О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского

П. В. Бибиков И. В. Ткаченко

В геометрии Лобачевского «замечательных точек» в треугольнике «больше», чем в евклидовой геометрии. В данной статье рассматриваются *трисектор* и точка пересечения *бисекционных отрезков*. Точка T называется трисектором треугольника ABC, если площади треугольников TAB, TAC, TBC равны одной трети площади треугольника ABC. Бисекционным отрезком называется отрезок, который проходит через вершину треугольника и делит его на два равновеликих. Оказывается, что бисекционные отрезки треугольника пересекаются в одной точке. В евклидовой геометрии обе эти точки совпадают с точкой пересечения медиан.

1. Описание модели Пуанкаре геометрии Лобачевского

Геометрию Лобачевского можно интерпретировать с помощью терминов и объектов геометрии Евклида (иначе говоря, внутри евклидовой геометрии можно построить *модель* геометрии Лобачевского). Первая из подобных моделей (*модель Кэли – Клейна*) была создана для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. Здесь мы будем использовать другую модель — *модель Пуанкаре*. Эта модель во многом удобнее модели Кэли – Клейна.

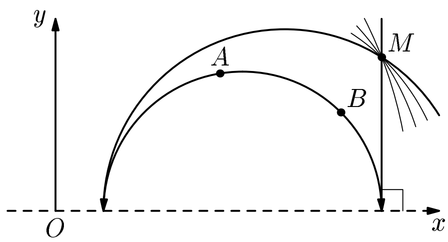

Рис. 1.

Плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x;y) \mid y > 0\}$ без границы $\{y = 0\}$. Прямую $\{y = 0\}$

вместе с бесконечно удаленной точкой назовем *абсолютом*. *Прямыми в геометрии Лобачевского* называются верхние полуокружности с центрами на абсолюте и лучи, перпендикулярные абсолюту. Точки абсолюта назовем *бесконечно удаленными*. *Параллельными прямыми в геометрии Лобачевского* являются прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Прямые, не имеющие общих (в том числе и бесконечно удаленных) точек, называются *сверхпараллельными*.

Нетрудно проверить, что модель Пуанкаре удовлетворяет всем аксиомам и постулатам абсолютной геометрии, кроме пятого постулата (через точку, не лежащую на данной прямой, проходят две прямые, параллельные данной, и бесконечное количество прямых, сверхпараллельных с данной), и построенная модель геометрии Лобачевского является *логически непротиворечивой* (если непротиворечива евклидова геометрия).

Углы между прямыми в геометрии Лобачевского равны углам между касательными, проведенными в точке пересечения соответствующих полуокружностей. Признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского совпадают с тремя признаками в евклидовой геометрии. Кроме того, к ним добавляется еще и четвертый признак: *равны треугольники с попарно равными углами.*

Площадь треугольника в геометрии Лобачевского равна

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

Для вычисления расстояния на плоскости Лобачевского удобно ввести в модели Пуанкаре комплексные координаты так, чтобы действительная ось совпадала с абсолютом, а положительный луч мнимой оси был направлен в полуплоскость модели Пуанкаре. Расстояние на плоскости Лобачевского между точками с координатами z_1 и z_2 равно

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}\,. \tag{1}$$

(См., например, [2].)

2. Эквидистанты

Эквидистанта есть геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой u (эту сторону мы будем называть *полуплоскостью эквидистанты*) на одинаковых расстояниях от нее. Прямая u называется *базой* эквидистанты, величина расстояния h — *высотой.*

Теорема 1. *Для перпендикулярных абсолюту лучей с началом в точке O эквидистантами являются наклонные лучи с тем же началом в точке O.*

