ — тот факт, что дополнение несвязного графа связно.

Попутно будут доказаны также некоторые факты, имеющие интерес и сами по себе. Будет также показано, что существует бесконечно много значений k , для которых при некоторых n оценка является точной.

ЛЕММА 1 (НЕРАВЕНСТВО). *Неотрицательные действительные числа $a, b, c, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ таковы, что $x_1 + \dots + x_m \leq b$, $y_1 + \dots + y_m \leq c$ и $x_i + y_i \leq a$ при любом $1 \leq i \leq m$. Тогда*

$$x_1 y_1 + \dots + x_m y_m \leq \frac{abc}{b+c}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале такое неравенство:

$$p_1 q_1 + \dots + p_m q_m \leq \max_{1 \leq i \leq m} (\lambda p_i + (1-\lambda) q_i), \quad (1)$$

при $p_i, q_i > 0$, $\sum_i p_i \leq 1$, $\sum_i q_i \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Заметим, что функция $1/x$ является выпуклой при $x > 0$, т.е. для $z, t > 0$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ выполнено $1/(\lambda z + (1-\lambda)t) \leq \lambda/z + (1-\lambda)/t$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i p_i q_i}{\max_i(\lambda p_i + (1-\lambda)q_i)} &\leq \sum_i \frac{p_i q_i}{\lambda p_i + (1-\lambda)q_i} = \sum_i \frac{1}{\lambda q_i^{-1} + (1-\lambda)p_i^{-1}} \leq \\ &\leq \lambda \sum_i q_i + (1-\lambda) \sum_i p_i \leq \lambda + (1-\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Вернемся к исходному неравенству и выкинем все пары x_i и y_i , для которых $x_i y_i = 0$, потому что они не влияют на левую часть, а все условия будут выполняться. Если хотя бы одно из чисел b и c равно 0, то неравенство очевидно, поэтому будем считать, что они оба больше 0. Тогда положим $p_i = x_i/b$, $q_i = y_i/c$, $\lambda = b/(b+c)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_i x_i y_i &= bc \sum_i p_i q_i \leq \\ &\leq bc \cdot \max_i \left(\frac{b}{b+c} \cdot \frac{x_i}{b} + \frac{c}{b+c} \cdot \frac{y_i}{c} \right) = \frac{bc}{b+c} \cdot \max_i (x_i + y_i) \leq \frac{abc}{b+c}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Все ребра n -вершинного графа G покрашены в k цветов. Пусть a_i — максимально возможное число вершин в связном подграфе H графа G , в котором все ребра покрашены в цвет i . Тогда, если дополнение графа G несвязно, то $a_1 + \dots + a_k \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дополнение графа G распадается на компоненты связности C_1, \dots, C_s ($s \geq 2$). Отнесем все вершины C_1 к множеству A , а все вершины компонент C_2, \dots, C_s к множеству B . Тогда в графе G есть все ребра, соединяющие любую вершину из A и любую вершину из B . Соответствующий полный двудольный граф назовем F , он является подграфом графа G . Пусть в множествах A и B соответственно l и $n-l$ вершин. Пусть максимально возможное число вершин в связном подграфе графа F , в котором все ребра покрашены в цвет i , равно b_i . Очевидно, что $b_i \leq a_i$. Поэтому достаточно доказать, что $b_1 + \dots + b_k \geq n$. Пусть количество ребер цвета i в графе F равно $\alpha_i l(n-l)$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Проведем между вершинами графа F только ребра цвета i и обозначим полученный граф F_i . Пусть он распадается на компоненты связности P_1, \dots, P_t . При этом P_j содержит x_j вершин из множества A и y_j вершин из множества B . Тогда число ребер в графе F_i не превосходит $x_1 y_1 + \dots + x_t y_t$. Но $x_j + y_j \leq b_i$ при $1 \leq j \leq t$. Значит, по лемме 1 $\alpha_i l(n-l) \leq x_1 y_1 + \dots + x_t y_t \leq b_i l(n-l)/n$. Следовательно, $b_i \geq n \alpha_i$. Просуммировав по всем i , получаем $b_1 + \dots + b_k \geq n(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = n$. Отсюда, в частности, следует, что (при некотором i) $a_i \geq n/k$. То есть в графе можно выбрать одноцветный связный подграф, содержащий не менее n/k вершин.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Выберем в нашем полном графе максимальный по числу вершин связный одноцветный подграф

H (будем для определенности считать, что все его ребра покрашены в цвет 1). Пусть A — множество его вершин, B — множество оставшихся вершин. Если B пусто, то выбранный подграф содержит $n \geq n/(k-1)$ вершин. Если нет, то рассмотрим все ребра, соединяющие вершины из A и вершины из B (образованный ими граф назовем G). Они все покрашены в оставшиеся $k-1$ цветов, так как наличие среди них ребер цвета 1 противоречило бы максимальнойности подграфа H (к нему, например, можно было бы присоединить это ребро, увеличив число вершин). Тогда по лемме 2 в графе G можно выбрать одноцветный связный подграф, содержащий не менее $n/(k-1)$ вершин, который будет таковым и для исходного графа.

Теперь покажем, что оценка, полученная в теореме 1, будет в некоторых случаях точной.

ТЕОРЕМА 2. *Если $k-1 = p -$ простое число, и n делится на $(k-1)^2$, то оценка из теоремы 1 точная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n/(k-1)^2 = d$. Разобьем все вершины полного n -вершинного графа на p^2 множеств вида $A_{i,j}$ ($0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq j \leq p-1$), содержащих по d вершин каждое. Если ребро соединяет две вершины, лежащие в одном из этих множеств, то покрасим его в цвет 1. Все ребра, соединяющие вершины из множеств $A_{i',j'}$ и $A_{i'',j''}$, покрасим в один цвет, который определим следующим образом. Если $i' = i''$, то покрасим их в цвет 1. Если $i' \neq i''$, то существует единственное такое $0 \leq t \leq p-1$, что $(j'' - j') \equiv t(i'' - i') \pmod{p}$. Тогда покрасим эти ребра в цвет $t+2$. Пусть B_i есть объединение множеств $A_{i,0}, \dots, A_{i,p-1}$. Пусть H — некоторый одноцветный связный подграф. Если все его ребра покрашены в цвет 1, то все его вершины принадлежат одному из множеств B_i , то есть у него не более n/p вершин. Пусть все его ребра покрашены в цвет $t \neq 1$. Выберем в нем произвольную вершину X . Пусть она принадлежит множеству $A_{i',j'}$. Тогда, двигаясь из нее по ребрам цвета t , можно в каждом из множеств B_i посетить только вершины одного множества $A_{ij''}$ (а именно, для такого $0 \leq j'' \leq p-1$, что $j'' \equiv (t-2)(i-i') + j' \pmod{p}$). Значит, и в этом случае подграф H содержит не более n/p вершин.

Автор благодарен А. С. Штерну за плодотворные обсуждения и М. Н. Вялому, предложившему более простое по сравнению с первоначальным доказательство леммы 1.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

Д. В. Аносов. **От Ньютона к Кеплеру.** 2006. 272 с.

В книге рассказывается, как можно объяснить законы Кеплера движения планет на основе законов механики.

Б. П. Гейдман, Т. В. Ивакина, И. Э. Мишарина. **Математика. 4 класс.** Учебник для четвертого класса начальной школы. 1-е полугодие 2006. 120 с. 2-е полугодие 2006. 120 с.

Б. П. Гейдман, И. Э. Мишарина. **Методические рекомендации по работе с комплектом учебников «Математика. 4 класс».** 2006. 116 с.

Глобус. Общематематический семинар. Выпуск 3. Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. 2006. 164 с.

Цель семинара «Глобус» — по возможности восстановить единство математики. Семинар рассчитан на математиков всех специальностей, аспирантов и студентов. Третий выпуск включает доклады С.Алескера, В.М.Бухштабера, П.Делиня, С.Б.Каток, А.Н.Паршина, А.Б.Сосинского, А.Г.Хованского, М.А.Цфасмана, С.Б.Шлосмана.

Э. Г. Готман. **Стереометрические задачи и методы их решения.** 2006. 160 с.

Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты. 2006. 616 с.

Колмогоров в воспоминаниях учеников. Сборник статей. Редактор-составитель А. Н. Ширяев. 2006. 472 с.

Московские математические олимпиады 1993–2005 г. Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Яценко. Под ред. В. М. Тихомирова. 2006. 456 с.

Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

Я. Б. Песин. **Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности.** Пер. с англ. под ред. Ю. С. Ильяшенко. 2006. 144 с.

Книга является введением в современную теорию частичной гиперболичности. Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

Я. П. Понарин. **Элементарная геометрия. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства.** 2006. 256 с.

Т. Рат, Д. О. Клифтон. **Позитивные стратегии для работы и жизни. Зачем и как наполнять Вёдра?** Пер. с англ. Н. А. Шиховой. 2006. 104 с.

Словарь криптографических терминов. Под ред. Б.А. Погорелова и В.Н. Сачкова. 2006. 94 с.

А. Я. Хинчин. **Избранные труды по теории чисел.** 2006. XX + 260 с.

А.Г. Хованский, С.П. Чулков. **Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям.** 2006. 128 с.

18 × 18. Вступительные задачи ФМШ при МГУ. Составители Н. Б. Алфутова, Ю. Е. Егоров, А. В. Устинов. 2006. 160 с.

XI Турнир математических боёв им. А. П. Савина. 2006. 96 с.

