Нам пишут

И вновь о критерии Куратовского планарности графов

А. Б. Скопенков А. С. Телишев

Граф называется *планарным* (синоним: *плоским*), если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (то есть ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались.

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$.*

Простое доказательство достаточности в этой теореме предложено в [1]. Это доказательство можно немного упростить, сделав его последний шаг менее зависимым от остального. Упрощение основано на следующем факте.

Лемма. *Пусть для любого ребра xy графа G граф $G-x-y$ является циклом. Тогда G изоморфен одному из графов K_5 или $K_{3,3}$.*

Доказательство. Пусть xy — ребро графа G и n — число вершин в цикле $G-x-y$.

При $n=3$ для любых двух вершин b и c цикла $G-x-y$ граф $G-b-c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $G-x-y$ соединена (ребром) в G и с x, и с y. Поэтому $G=K_5$.

При $n \geqslant 4$ возьмем любые четыре соседние вершины a,b,c,d цикла $G-x-y$. Поскольку граф $G-b-c$ является циклом, то в G одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a,b,c,d вершины цикла $G-x-y$ (которых нет при $n=4$) не соединены ни с x, ни с y. При $n \geqslant 5$ получаем противоречие. При $n=4$ получаем, что четыре вершины цикла $G-x-y$ соединены с x и y попеременно, откуда $G=K_{3,3}$.

Теперь покажем, как упростить доказательство теоремы Куратовского, используя доказанную лемму.

Будем рассматривать графы с петлями и кратными ребрами. Предположим, напротив, что существует непланарный граф, не содержащий подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Среди всех таких графов выберем граф G *с минимальным числом ребер, не содержащий изолированных вершин.* В первых двух шагах и в первом абзаце третьего шага [1, с. 119–121] доказано, что

(∗) *для любого ребра xy графа G граф $G - x - y$ является циклом.*

В остатке третьего шага [1, с. 121–122] доказывается, что

(∗∗) *G изоморфен одному из графов K_5 или $K_{3,3}$.*

Это и приводит к необходимому противоречию.

Приведенная лемма показывает, что утверждение (∗∗) можно доказать по-другому, причем используя только утверждение (∗) (без использования шага 1 из [1], непланарности графа G и построения вложения в плоскость).

Список литературы

[1] Скопенков А. *Вокруг критерия Куратовского планарности графов* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 116–128.

А. Б. Скопенков, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Независимый московский университет

А. С. Телишев, гимназия №77, г. Набережные Челны