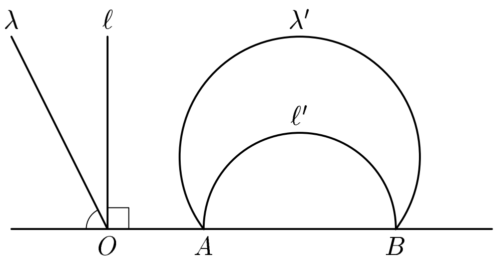

Рис. 2.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что O совпадает с началом координат (формула (1) инвариантна относительно сдвигов вдоль действительной оси). Возьмем на перпендикулярном абсолюту луче ℓ произвольную точку z_1 и проведем через нее окружность с центром в точке O (в геометрии Лобачевского это перпендикуляр к прямой ℓ). Пусть она пересекает наклонный луч λ в некоторой точке z_2. Из соображений подобия очевидно, что основанием перпендикуляра для любой точки pz_2 на луче λ будет точка pz_1. Так как

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} = \ln \frac{|pz_1 - p\bar{z}_2| + |pz_1 - pz_2|}{|pz_1 - p\bar{z}_2| - |pz_1 - pz_2|} = \rho(pz_1, pz_2),$$

расстояние между лучами ℓ и λ постоянно. Значит, λ является эквидистантой для прямой l (очевидно, что других точек в полуплоскости эквидистанты, удаленных на то же расстояние от ℓ, нет).

Теорема 2. *Для верхних полуокружностей, проходящих через бесконечно удаленные точки A и B, эквидистантами являются верхние дуги окружностей, проходящих через точки A и B.*

Доказательство. Возьмем луч ℓ, перпендикулярный абсолюту, с началом в точке A, и произвольную его эквидистанту λ. Проведем инверсию относительно окружности с центром в точке B и радиусом BA. По свойствам инверсии луч ℓ перейдет в верхнюю полуокружность, проходящую через точки A и B, а эквидистанта λ — в дугу окружности, проходящей через точки A и B. Поскольку инверсия сохраняет углы, она сохраняет и расстояния. Значит, эквидистанта перейдет в эквидистанту.

Теорема 3. *Каждая прямая имеет с эквидистантой не более двух общих точек.*

Доказательство. Поскольку в модели Пуанкаре прямые и эквидистанты являются евклидовыми окружностями или прямыми, то это утверждение следует из того, что прямые и окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

3. Четырехугольник Хайама – Саккери

В истории вопроса о параллельных линиях большую роль сыграл четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Впервые этот четырехугольник рассматривал Омар Хайам (1048–1122). Эта же фигура была положена в основу построения теории параллельных итальянским математиком Саккери (1667–1733), которому удалось получить ряд теорем неевклидовой геометрии. Однако Саккери ошибочно считал, что ему удалось обнаружить противоречие среди следствий положения, отрицающего постулат Евклида, и тем самым доказать этот постулат. Лобачевский не знал о работах Хайама и Саккери, однако и он в своих работах часто рассматривал тот же специальный вид четырехугольника, который мы будем в дальнейшем называть *четырехугольником Хайама – Саккери* или *четырехугольником Саккери*.

Итак, рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с двумя прямыми углами при вершинах A и B и с равными сторонами $AD = BC$. Будем называть сторону AB *базой*, сторону CD *антибазой* этого четырехугольника, а стороны AD и BC его *боковыми сторонами*. Отметим одно важное свойство четырехугольника Саккери: *углы при антибазе равны*. Из него следует, в частности, что углы при антибазе острые.

Пусть теперь ABC — произвольный треугольник, а MN — прямая, проходящая через середины M и N сторон AC и BC. Проведем перпендикуляры AP, BQ и CR к прямой MN и докажем, что они равны друг другу. Рассмотрим треугольники APM и CMR. Они равны по гипотенузе и острому углу, значит, $AP = CR$. Рассмотрим треугольники BNQ и CNR. Они равны по гипотенузе и острому углу, значит, $BQ = CR$. Поэтому $AP = BQ = CR$. Таким образом, $ABQP$ — четырехугольник Саккери с базой PQ. Будем говорить, что этот четырехугольник *присоединен к треугольнику ABC по стороне AB*.