XXVIII Турнир им. М. В. Ломоносова 25 сентября 2005 года. Задания, решения, комментарии. Сост. А. К. Кулыгин. 2006. 142 с.

По мотивам задачника «Математического просвещения»

Дискретные положительные гармонические функции

С. Г. Слободник

Предлагается новое, более короткое, решение задачи 5.9б) из задачника «Математического просвещения».

Гармонической на целочисленной решетке \mathbb{Z}^n называется такая функция $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(f(x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) \right).$$

ТЕОРЕМА. *Гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция постоянна.*

Частными случаями этой теоремы являются пункты б) и в) задачи 5.9 из задачника «Математического просвещения». В предыдущем выпуске «Математического просвещения» было опубликовано доказательство этой теоремы [1]. Здесь мы изложим более простое доказательство.

Для обозначения точек решетки \mathbb{Z}^n будем использовать малые латинские буквы или записанные в скобках координаты соответствующих точек. Через e_k будем обозначать точку с координатами $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на k -м месте. Точку с нулевыми координатами будем для краткости обозначать через 0.

Точки решетки можно складывать покомпонентно. В таких обозначениях условие гармоничности переписывается как

$$f(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(x + e_i) + f(x - e_i)). \quad (1)$$

Рассмотрим множество F гармонических на \mathbb{Z}^n функций, таких что

$$f(x) > 0, \quad \text{для любого } x \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{условие нормировки}). \quad (3)$$

Множество F непусто, так как оно содержит тождественно равную 1 функцию u . Если $f(x)$ — гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция, то $f(x)/f(0) \in F$. Мы докажем теорему, установив, что множество функций F не содержит никаких других функций, кроме u .

План доказательства таков. Мы введем линейный порядок на функциях из \mathbb{Z}^n в \mathbb{R} и покажем, что максимальная (и минимальная) относительно этого порядка функции в F должны быть константами. Существование максимальной (равно как и минимальной) функции следует из компактности F в топологии поточечной сходимости. Мы приведём элементарное доказательство этого факта, не использующее теорему Тихонова.

На этом доказательство теоремы завершается: максимальный элемент равен минимальному, поэтому в множестве F есть только одна функция u .

Начнём со вспомогательного замечания: положительные гармонические функции не могут расти очень быстро. А именно, введем обозначение

$$|x - y| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (4)$$

Тогда справедлива простая оценка роста положительной гармонической функции.

ЛЕММА 1. *Если f — гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция, то для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n$ выполнено*

$$f(y) < f(x)(2n)^{|x-y|}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $y = x + e_k$ неравенство (5) немедленно следует из условий гармоничности и положительности:

$$2nf(x) = f(y) + \langle \text{положительные слагаемые} \rangle > f(y).$$

Осталось заметить, что за $|x - y|$ единичных шагов по решетке \mathbb{Z}^n можно перейти из x в y . \square

Сравнивая при помощи (5) значение $f(x)$ с $f(0) = 1$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \in F$, то $(2n)^{-|x|} < f(x) < (2n)^{|x|}$.

Так как множество \mathbb{Z}^n счетно, то существует биективное отображение

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

множества \mathbb{Z}^n на множество натуральных чисел \mathbb{N} . Через a_k будем обозначать такую точку решетки x , для которой $\varphi(x) = k$.

После того как мы занумеровали точки решетки, на функциях из \mathbb{Z}^n в \mathbb{R} возникает лексикографический порядок: $f < g$ тогда и только тогда, когда $f(a_k) < g(a_k)$ при некотором k , а на всех меньших точках функции равны $f(a_i) = g(a_i)$ при $i < k$.

ЛЕММА 2. Если в множестве F относительно лексикографического порядка существуют наибольшая функция M и наименьшая функция m , то $M = m = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in F$ определим функции $S_i f$:

$$S_i f(x) = f(x)f(e_i) - f(x + e_i)f(0) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{Z}^n. \quad (6)$$

Функция $S_i f$ гармоническая, так как является линейной комбинацией гармонических функций $f(x)$ и $f(x + e_i)$. При этом $S_i f(0) = 0$.

Из оценки роста (5) получаем, что

$$|S_i f(x)| \leq |f(x)| \cdot |f(e_i)| + |f(x + e_i)| < 4n|f(x)|. \quad (7)$$

Поэтому функции $f \pm (4n)^{-1} S_i f$ также принадлежат F .

Если $S_i f$ не равно тождественно 0, то f лежит строго между $f + (4n)^{-1} S_i f$ и $f - (4n)^{-1} S_i f$ в лексикографическом порядке. Отсюда заключаем, что для максимальной и минимальной функций должны выполняться равенства $S_i M = S_i m = 0$.

Теперь докажем, что если $S_i f = 0$ для любого i , то $f = u$. Из равенств

$$S_i f(x) = f(x)f(e_i) - f(x + e_i)f(0) = 0 \quad (8)$$

следует

$$f(x + e_i) = \frac{f(e_i)}{f(0)} f(x) = f(e_i) f(x). \quad (9)$$

Подставив в (9) вместо x вектор $x - e_i$, получим

$$f(x - e_i) = f(e_i)^{-1} f(x). \quad (10)$$

Условие гармоничности в 0 с учётом равенств (9) и (10) приобретает вид

$$2n = \sum_{i=1}^n (f(e_i) + f(e_i)^{-1}). \quad (11)$$

Так как для положительного числа a сумма $a + a^{-1}$ не меньше 2 и равна 2 только если $a = 1$, то из (11) следует, что $f(e_i) = 1$. Но тогда из (9)

и (10) следует, что в соседних точках решетки функция f принимает одинаковые значения. Поэтому она тождественно равна 1. \square

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в существовании наибольшей и наименьшей функции в F .

ЛЕММА 3. Множество F замкнуто относительно поточечной сходимости: если $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ и $f^n \in F$, то $g \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность предельной функции следует из оценки (5):

$$(2n)^{|x|}g(x) = (2n)^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0) = 1.$$

Условия гармоничности и нормировки — равенства и потому сохраняются при предельном переходе. \square

ЛЕММА 4. В множестве F относительно лексикографического порядка существуют наибольшая и наименьшая функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование максимума, существование минимума доказывается аналогично.

Следствие 1 из неравенства роста (5) показывает, что множество значений функций из F в любой точке ограничено. Воспользуемся нумерацией φ точек \mathbb{Z}^n . Построим семейство вложенных замкнутых множеств F_i и последовательность чисел c_i по следующему правилу:

$$F_0 = F, \quad F_i = \{f \mid f \in F_{i-1}, f(a_i) = c_i\}, \quad c_i = \sup_{f \in F_{i-1}} f(a_i).$$

Замкнутость множеств F_i доказывается аналогично лемме 3. Поэтому ни одно из множеств F_i не пусто, а функция M такая, что $M(a_k) = c_k$, принадлежит всем множествам F_i . С другой стороны, любая функция из $F = F_0$ не больше M по построению. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шольце П. О неотрицательных гармонических функциях на решетке // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2005. С. 236–242.

Одна задача о нахождении фальшивой монеты

Д. А. Михалин И. М. Никонов

Заметка посвящена решению задачи 10.10 из задачника «Математического просвещения» и родственным вопросам.

Наверное, каждый, кто участвовал в работе математических кружков, имел дело со следующей задачей:

Задумано натуральное число, меньшее 1024. На каждый вопрос отвечают «да» или «нет». За какое минимальное число вопросов можно угадать задуманное число?

Это типичный пример задачи на темы теории информации, когда речь идет о том, чтобы извлечь максимум информации из некоторого сообщения (в данном случае — совокупности ответов на вопросы). Существует целый класс задач такого рода, которые не требуют специальных знаний, но хорошо демонстрируют идеи теории информации: это задачи о нахождении фальшивой монеты.

Пусть дано несколько монет, и среди них одна монета фальшивая, а остальные настоящие, причем все настоящие — одинакового веса, а фальшивая — другого веса. Требуется найти алгоритм, гарантирующий определение фальшивой монеты за минимальное количество взвешиваний на чашечных весах без гирь. В некоторых задачах известен *относительный вес* фальшивой монеты (т. е. легче она или тяжелее настоящих), в некоторых нет; в последнем случае иногда требуется определить ее относительный вес, иногда нет.

Если разница в весе между фальшивой и настоящей монетами меньше минимального веса монеты, то результат взвешивания, при котором на чашках лежит разное число монет, определен однозначно, и можно проводить лишь такие взвешивания, когда число монет на чашках одинаково. Об этой ситуации и пойдет речь.

Различные типы задач на взвешивание рассмотрены в книге А. М. и И. М. Ягломов «Вероятность и информация» [1, с. 146–163]. Наибольшее внимание уделено следующему случаю: среди нескольких монет за наименьшее число взвешиваний найти фальшивую монету и определить ее

Ред. А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин

относительный вес [1, с. 157–162]. Показано, что за n взвешиваний это можно сделать в том и только том случае, когда количество монет не больше $(3^n - 3)/2$. Отсюда вытекает решение хорошо известной в фольклоре задачи [2, с. 10–11, задача 6а]:

Среди 12 монет имеется 1 фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее. За три взвешивания нужно определить фальшивую монету и ее относительный вес.