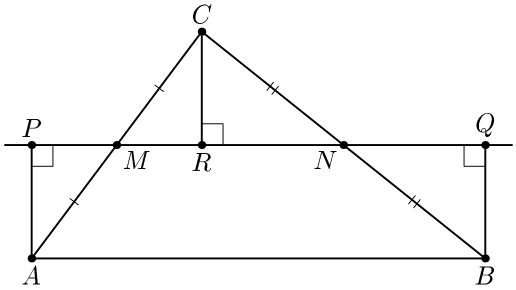

Рис. 3.

Теорема 4. *Каждый из острых углов четырехугольника Саккери, присоединенного к данному треугольнику ABC, равен $\sigma/2$, где σ — сумма углов треугольника ABC.*

Доказательство. Пусть $ABQP$ — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC по стороне AB. Докажем, что $\angle BAP = \angle ABQ = \sigma/2$. Рассмотрим случай, когда середины M и N боковых сторон треугольника лежат на отрезке PQ (другие случаи аналогичны). Пусть CR — перпендикуляр к прямой MN. Так как $\triangle APM = \triangle CRM$ и $\triangle BQN = \triangle CRN$, то $\angle ACR = \angle PAM$ и $\angle BCR = \angle QBN$. Но $\angle PAB + \angle QBA = \angle PAM + \angle CAB + \angle ABC + \angle NBQ = \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \sigma$. Учитывая, что $\angle PAB = \angle QBA$, получаем $\angle PAB = \angle QBA = \sigma/2$.

Теорема 5. *Четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC, равновелик с ним.*

Доказательство. Пусть $ABQP$ — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику ABC по стороне AB. Докажем, что площади этого четырехугольника и треугольника равны. Рассмотрим случай, когда середины M и N боковых сторон треугольника лежат на отрезке PQ (другие случаи разбираются аналогично). Пусть CR — перпендикуляр к прямой MN. Так как $\triangle APM = \triangle CRM$ и $\triangle BQN = \triangle CRN$, то $S(ABQP) = S(AMNB) + S(APM) + S(BQN) = S(AMNB) + S(CMR) + S(CNR) = S(ABC)$, что и требовалось.

Теорема 6. *Пусть антибаза четырехугольника Саккери равна a, боковая сторона равна h, а площадь равна S. Тогда*

$$\operatorname{th} h = \sin\frac{S}{2}\operatorname{cth}\frac{a}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь и далее мы будем использовать стандартные факты гиперболическй тригонометрии. Найти из можно, например, в [1, 5].

Доказательство. Пусть дан четырехугольник Саккери $ABQP$ с антибазой $AB = a$ и углом σ при ней. Введем следующие обозначения: $AQ = x$, $\angle AQB = \varphi$. Тогда

$$\frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{sh} x} = \cos\varphi = \frac{\operatorname{ch} h\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} h\operatorname{sh} x}$$

(первое равенство — теорема синусов в треугольнике APQ, второе — теорема косинусов в треугольнике ABQ). Кроме того, по теореме косинусов в треугольнике ABQ получаем, что

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} h\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} h\operatorname{sh} a\cos\sigma,$$

где σ — острый угол в четырехугольнике Саккери. Подставляя это равенство в первую формулу и упрощая, получаем

$$\operatorname{th} h = \cos\sigma \operatorname{cth}\frac{a}{2}\,.$$

Осталось воспользоваться формулой площади четырехугольника: $S = 2\pi - (\pi + 2\sigma) = \pi - 2\sigma$.

4. Трисектор

4.1. Одно геометрическое место точек

Найдем геометрическое место точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади.