В известном сборнике Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома [2, с. 11] в качестве нерешенной была поставлена такая задача (номер 6б): среди нескольких монет найти единственную фальшивую за наименьшее число взвешиваний, если неизвестен относительный вес фальшивой монеты и не требуется его определить. Авторам настоящей статьи удалось решить эту задачу. Мы покажем следующее:

Максимальное число монет, из которых можно найти фальшивую за n взвешиваний, не определяя ее относительный вес, равно $(3^n - 1)/2$.

Этот результат докладывался в 1994 г. на научной конференции школьников «Поиск» (председатель оргкомитета А. Я. Канель-Белов, научный руководитель работы С. И. Комаров). Мы благодарны Т. Комразу и А. Я. Канель-Белову за полезное обсуждение. Часть материала этой статьи опубликована в заметке [3]. Для полноты изложения ряд задач (1, 2, 1', 4) повторяет задачи из книги А. М. и И. М. Ягломов [1]. Авторы благодарят редакторов статьи А. Я. Канеля-Белова и Б. Р. Френкина за предоставленный дополнительный материал.

1. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ

Начнем с более простого вопроса. Широко известна следующая задача:

ЗАДАЧА 1. Дано 3^n монет, из них одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний можно найти фальшивую монету, если известно, что она тяжелее настоящих?

РЕШЕНИЕ. Покажем, что если всего монет 3^n , то при известном относительном весе можно найти фальшивую монету за n взвешиваний. Если количество монет больше 3^n , то n взвешиваний недостаточно. Этот результат не зависит от наличия дополнительных, заведомо настоящих монет.

Проведем индукцию по n . Случай $n = 0$ тривиален. Пусть $n > 0$ и для $n - 1$ утверждение верно. Разобьем монеты на три группы по 3^{n-1} монет в каждой и взвесим первые две. Если веса равны, то фальшивая монета — в оставшейся куче. В противном случае, если фальшивая легче, то она в более легкой группе, а если тяжелее — в более тяжелой. В любом случае после первого взвешивания группа монет, среди которых идет поиск,

уменьшилась в три раза. Значит, за n взвешиваний фальшивую монету найти можно.

Покажем, что нельзя обойтись меньшим числом взвешиваний. Пусть у нас есть k подозрительных монет (из которых надо определить фальшивую) и, может быть, сколько-то монет, про которые мы знаем, что они настоящие. Достаточно показать, что после любого взвешивания количество подозрительных монет может уменьшиться не более чем втрое.

Всего имеется k вариантов (k возможных номеров фальшивой монеты.) Каждое взвешивание имеет три возможных исхода (перевесила левая чашка, перевесила правая, уравнились). Разным исходам отвечают разные варианты. Таким образом, варианты делятся на три группы. Одна из групп содержит не меньше трети от исходного числа вариантов, откуда и следует доказываемое утверждение.

Значительно сложнее среди нескольких монет найти фальшивую, если неизвестен ее относительный вес.

ЗАДАЧА 2. Докажите следующие утверждения.

а) Если число монет не меньше $(3^n + 1)/2$, то за n взвешиваний нельзя найти фальшивую монету, узнав при этом ее относительный вес, даже если имеется некоторое количество дополнительных настоящих монет.

б) Если число монет не меньше $(3^n - 1)/2$ и нет дополнительных настоящих монет, то за n взвешиваний нельзя найти фальшивую монету, узнав при этом ее относительный вес.

РЕШЕНИЕ. а) Случай $n = 0$ тривиален. Пусть $n > 0$ и для $n - 1$ утверждение верно. После первого взвешивания возможны две ситуации.

1) Осталось не менее $(3^{n-1} + 1)/2$ неиспользованных монет. Тогда в случае равновесия все они подозрительны, и по предположению индукции оставшихся $n - 1$ взвешиваний не хватит.

2) Взвешены более чем 3^{n-1} монет. В случае неравновесия любая из них может оказаться фальшивой. Тогда, как показано в задаче 1, за оставшиеся $n - 1$ взвешиваний фальшивую невозможно определить (даже при известном относительном весе), и это рассуждение не зависит от наличия дополнительных настоящих монет. Утверждение а) доказано.

б) Случай $n = 0$ тривиален. Пусть $n > 0$ и для $n - 1$ утверждение верно. После первого взвешивания возможны следующие ситуации.

1) Осталось не менее $(3^{n-1} + 1)/2$ неиспользованных монет. Тогда в случае равновесия все они подозрительны, и согласно результату п. а) оставшихся $n - 1$ взвешиваний не хватит.

2) Взвешено не менее 3^{n-1} монет. Но на чашках равное количество монет, поэтому количество взвешенных четно и, значит, больше 3^{n-1} .

В случае неравновесия все они подозрительны, и, в силу результата задачи 1, оставшихся $n - 1$ взвешиваний не хватит. Утверждение б) доказано.

Тем не менее, если $n > 1$ и количество монет равно $(3^n - 1)/2$, то за n взвешиваний можно определить фальшивую (не определяя ее относительный вес). Если же количество монет меньше $(3^n - 1)/2$, то можно определить и относительный вес. Это будет показано в разделе 2.

Соображения, связанные с подсчетом числа исходов взвешивания, позволяют прийти к оптимальным алгоритмам нахождения фальшивой монеты. Надо так подбирать взвешивания на каждом шаге, чтобы количество вариантов, отвечающих трем возможным исходам, делилось максимально равномерно. Так можно придумать алгоритм, приведенный в разделе 2, и доказать оценку из раздела 3.

УПРАЖНЕНИЕ 1. а) Покажите, что в задаче о 12 монетах (см. начало статьи) при первом взвешивании необходимо положить на чашки по 4 монеты, а 4 оставить невзвешенными.

б) Покажите единственность (с точностью до перенумерации монет) алгоритма из задачи 1.

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Нам потребуется несколько усложненный вариант задачи 1:

ЗАДАЧА 1'. Дано 3^n монет, из них одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний можно найти фальшивую монету, если про каждую монету известно, каков окажется ее относительный вес в случае, если она фальшивая?

РЕШЕНИЕ. Ответ снова n . Случай $n = 0$ тривиален. Проведем индуктивный переход от $n - 1$ к n . Все 3^n монет распадутся на две группы: «легкую» и «тяжелую». В одной из этих групп четное количество монет, в другой нечетное. Отложим в сторону 3^{n-1} монет, причем в первую очередь будем откладывать из «нечетной» группы. После этого у нас в каждой группе останется четное число монет (возможно, в «нечетной» останется 0). Теперь каждую группу разделим пополам между двумя чашками весов. Если чашки уравнились, то фальшивая монета среди 3^{n-1} отложенных, и по предположению индукции мы найдем ее за оставшиеся $n - 1$ взвешиваний. Если чашки не уравнились, то фальшивая монета — либо среди «легких» монет с легкой чашки, либо среди «тяжелых» с тяжелой. Подозрительные монеты составляют половину от взвешенных, т. е. всего их 3^{n-1} , и по предположению индукции нам потребуется еще не более $n - 1$ взвешиваний. Недостаточность меньшего числа взвешиваний

(даже при наличии дополнительных настоящих монет) доказываем так же, как в задаче 1.

ЗАДАЧА 3. Пусть $n > 0$. Докажите следующие утверждения.

а) Пусть количество монет равно $(3^n - 1)/2$ и среди них одна фальшивая. Тогда, положив при первом взвешивании на чашки весов по $(3^{n-1} - 1)/2$ монет, можно найти фальшивую за n взвешиваний — не определив ее относительный вес.

б) Если имеется $(3^n + 1)/2$ монет и одна заведомо настоящая, то также достаточно n взвешиваний.

РЕШЕНИЕ. Пусть $n = 1$. Тогда в п. а) у нас только одна монета (фальшивая). В п. б) у нас 2 подозрительных монеты, 1 настоящая и 1 взвешивание. Сравнив одну из подозрительных монет с настоящей, найдем фальшивую монету. (Мы не узнаем ее относительный вес, если фальшивая монета окажется невзвешенной.)

Пусть теперь $n > 1$ и доказываемые утверждения верны для $n - 1$. Докажем аналогичные утверждения для n .

ПУНКТ А). ПЕРВОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ. Заметим, что справедливо равенство $(3^n - 1)/2 = (3^{n-1} - 1)/2 + (3^{n-1} - 1)/2 + (3^{n-1} + 1)/2$. Положим на каждую чашку весов $(3^{n-1} - 1)/2$ монет.

Случай 1.1. Чашки уравнились. Тогда фальшивая монета среди тех $(3^{n-1} + 1)/2$ монет, которые мы не взвешивали. Так как имеются заведомо настоящие монеты (все остальные), по предположению индукции можно найти фальшивую монету за оставшиеся $n - 1$ взвешиваний.

Случай 1.2. При первом взвешивании одна из чашек (для определенности, левая) перевесила. Тогда $(3^{n-1} + 1)/2$ монет, которые мы не взвешивали, настоящие. Назовем монеты на левой чашке «тяжелыми» (т. е. если среди них есть фальшивая, то она тяжелее), а монеты на правой чашке — «легкими». Произведем такое взвешивание: на левую чашку положим 3^{n-2} настоящих и $(3^{n-2} - 1)/2$ «тяжелых» монет, а на правую чашку 3^{n-2} «тяжелых» и $(3^{n-2} - 1)/2$ «легких». Кроме этого, останется 3^{n-2} «легких» монет и некоторое количество заведомо настоящих.

ВТОРОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ. *Случай 2.1.* Чашки уравнились. Тогда фальшивая монета среди тех 3^{n-2} «легких» монет, которые мы не взвешивали, и, следовательно, она легче остальных. Согласно результату задачи 1, нам теперь хватит $n - 2$ взвешиваний, и задача решена.

Случай 2.2. Левая чашка перевесила. Тогда фальшивая монета — или среди $(3^{n-2} - 1)/2$ «тяжелых» на левой чашке, или среди $(3^{n-2} - 1)/2$ «легких» на правой. Но такая ситуация возможна после первого взвешивания $(3^{n-1} - 1)/2$ монет (так как мы тогда кладем на чашки по $(3^{n-2} - 1)/2$ монет), и в этом случае по предположению индукции можно найти фальшивую монету за $n - 2$ взвешиваний. Задача решена.

Случай 2.3. Правая чашка перевесила. Тогда фальшивая монета среди тех 3^{n-2} «тяжелых» монет, которые лежат на правой чашке. Согласно результату задачи 1, нам теперь хватит $n - 2$ взвешиваний. Утверждение а) доказано.

ПУНКТ Б). ПЕРВОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ. Положим на левую чашку весов $(3^{n-1} + 1)/2$ подозрительных монет, а на правую $(3^{n-1} - 1)/2$ подозрительных и 1 настоящую.

Случай 1.1. Чашки уравнились. Тогда фальшивая монета — среди оставшихся $(3^{n-1} + 1)/2$, и по предположению индукции мы найдем ее за $n - 1$ взвешиваний (располагая настоящей монетой).

Случай 1.2. Чашки не уравнились. Снимем с весов настоящую монету. На одной из чашек находится четное количество подозрительных монет, а на другой нечетное. Снимем с «нечетной» чашки 3^{n-2} монет, а остальные монеты с этой чашки распределим поровну между двумя чашками. Монеты с «четной» чашки также распределим поровну между двумя чашками.

ВТОРОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ. *Случай 2.1.* Чашки уравнились. Тогда фальшивая монета — среди оставшихся 3^{n-2} монет, взятых с «нечетной» чашки. Мы знаем, какая чашка перевесила при предыдущем взвешивании — «нечетная» или «четная». Поэтому нам известен относительный вес фальшивой монеты, и согласно результату задачи 1 мы найдем ее теперь за $n - 2$ взвешиваний.

Случай 2.2. Чашки не уравнились. Тогда фальшивая монета — среди тех монет, которые либо при обоих взвешиваниях были на «тяжелой» чашке, либо в обоих случаях были на «легкой». Таких монет 3^{n-2} . Про каждую мы знаем, каким окажется ее относительный вес, если она фальшивая. Согласно результату задачи 1', нам теперь хватит $n - 2$ взвешиваний. Утверждение б) доказано.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Покажите, что при достаточном запасе настоящих монет (каком именно?) можно определить фальшивую среди $(3^n - 1)/2$ монет и найти ее относительный вес за n взвешиваний.

ЗАДАЧА 4. Докажите, что среди $(3^n - 3)/2$ монет за n взвешиваний можно найти фальшивую монету и определить ее относительный вес.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что в алгоритме из задачи 3а обязательно остается хотя бы одна монета, которая ни разу не взвешивалась. Если в какой-то момент нужно положить на весы какие-то из еще не взвешенных монет, то мы можем выбрать любые из них, так как все невзвешенные монеты для нас одинаковы. Теперь возьмем $(3^n - 3)/2$ монет и мысленно добавим к ним еще одну настоящую монету. Будем действовать по алгоритму

из задачи 3, каждый раз включая воображаемую монету в число невзвешенных. При указанном алгоритме фальшивая монета либо останется единственной невзвешенной (но в данном случае это невозможно), либо попадет на весы, и тогда мы определим ее относительный вес.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Модифицируйте алгоритм задачи 4 для числа монет, меньшего чем $(3^n - 3)/2$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе будет решена

ЗАДАЧА 5. Докажите, что за n взвешиваний нельзя из более чем $(3^n - 1)/2$ монет найти фальшивую (даже если не требуется определить ее относительный вес).

РЕШЕНИЕ. Определим более четко, что же такое алгоритм построения системы взвешиваний. Занумеруем все n монет. Алгоритм взвешивания заключается в последовательности следующих действий.

- ▷ На первом шаге монеты с номерами i_1, \dots, i_{k_1} кладутся на левую чашку весов, монеты с номерами j_1, \dots, j_{k_2} — на правую и взвешиваются.
- ▷ На каждом шаге, в зависимости от результатов предыдущих взвешиваний, выбираются номера монет для левой и для правой чашки. Затем производится взвешивание.

Положим a_i равным 0, если при i -ом взвешивании чашки весов уравновесились; 1, если перевесила правая чашка; -1 , если перевесила левая. Назовем протоколом алгоритма последовательность (a_1, a_2, \dots, a_k) состояний весов при этих k взвешиваниях во время работы алгоритма. Назовем состоянием монетной системы число j ($1 \leq j \leq n$) — номер фальшивой монеты. Целью работы алгоритма является определение состояния.

Так как любой алгоритм в конце выдает номер фальшивой монеты, основываясь только на состояниях весов во время взвешиваний, то его можно представить как отображение множества протоколов в множество состояний монетной системы. Поэтому количество состояний монетной системы n меньше или равно количеству протоколов, т. е. $n \leq 3^k$.

Как показано выше (задача 4), максимальное число монет, среди которых можно найти фальшивую и определить ее относительный вес за k взвешиваний, равно $(3^k - 3)/2$. На первый взгляд кажется, что в случае, когда не надо находить относительный вес фальшивой монеты, максимальное число монет должно возрасти в два раза, то есть должно равняться $3^k - 3$. Для трех взвешиваний тогда получаем, что максимальное

число равно 24, но непосредственной проверкой можно убедиться, что уже среди 14 монет нельзя найти фальшивую за 3 взвешивания. Почему же максимальное число монет оказалось настолько меньше ожидаемого? Дело в том, что почти во всех случаях работы алгоритма мы узнаем не только номер монеты, но и ее относительный вес.

Назовем *подсостоянием* монетной системы пару чисел (j, i) , где j — состояние монетной системы, а i — относительный вес фальшивой монеты ($i = -1$, если фальшивая монета легче настоящих, и $i = 1$, если тяжелее).

Назовем протокол $(0, 0, \dots, 0)$ *нулевым*. Так как каждому протоколу может соответствовать только одно состояние монетной системы, то существуют $n - 1$ состояний (и $2(n - 1)$ подсостояний), которым соответствуют ненулевые протоколы. Назовем такие состояния *ненулевыми*.

Основное наблюдение состоит в следующем:

ЛЕММА О ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ. *Каждому ненулевому протоколу отвечает только одно подсостояние монетной системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть взвешивания произведены и состояние монетной системы определено. Пусть протокол ненулевой, т. е. в какой-то момент одна чашка перевесила другую. Ясно, что тогда на весах лежала фальшивая монета. В этом случае мы определим не только *состояние* монетной системы, но и ее *подсостояние*, т. е. не только номер фальшивой монеты, но и ее *относительный вес*.

В самом деле, мы знаем, что фальшивая монета участвовала во взвешивании, знаем ее номер и на какую чашку она легла. Но по протоколу взвешивания и информации, на какой из двух чашек лежит фальшивая монета, мы определим и ее относительный вес. Лемма доказана.

Теперь выберем произвольный алгоритм, который за k взвешиваний среди n монет определяет фальшивую монету. Согласно лемме, количество ненулевых подсостояний не больше, чем количество ненулевых протоколов, то есть $2(n - 1) \leq 3^k - 1$. Следовательно, $n \leq (3^k + 1)/2$.

Докажем, что *верхнюю оценку можно понизить еще на единицу*. Пусть $n = (3^k + 1)/2$; m_1 — число монет, которые кладутся на весы при первом взвешивании; m_2 — число остальных монет. Предположим, что $m_2 > (3^{k-1} + 1)/2$. Тогда, если весы уравновесятся при первом взвешивании, то фальшивая монета окажется среди этих m_2 монет, и мы не сможем найти ее за $k - 1$ взвешивание, согласно доказанному в предыдущем абзаце. Следовательно, $m_2 \leq (3^{k-1} + 1)/2$. Тогда $m_1 \geq 3^{k-1}$. Так как m_1 четно, то $m_1 > 3^{k-1}$.

Рассмотрим случай, когда весы при первом взвешивании не уравновесились. Тогда фальшивая монета находится среди группы из m_1 монет. Существует $2 \cdot 3^{k-1}$ протоколов, удовлетворяющих этому условию. Так как весы хотя бы один раз не пришли в равновесие, то, определив номер

фальшивой монеты, мы узнаем относительный вес монеты, то есть алгоритм различает подсостояния наших m_1 монет. Тогда количество подсостояний m_1 монет не больше, чем количество протоколов, у которых на первом месте стоит ± 1 , т. е. $2m_1 \leq 2 \cdot 3^{k-1}$. Значит, $m_1 \leq 3^{k-1}$. Но $m_1 > 3^{k-1}$. Противоречие.

Следовательно, если алгоритм за k взвешиваний среди n монет находит фальшивую, то $n \leq (3^k - 1)/2$.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Покажите *единственность* (с точностью до перенумерации монет) приведённых выше алгоритмов.

ЗАДАЧА НА ИССЛЕДОВАНИЕ. *Исследуйте случай нескольких фальшивых монет.*

КОММЕНТАРИЙ А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВА. Меня познакомил с авторами этой статьи (тогда школьниками) замечательный учитель — Сергей Григорьевич Роман. К сожалению, его уже нет в живых.

Школьники решили открытый вопрос, стоявший около 20 лет. Краткость решения означает наличие стратегической, «философской» идеи. И такая идея — дополнительной информации, которую мы вынуждены получить, — в работе присутствует (см. раздел 3). Замечательно, что авторы, в то время школьники, нашли новый подход к задачам теории информации.

Для этого потребовалось понять, что такое *алгоритм определения фальшивой монеты*, и формализовать это понятие. Вообще, с процедурой *формализации* связано интересное явление. Она нужна прежде всего для доказательства невозможности. Чтобы показать наличие построения циркулем и линейкой, достаточно его привести. Формализация не нужна — достаточно общего понимания процедуры построения на уровне здравого смысла. Однако когда требуется доказать *невозможность* построения, необходимо саму процедуру превратить в математический объект, т. е. *формализовать*. Классические примеры: неразрешимость уравнений пятой степени в радикалах и доказательство теоремы Гёделя (о наличии верных, но недоказуемых утверждений в арифметике). В последнем случае потребовалась формализация понятия математического доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яглом А. М., Яглом И. М. *Вероятность и информация*. М.: Наука, 1973 (3-е изд.).

- [2] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1.* М.: Физматлит, 2001 (6-е изд.).
- [3] Михалин Д., Никонов И. *Задача о нахождении фальшивой монеты* // *Фунд. и прикл. матем.* Т. 1, №2, 1995. С. 561–563.

Нам пишут

И вновь о критерии Куратовского планарности графов

А. Б. Скопенков

А. С. Телишев

Граф называется *планарным* (синоним: *плоским*), если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (то есть ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались.

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$.*

Простое доказательство достаточности в этой теореме предложено в [1]. Это доказательство можно немного упростить, сделав его последний шаг менее зависимым от остального. Упрощение основано на следующем факте.

ЛЕММА. *Пусть для любого ребра xy графа G граф $G - x - y$ является циклом. Тогда G изоморфен одному из графов K_5 или $K_{3,3}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть xy — ребро графа G и n — число вершин в цикле $G - x - y$.

При $n = 3$ для любых двух вершин b и c цикла $G - x - y$ граф $G - b - c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $G - x - y$ соединена (ребром) в G и с x , и с y . Поэтому $G = K_5$.

При $n \geq 4$ возьмем любые четыре соседние вершины a, b, c, d цикла $G - x - y$. Поскольку граф $G - b - c$ является циклом, то в G одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a, b, c, d вершины цикла $G - x - y$ (которых нет при $n = 4$) не соединены ни с x , ни с y . При $n \geq 5$ получаем противоречие. При $n = 4$ получаем, что четыре вершины цикла $G - x - y$ соединены с x и y попеременно, откуда $G = K_{3,3}$.

Теперь покажем, как упростить доказательство теоремы Куратовского, используя доказанную лемму.

Будем рассматривать графы с петлями и кратными ребрами. Предположим, напротив, что существует непланарный граф, не содержащий подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Среди всех таких графов выберем граф G с минимальным числом ребер, не содержащий изолированных вершин. В первых двух шагах и в первом абзаце третьего шага [1, с. 119–121] доказано, что

(*) для любого ребра xy графа G граф $G - x - y$ является циклом.

В остатке третьего шага [1, с. 121–122] доказывается, что

(**) G изоморфен одному из графов K_5 или $K_{3,3}$.

Это и приводит к необходимому противоречию.

Приведенная лемма показывает, что утверждение (**) можно доказать по-другому, причем используя только утверждение (*) (без использования шага 1 из [1], непланарности графа G и построения вложения в плоскость).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скопенков А. *Вокруг критерия Куратовского планарности графов* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 116–128.

Поправка

Е. Д. Куланин

К сожалению, в статье Е. Д. Куланина «О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя» в 10 сборнике «Математического просвещения» за 2006 г. на с. 259 допущена досадная, но легко исправимая ошибка: на самом деле асимптоты кубики Мак-Кэя пересекаются не в центре окружности Эйлера, а в центре тяжести треугольника. Приведем исправленные формулировки теорем и утверждений.

ТЕОРЕМА 14. Кубика Мак-Кэя произвольного треугольника имеет три асимптоты, которые пересекаются в центре тяжести этого треугольника и параллельны прямым, пересекающимся в центре окружности Эйлера и проходящим через три точки касания окружности Эйлера с прямыми Симсона.

ТЕОРЕМА 15. Пусть I — окружность с центром на равносторонней гиперболы Γ , проходящая через центр F этой гиперболы. Тогда асимптоты кубик Мак-Кэя всех треугольников, вписанных в гиперболу Γ и описанных около окружности I , соответственно параллельны.

СЛЕДСТВИЕ 7. Асимптоты кубики Мак-Кэя произвольного треугольника соответственно параллельны осям кривой Штейнера этого треугольника.

Кроме того, в тексте необходимы следующие исправления:

1) В конце первого абзаца в доказательстве теоремы 15 на с. 261 должны быть опущены слова «но по теореме 14 центр окружности Эйлера треугольника является точкой пересечения асимптот кубики Мак-Кэя этого треугольника».

2) На с. 262 в 4-й строке сверху после слов «с их общей окружностью Эйлера» должно быть: «и поэтому совпадут прямые, проходящие через центр окружности Эйлера и эти точки касания. Тогда по теореме 14 асимптоты кубики Мак-Кэя треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны осям указанного правильного треугольника. Поскольку треугольники ABC получаются из треугольников $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром F , то асимптоты их кубик Мак-Кэя также соответственно параллельны».

3) На с. 263 в 7-й строке снизу слово «общие» должно быть заменено на слово «параллельные».

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}. \quad (М. Панов)$$

2. Назовем *кубоидом* выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, комбинаторно эквивалентный кубу (т. е. существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, ребрами и гранями, сохраняющее примыкание). Рассмотрим для каждой грани точку пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Эти 6 точек являются вершинами некторого октаэдра.

Какие значения может принимать отношение объема этого октаэдра к объему исходного кубоида? (Р. М. Травкин)

3. A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_n — два разбиения единичного квадрата на непересекающиеся измеримые множества. S_{ij} — пересечение множеств A_i и B_j , $|G|$ — площадь множества G . Докажите неравенство:

$$\sum_{ij} |S_{ij}| \cdot \ln(|S_{ij}|) \geq \sum_i |A_i| \cdot \ln(|A_i|) + \sum_j |B_j| \cdot \ln(|B_j|). \quad (К. Шеннон)$$

4. d -мерная ладья бьет по прямым вдоль осей координат.

а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d -мерном кубе $n \times \dots \times n$ так, чтобы они не били друг друга?

Назовем расстановку ладей *полной*, если в ней максимально возможное число ладей.

б) Слоем трехмерного куба $n \times n \times n$ назовем квадрат $n \times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоев заполнены полно (т. е. в них стоят nk ладьей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной расстановки всего куба. Верно ли аналогичное утверждение для четырехмерного куба?

в) В трехмерном кубе $n \times n \times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Рассматриваются подкубы $(k \times k \times k$, для каждого k один подкуб, всего n подкубов) с этой угловой клеткой. В каждом таком подкубе оказывается некоторое число ладей из нашей расстановки, и в некоторых подкубах расстановка оказывается полной (т. е. стоит максимально возможное число для данного k).

Каково максимальное число таких подкубов с полной расстановкой? Аналогичный вопрос для d -мерного куба. (А. Я. Канель)

5. На плоскости отметили n непересекающихся отрезков и $n + 2$ точки, которые не лежат на этих отрезках. Докажите, что найдутся две точки, которые «видят» друг друга (т. е. соединяющий их отрезок не пересекает отмеченные отрезки). (М. Концевич)
6. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n . Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$? (Э. Туркевич)
7. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2n]$, таких, что $F(0) = 0$ и на любом интервале $(k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, производная равна ± 1 .
 - а) Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $f(2n) = 0$?
 - б) Как подсчитать число функций, таких, что $-n/k < f(x) < n/k$? (А. Я. Белов)
8. В пространстве даны две гладкие кривые C_1 и C_2 . Рассматривается множество S прямых $l = (A, B) : A \in C_1, B \in C_2$. Докажите, что если некоторая кривая C_3 , непересекающаяся с $C_1 \cup C_2$, пересекает каждую прямую из S , то обе кривые C_1 и C_2 лежат в одной плоскости. (А. Kanel-Belov, J. Kaminsky, M. Taicher)
9. Можно ли множество рациональных точек единичной сферы раскрасить в два цвета (черный и белый) так, что если три точки отвечают концам трех ортогональных векторов, то одна из них будет черной, а две другие — белыми? (Д. Муштару)

10. Пусть A, B — целочисленные матрицы. Известно, что $\det(A) = 1$, $\det(B) \neq 0$. Докажите, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $B^{-1}A^nB$ — целочисленная матрица. (Фольклор)
11. Дано $2n + 1$ грузов попарно различной массы и чашечные весы без гирь. Докажите, что за $100n$ взвешиваний можно найти медиану (т. е. средний по массе груз). (Фольклор)
12. Двое по очереди на доске пишут многочлены от n переменных. Запрещается писать многочлен R , если:
- (1) R представим в виде суммы кратных ранее написанных многочленов, т. е. $R = \sum_{i=1}^k R_i Q_i$ при некоторых Q_i ;
 - (2) 1 представляется в виде суммы кратных написанных многочленов и кратного R : $1 = \sum_{i=1}^k R_i Q_i + RQ$ при некоторых Q_i, Q .
- Проигрывает тот, кто не может сделать хода.
- а) Докажите, что игра заканчивается.
 - б) Кто выигрывает при правильной игре? (А. Белов, Г. Челмоков)

Уточнение условия

Условие задачи 7.10 задачника «Математического просвещения» было сформулировано неточно. Приводим уточнение формулировки.

- а) В пространстве даны две гладкие поверхности S_1 и S_2 , заданные уравнениями $f = 0$ и $f = 1$ и гомеоморфные плоскости. Известно, что любую точку поверхности S_1 можно соединить с некоторой точкой поверхности S_2 такой ломаной длины не более 1, которая находится в области $0 < f < 1$ (за исключением начальной и конечной точек). Можно ли установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками S_1 и S_2 так, чтобы соответствующие точки находились бы на расстоянии меньше 10^6 ?
- б) Аналогичный вопрос для плоскости (S_0 и S_1 — линии уровня функции, гомеоморфные прямой).

Решения задач из предыдущих выпусков

6.7. УСЛОВИЕ. Пусть G — бесконечный ориентированный граф, $V(n)$ — число вершин, в которые можно попасть из фиксированной вершины O не более чем за n шагов. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n)/n^2 = 0$, то найдется вершина графа, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит.

РЕШЕНИЕ. В условии задачи не было сказано, но предполагалось, что в графе нет кратных стрелок (рёбер). В противном случае утверждение задачи по очевидным причинам ложно.

Назовём шаром $B_r(O)$ радиуса r с центром в точке O множество вершин, в которые можно попасть из вершины O не более чем за r шагов по стрелкам графа. Сферой $S_r(O)$ радиуса r с центром в точке O назовём множество вершин графа, в которые можно попасть за r шагов, но нельзя попасть за меньшее число шагов.

Ясно, что $S_r(O) = B_r(O) \setminus B_{r-1}(O)$, а $V(r) = |B_r(O)|$, $|M|$ обозначает число элементов множества M . Положим $T_r(O) = |S_r(O)| = V(r) - V(r-1)$.

Теперь предположим, что из каждой вершины выходит больше стрелок, чем входит, и придём к противоречию.

ЛЕММА 1. *Количество стрелок, выходящих из вершин шара $B_r(O)$ и заканчивающихся в вершинах вне шара $B_r(O)$, не меньше $|B_r(O)|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсчитаем разность между количеством входящих и выходящих стрелок для каждой вершины $B_r(O)$ и сложим эти числа. По сделанному предположению результат S не меньше $|B_r(O)|$. Каждая стрелка, соединяющая вершины шара даёт нулевой вклад в сумму. Положительный вклад (равный 1) дают стрелки, выходящие из вершин шара в вершины вне шара.

ЛЕММА 2. $V(r) \leq T(r) \cdot T(r+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стрелки, ведущие из $B_r(O)$ наружу, начинаются в вершинах $S_r(O)$ и заканчиваются в вершинах $S_{r+1}(O)$. Каждая пара вершин соединена не более чем одной стрелкой, поэтому количество стрелок не больше $T(r) \cdot T(r+1)$. Осталось воспользоваться предыдущей леммой.

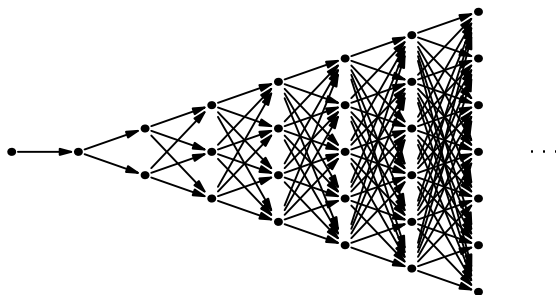


Рис. 1.

Применяя неравенство Коши $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, лемму 2, и очевидное неравенство $V(r) \geq V(r - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} V(r + 1) - V(r - 1) &\geq 2\sqrt{(V(r + 1) - V(r))(V(r) - V(r - 1))} \geq \\ &\geq 2\sqrt{V(r)} \geq 2\sqrt{V(r - 1)}. \end{aligned}$$

Последовательность $s_n = V_{2n}, \geq 0$ удовлетворяет условиям

$$s_0 = 1, \quad s_{n+1} \geq s_n + 2\sqrt{s_n}.$$

Отсюда по индукции получаем оценку $s_n \geq n^2/2$, значит, $V(r) \geq (r-1)^2/2$. Приходим к противоречию с условием задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ. На рис. 1 приведен пример графа, у которого из каждой вершины выходит больше стрелок, чем входит, а объём шара $V(r) = r(r + 1)/2$, так что оценка в задаче асимптотически точна. Более того, можно показать, что если $V(r) < r(r + 1)/2$, при некотором r , то найдется вершина, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит. Если же для любого C при всех достаточно больших r выполняется неравенство $V(r) < r^2/2 - Cr$, то число таких вершин бесконечно. В то же время, для фиксированного C существует граф с конечным числом вершин, в которые входит не меньше стрелок, чем выходит, и такой, что $V(r) < r^2/2 - Cr$.

(А. Я. Белов)

7.12. УСЛОВИЕ. Могут ли 4 квадрата натуральных чисел образовывать арифметическую прогрессию?

КОММЕНТАРИЙ. Эту задачу сформулировал П. Ферма в одном из своих писем к Мерсенну (предположительно в 1641 году). Решение он не приводит. Впоследствии задача была решена многими математиками. В изложенном ниже рассуждении используются идеи Л. Эйлера (из его записных книжек).

ОТВЕТ: не могут.

РЕШЕНИЕ. Предположим противное: найдутся натуральные числа $x < a < b < y$, квадраты которых образуют арифметическую прогрессию.

Имеем тогда: $b^2 - x^2 = y^2 - a^2$, откуда

$$\frac{b+x}{y+a} = \frac{y-a}{b-x} = \frac{m}{n},$$

где $\frac{m}{n}$ — запись предыдущих (равных) дробей в виде несократимой дроби.

Тогда найдутся такие натуральные s и t , что $b+x = sm$, $y+a = sn$ и $y-a = tm$, $b-x = tn$, откуда $x = \frac{sm-tn}{2}$, $a = \frac{sn-tm}{2}$, $b = \frac{sm+tn}{2}$.

По условию $b^2 - a^2 = a^2 - x^2$. Подставив в это равенство выражения x , a , b через m , n , s , t , преобразуем его к виду $(m^2 - n^2)(t^2 - s^2) = 2mnst$. Мы решим задачу, если будет доказана

ЛЕММА 1. Не существует натуральных чисел m , n , s , t , удовлетворяющих равенству $(m^2 - n^2)(t^2 - s^2) = 2mnst$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Предположим противное: такие числа найдутся. Если s и t имеют общий делитель, можно поделить равенство на квадрат этого делителя и получить аналогичное равенство. Поэтому будем считать, что s и t взаимно просты, и аналогично m и n взаимно просты. Очевидно также, что $m \neq n$, $s \neq t$.

Заметим, что не могут быть одновременно m и n разной четности и s и t разной четности (иначе левая часть равенства нечетна, а правая четна). Пусть, например, s и t одной четности (а значит нечетны).

Поделив равенство на n^2 , получим относительно $\frac{m}{n}$ квадратное уравнение:

$$\left(\left(\frac{m}{n} \right)^2 - 1 \right) (t^2 - s^2) = 2st \frac{m}{n}.$$

Дискриминант этого уравнения равен $4(s^4 - s^2t^2 + t^4)$ и должен быть квадратом рационального числа, откуда (так как s и t целые) $s^4 - s^2t^2 + t^4$ — квадрат целого числа.

Осталось доказать, что справедлива

ЛЕММА 2. Если нечетные натуральные числа s и t различны, число $s^4 - s^2t^2 + t^4$ не может быть квадратом целого числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.

Предположим противное. Возьмем тогда такие натуральные s , t и целое $z \geq 0$, что $s^4 - s^2t^2 + t^4 = z^2$ и сумма $s^2 + t^2$ наименьшая возможная.

Числа s и t взаимно просты (иначе есть аналогичное равенство для меньших чисел, чем s и t), а значит и z взаимно просто с s и с t .

По предположению $(s^2 - t^2)^2 = z^2 - (st)^2$, и так как $s \neq t$, получаем, что $(z + st)(z - st)$ — квадрат натурального числа. Найдем наибольший общий делитель четных чисел $z + st$ и $z - st$. Он делит сумму $2z$ и разность

$2st$ этих чисел, и, значит, равен 2. Значит, найдутся натуральные числа k и l такие, что $z + st = 2k^2$, $z - st = 2l^2$, откуда $z = k^2 + l^2$, $st = k^2 - l^2$.

Заметим, что число $3(st)^2 + z^2$ равно $(s^2 + t^2)^2$, то есть является квадратом натурального числа. Подставляя вместо z и st их выражения через k и l , получим, что квадратом является $3(k^2 - l^2)^2 + (k^2 + l^2)^2 = 4(k^4 - k^2l^2 + l^4)$, а значит $k^4 - k^2l^2 + l^4$ тоже квадрат. Но $k^2 + l^2 = z < s^2 + t^2$ (очевидно, если возвести в квадрат), что противоречит выбору s и t . Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 2 верна для любых различных натуральных чисел s и t , желающие могут найти доказательство самостоятельно.

ЛИТЕРАТУРА.

1. П. Ферма. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М.: Наука, 1992. С. 34.

2. Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. СПб.: Наука, 1997. С. 99–102.

3. W. Sierpinski. Elementary theory of numbers. Monografie Matematyczne. Tom 42. Warszawa, 1964. С. 73–75. Электронная версия есть на сайте <http://matwbn.icm.edu.pl> (С. А. Дориченко)

8.9. УСЛОВИЕ. Сфера раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами.

РЕШЕНИЕ. Впишем в сферу икосаэдр и докажем, что найдется правильный треугольник на его вершинах, покрашенный в один цвет. Предположим противное и рассмотрим раскраску в красный и синий цвет, не содержащую одноцветных правильных треугольников.

Будем считать, что вершина A (см. рис. 1) покрашена в красный цвет. Диаметрально противоположную ей вершину обозначим A' . Икосаэдр состоит из правильных пятиугольных пирамид с вершинами в A и A' и правильной пятиугольной антипризмы между ними. Вершины, связанные ребрами с A , назовем верхним слоем, а связанные с A' — нижним слоем.

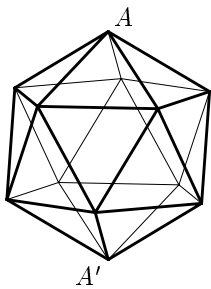


Рис. 1.

Заметим, что в верхнем слое нет пары соседних красных вершин (иначе они и A образуют правильный треугольник). Аналогично, в нижнем слое нет пары красных вершин, идущих через одну.

Значит, в каждом слое не больше двух красных вершин и не меньше трех синих. Но тогда A' — красная (иначе к ней можно было бы применить рассуждение, которое мы привели для A , и найти одноцветный правильный треугольник).

(Вершина A была выбрана произвольно, поэтому мы фактически доказали, что противоположные вершины икосаэдра покрашены одинаково.)

Но теперь оказывается, что в обоих слоях нет пары красных вершин (такая пара либо соседняя, либо расположена через одну). Значит, в верхнем слое есть три подряд идущие синие вершины S_1, V, S_2 . Вершина V' , противоположная V , также синяя (вершину A мы выбрали произвольно, поэтому мы фактически доказали, что противоположные вершины икосаэдра покрашены одинаково). Но тогда S_1, V', S_2 образуют правильный одноцветный треугольник.

КОММЕНТАРИЙ. Естественно поставить более общий вопрос: сфера раскрашена в несколько цветов. Верно ли что найдется правильный n -угольник с одноцветными вершинами? Ответ на этот вопрос (сферический аналог теоремы Ван дер Вардена) неизвестен даже для треугольника. Теорема Ван дер Вардена для аффинного пространства звучит так: пространство раскрашено в несколько цветов. Тогда для любого конечного множества найдется подобное ему одноцветное. Теореме Ван дер Вардена для аффинного пространства посвящена статья В. О. Бугаенко («Математическое просвещение», третья серия, выпуск 10, 2006. С. 151–160).

Неизвестен аналог теоремы Ван дер Вардена и для неевклидовой плоскости. (А. Я. Белов)

9.9. УСЛОВИЕ. Сколько синтаксически правильных выражений из n символов можно составить, если использовать только символы двух переменных X и Y , открывающую (и закрывающую) скобки, запятую (,), символ двуместной функции g и символ одноместной функции f ?

Синтаксически правильные выражения определяются индуктивно: X, Y — синтаксически правильные выражения, любое синтаксически правильное выражение имеет вид $f(A)$ или $g(A, B)$, где A, B — синтаксически правильные выражения меньшей длины.

РЕШЕНИЕ. Будем называть синтаксически правильные выражения *термами*.

Пусть T — множество всех термов. Тогда

$$T = f(T) \cup g(T, T) \cup \{X, Y\}. \quad (1)$$

Здесь $g(T, T)$ означает множество термов вида «символ g , открывающаяся скобка, произвольный терм, запятая, другой произвольный терм, закрывающая скобка». Аналогично определяется $f(T)$.

Если записать все термы по разу через знак объединения \cup , потом заменить \cup на $+$, а символы $f, g, ,, (,)$ на соответствующие коммутирующие переменные $x_f, x_g, x, x(, x), x_X, x_Y$, то после группировки подобных

членов получится выражение

$$\tau = \sum_{n_i=0}^{\infty} K_{n_1, \dots, n_7} x_f^{n_1} x_g^{n_2} x_{,}^{n_3} x_{(}^{n_4} x_{)}^{n_5} x_X^{n_6} x_Y^{n_7},$$

где K_{n_1, \dots, n_7} — число термов с n_1 вхождениями символа f , n_2 вхождениями символа g , n_3 вхождениями символа запятой, \dots , n_7 вхождениями Y . Такое выражение называется *производящей функцией*.

Равенство (1) в коммутирующих переменных превращается в уравнение

$$\tau = x_f x(\tau x) + x_g x(\tau x, \tau x) + x_X + x_Y. \quad (2)$$

Сделаем замену переменных $\bar{f} = x_f x(x)$; $\bar{g} = x_g x(x, x)$, $\bar{X} = x_X$, $\bar{Y} = x_Y$, получим равенство

$$\tau = \bar{f}\tau + \bar{g}\tau^2 + \bar{X} + \bar{Y}. \quad (3)$$

Комбинаторный смысл замены в том, что символу f отвечает пара скобок, а символу g — пара скобок и запятая; если баланс не соблюдается, то таких термов нет. Отсюда

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(\bar{X} + \bar{Y})\bar{g}/(1 - \bar{f})^2}}{2\bar{g}(1 - \bar{f})}.$$

Разложив это выражение в ряд Тейлора, можно вычислить коэффициенты. Для этого мы воспользуемся (для $\alpha = 1/2$) формулой бинома Ньютона

$$(1 + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k,$$

где $\binom{\alpha}{k} = \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - (k - 1)) / k!$. Имеем:

$$\tau = \sum_{k, l, n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{2n} \frac{(\bar{X} + \bar{Y})^n \bar{g}^n}{(1 - \bar{f})^{2n}}.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(1 - y)^l} = \left(\frac{1}{(1 - y)} \right)^{(l)} = A_l^k y^l,$$

($A_l^k = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-(l-1))$, $\varphi^{(l)}$ означает l -кратное дифференцирование). Получим

$$\tau = \sum_{n \geq m, k, l, m, n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{2n} A_{2k+1}^l \binom{n}{m} \bar{f}^k \bar{g}^n \bar{X}^m \bar{Y}^{n-m}.$$

Коэффициент

$$\binom{1/2}{n} 2^{2n} A_{2k+1}^l \binom{n}{m}$$

равен числу термов, содержащих m вхождений X , $n - m$ вхождений Y , k вхождений f и n вхождений g . В этом случае имеется ровно $k + n$ вхождений открывающих и $k + n$ закрывающих скобок, n запятых.

Поскольку нас интересует только общее число символов, сделаем замену $t^4 \rightarrow \bar{g}, t^3 \rightarrow \bar{f}, t \rightarrow \bar{X}, t \rightarrow \bar{Y}$ (показатели степени отвечают числу символов, например, \bar{g} отвечает 4 символа $g, (,), ,$). Имеем

$$\tau' = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(t+t)t^4/(1-t^3)^2}}{2t^4(1-t^3)} = \frac{1 - \sqrt{1 - 8t^5/(1-t^3)^2}}{2t^4(1-t^3)}.$$

Аналогично получаем

$$\tau' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\binom{1/2}{k} 2^{14k} t^{5k-4}}{(1-t^3)^{2k+1}}.$$

В силу равенства для разложения в ряд $\frac{1}{(1-y)^l}$ имеем

$$\tau' = \sum_{k,l=1}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} 2^{14k} t^{5k-4+3l} A_{2k+1}^l.$$

Отсюда следует, что количество термов, содержащих ровно m символов, равно

$$\sum_{k \geq 0, l \geq 0, 5k-4+3l=m} \left| \binom{1/2}{k} \right| 2^{14k} A_{2k+1}^l.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Аналогичные формулы справедливы для случая термов, содержащих функциональные буквы от любого числа переменных. В этом случае производящая функция будет алгебраической функцией степени, равной максимальной валентности функциональной буквы. Ясно, что все коэффициенты ряда Тейлора получающейся алгебраической функции будут целыми числами. Для произвольной алгебраической функции количество простых чисел, входящих в знаменатели коэффициентов ряда Тейлора, будет конечным (как сообщил мне М. Концевич).

2. Имеется классическая задача о числе способов $T(n)$ правильно расставить скобки в неассоциативном слове из n символов. Ясно, что $T(1) = T(2) = 1, T(3) = 2$. Рассматривая закрывающую скобку, парную самой левой открывающей, получаем рекуррентное соотношение

$$T(n) = \sum_{k+l=n, k, l \geq 2} T(k)T(l).$$

Из него легко получить, что производящая функция $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} T(k)t^k$ удовлетворяет уравнению $\tau^2 - \tau + t = 0$. Из разложения функции $(1 - \sqrt{1-4t})/2$

легко получить коэффициенты $T(k) = 2^{2k-1} \binom{1/2}{k}$. Задача о числах Каталана предлагалась на летней конференции Турнира городов в 2001 году.
(А. Я. Белов)

10.2. УСЛОВИЕ. Кривая C задана в \mathbb{R}^4 параметрически уравнениями $x_i = P_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где многочлены $P_i(\tau)$ имеют степень 3. Докажите, что C живет в трехмерной плоскости (т. е. найдется 3-мерное аффинное подпространство, которое ее содержит).

РЕШЕНИЕ. Пусть A — точка кривой C , отвечающая значению параметра $\tau = 0$. Сдвинем начало координат в точку A . При этом уравнение кривой будет иметь вид $x_i = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau = P_i(\tau)$; $i = 1, \dots, 4$ (свободные члены исчезли).

Четыре вектора $\vec{e}_i = (a_i, b_i, c_i)$; $i = 1, \dots, 4$ линейно зависимы, т. е. при некоторых $\{\lambda_i\}_{i=1}^4$, из которых не все равны нулю, выполняется равенство $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{e}_i = 0$. Но тогда все коэффициенты суммы $\sum_{i=1}^4 \lambda_i P_i$ нулевые и при всех τ выполняется тождественное равенство $\sum_{i=1}^4 \lambda_i P_i(\tau) \equiv 0$. Оно означает, что кривая C лежит в трехмерном линейном пространстве.

Аналогичным образом показывается, что кривая n -й степени лежит в n -мерном аффинном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Многочлен n -й степени от k переменных

$$P(\tau_1, \dots, \tau_k) = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i \leq n} a_N \prod_{i=1}^k \tau_i^{n_i}$$

имеет $\binom{n}{k} + 1$ коэффициент. Отсюда можно получить, что параметрическое многообразие M степени n размерности k , задаваемое равенствами

$$x_j = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i \leq n} a_{Nj} \prod_{i=1}^k \tau_i^{n_i}; j = 1, \dots, k,$$

лежит в аффинном подпространстве размерности $\binom{n}{k}$. В случае общего положения оно не лежит в пространстве меньшей размерности (для любых n и k).

2. Задача возникла из дифференциальной геометрии. Касательная прямая к гладкой кривой имеет близость 2-го порядка в точке касания, соприкасающаяся плоскость — третьего и т. д. Поскольку гладкую кривую с точностью до членов $n + 1$ порядка малости можно приблизить кривой n -го порядка, из решения задачи следует, что расстояние до соприкасающегося n -мерного пространства в точке касания имеет порядок малости $n + 1$.
(А. Я. Белов)

10.4. УСЛОВИЕ. На плоскости проведены n систем равноотстоящих прямых; i -я система состоит из всех прямых вида $a_i x + b_i y = c_i + k, k \in \mathbb{Z}$. При этом никакие три прямых не пересекаются в одной точке, и никакие две системы не параллельны. Эти системы разбивают плоскость на многоугольники. Пусть S — средняя площадь многоугольника, S_{ij} — площадь параллелограмма решетки, порожденной i -й и j -й системами. Докажите, что

$$S^{-1} = \sum_{i < j} S_{ij}^{-1}.$$

(Средняя площадь многоугольника — это величина $S = \lim_{t \rightarrow +\infty} S_t / N_t$, где S_t — общая площадь всех многоугольников разбиения, целиком содержащихся в круге радиуса t с центром в начале координат, N_t — количество этих многоугольников.)

РЕШЕНИЕ. i -я и j -я системы разбивают плоскость на решетку параллелограммов площади S_{ij} . Соответственно, S_{ij}^{-1} — это число таких параллелограммов в пересчете на единицу площади. Далее, в квадрате со стороной R площади R^2 количество частей разбиения $N(R)$ будет удовлетворять асимптотическому равенству $N \sim S \cdot R^2$, поэтому S^{-1} есть среднее число частей разбиения в единице площади и доказываемое равенство $S^{-1} = \sum_{i < j} S_{ij}^{-1}$ означает соответствие между параллелограммами решеток и частями разбиения.

Опишем это соответствие. Выберем направление общего положения, т. е. не перпендикулярное ни одной из прямых разбиения. Назовем его направлением *вниз*. Тогда у каждой части разбиения однозначно определен нижний угол, пара прямых его образующих и, соответственно, параллелограмм решетки с тем же нижним углом. Аналогичным образом каждому параллелограмму можно сопоставить многоугольник разбиения.

Теперь рассмотрим круг радиуса $R \rightarrow \infty$ и соответствие между частями, попавшими в этот круг. Из-за граничных эффектов соответствие нарушается. Следующая лемма показывает, что этими нарушениями можно пренебречь:

ЛЕММА 1. Пусть D — максимальный диаметр параллелограммов решеток. Рассмотрим круг радиуса $R \rightarrow \infty$.

а) Существует константа C_1 такая, что количество частей разбиения выпуклой фигуры диаметра D системами прямых не превосходит C_1 .

б) Существуют константы C_2 и C_3 такие, что количество параллелограммов решеток, а также частей разбиения попавших в круг радиуса R , не превосходит $C_2 R^2$ и не меньше $C_3 R^2$.

в) Существует константа C_4 такая, что количество параллелограммов решеток, а также частей разбиения попавших в полосу между концентрическими кругами радиуса R и $R + 3D$, не превосходит $C_4 R$.

г) При этом $\lim_{R \rightarrow \infty} C_4 R / (C_3 R^2) = 0$.

КОММЕНТАРИИ. 1. Для разбиения n -мерного пространства k системами равноотстоящих плоскостей общего положения справедлива аналогичная формула:

$$V^{-1} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} V_{i_1 < \dots < i_n}^{-1}.$$

Систему прямых общего положения можно задать вектором интенсивности \vec{f} , направленным по нормали к плоскостям системы, длина которого равна d^{-1} , где d — расстояние между соседними плоскостями системы. Это — средняя площадь участков плоскостей системы в пересчете на единицу объема. Тогда $V_{i_1 < \dots < i_n}^{-1}$ равен $\vec{f}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{f}_{i_n}$ — определителю матрицы, составленному из соответствующих векторов интенсивности. Формулу можно обобщить для непрерывного распределения систем плоскостей по направлениям. Данная формула верна не только для равноотстоящих систем, но и при довольно широких предположениях о законе распределения расстояний между ними. При самых широких предположениях получается равенство

$$V^{-1} = \frac{1}{2^n n!} \int \rho_{\vec{e}_1} \cdot \dots \cdot \rho_{\vec{e}_n} |\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_n|$$

Каждое \vec{e}_i (вектор направлений) независимо пробегает $(n - 1)$ -мерную единичную сферу, $\rho_{\vec{e}_i}$ — соответствующая плотность интенсивности, множитель $\frac{1}{2^n n!}$ возникает из-за того, что один и тот же элемент объема возникает $2^n n!$ способами (перестановки и смена знаков). Когда направления систем сосредоточены в дискретном наборе возможностей (функция распределения есть сумма δ -функций), мы имеем дискретную формулу, доказываемую как выше. Общий случай получается аппроксимацией.

2. Задача возникла при вычислении средних объемов частей разбиения пространства системами трещин.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А. Я. Белов. *Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов*. Дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.м.н. М.: МГИ, 1991.

2. Л. Санталло. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*. М.: Наука, 1983. (А. Я. Белов)

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

- С. П. Бобров. **Волшебный дворог**. 3-е изд. 2006. 512 с.
- О. Н. Василенко. **Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии**. 2-е изд., доп. 2006. 336 с.
- Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. **Прямые и кривые**. Библиотечка ОЛВЗМШ. 6-е изд., стереотипное. 2006. 128 с.
- И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. **Функции и графики (основные приемы)**. Библиотечка ОЛ ВЗМШ. 7-е изд., стереотипное. 2006. 120 с.
- С. Г. Гиндикин. **Рассказы о физиках и математиках**. 4-е изд., испр. 2006. 464 с.
- Р. К. Гордин. **Это должен знать каждый матшкольник**. 4-е изд., стереотипное. 2006. 56 с.
- В. А. Зорич. **Математический анализ**. Т. 1, 2. 5-е изд., испр. 2007. Часть I, 664 с. Часть II, 794 с.
- Е. Г. Козлова. **Сказки и подсказки (задачи для математического кружка)**. 3-е изд., стереотипное. 2006. 165 с.
- С. М. Львовский. **Набор и вёрстка в системе \LaTeX** . 4-е изд., стереотипное. 2006. 448 с.
- В. В. Прасолов. **Наглядная топология**. 2-е изд., доп. 2006. 112 с.
- В. М. Тихомиров. **Рассказы о максимумах и минимумах**. 2-е изд., исправленное. 2006. 200 с.
- В. В. Ткачук. **Математика — абитуриенту**. 13-е изд., испр. и доп. 2006. 960 с.
- Дж. Харрис. **Алгебраическая геометрия. Начальный курс**. 2-е изд., стереотипное. Перевод с англ. под ред. Ф.Л. Зака. 2006. 400 с.

* * * * *

По вопросам приобретения этих книг обращаться по адресу: 119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11, магазин «Математическая книга».

Тел.: (495)-241-7285, факс: (495)-291-6501, e-mail: biblio@mcsme.ru

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В №10

СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
198,	10 снизу	++	+

Редактор В. В. Ященко
Подготовка оригинал-макета: L^AT_EX2_ε,
METAPOST, М. Н. Вялый

Подписано в печать 05.02.2007 г. Формат 70 × 100/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 11,0. Тираж 1000.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического
образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241 74 83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“»
119009, г. Москва, Шубинский пер., 6
Заказ №