Теорема 7. *Геометрическим местом точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади, является эквидистанта.*

Доказательство. Возьмем произвольный отрезок AB на прямой ℓ. Построим четырехугольник Саккери $ABCD$ с антибазой AB и данной площадью S. В каждой точке H прямой p, содержащей отрезок CD, в полуплоскость, не содержащую точки A относительно прямой p, восстановим перпендикуляр $HX = AC$ (рис. 4). Очевидно, что множество всех точек X есть эквидистанта с базой p. С другой стороны, площадь каждого треугольника AXB равна площади четырехугольника Саккери $ABDC$ и других искомых точек Y в полуплоскости эквидистанты нет. Действительно, взяв точку пересечения эквидистанты с перпендикуляром к прямой ℓ, проходящим через точку Y, получим, что либо $\triangle AXB \subset \triangle AYB$, либо $\triangle AYB \subset \triangle AXB$, т.е. $S(AXB) \neq S(AYB)$. Значит, эквидистанта действительно является искомым ГМТ.

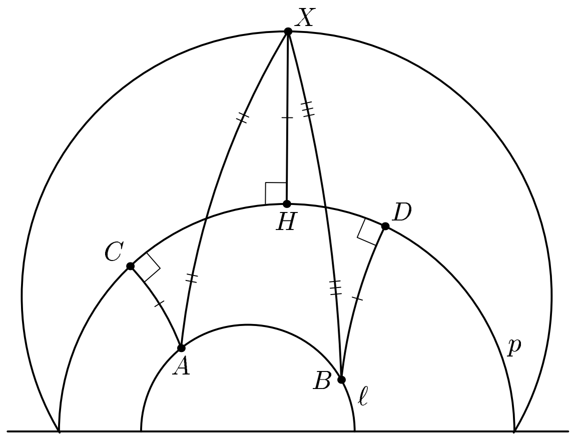

Рис. 4.

В этом случае будем говорить, что эквидистанта *ограничивает* треугольники данной площади S. Из формулы (2) немедленно следует, что высота ограничивающей эквидистанты выражается по формуле

$$\operatorname{th} h = \sin\frac{S}{2}\operatorname{cth}\frac{a}{2}\,,$$

где $AB = a$ — длина данного отрезка.

4.2. Существование и единственность трисектора

Теорема 8. *В каждом треугольнике существует трисектор, лежащий внутри треугольника.*

Доказательство. На двух сторонах треугольника ABC построим эквидистанты λ_1 и λ_2, ограничивающие треугольники площади, равной одной трети площади треугольника ABC. Докажем, что они пересекутся внутри треугольника ABC. Действительно, пусть эквидистанты построены на сторонах AB и AC, точки M_1, N_2 лежат на BC, точка M_2 — на AB, а точка N_1 — на AC, при этом $S(ABM_1) = S(ABN_1) = S(ACM_2) = S(ACN_2) = S(ABC)/3$, и построенные эквидистанты, проходящие соответственно через точки M_1, N_1 и M_2, N_2, не пересекаются. Тогда $BN_2 < BM_1$. Отсюда получаем, что $2S(ABC)/3 = S(ACM_1) < S(ACN_2) = S(ABC)/3$ — противоречие, значит, эквидистанты пересекаются в искомой точке T.

Теорема 9. *Для данного треугольника существует ровно один трисектор.*

Доказательство. Предположим, что для треугольника ABC существуют два трисектора T и T_1. Обозначим через A', B', C' точки, которые лежат на прямых AT, BT, CT соответственно, причем точка T лежит между A и A', B и B', C и C'. Плоскость разбивается лучами TA', TB', TC' на три угла. Точка T_1 попадает в один из них, допустим, это угол $A'TB'$. Тогда $S(ABC)/3 = S(ABT) < S(ABT_1) = S(ABC)/3$ — противоречие.

5. Точка пересечения бисекционных отрезков

Проведем в треугольнике ABC бисекционный отрезок CX. Будем использовать обозначения с рис. 5.

Поскольку площадь треугольника CXB равна половине площади треугольника ABC, то

$$\pi - (x + u + \beta) = \frac{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2}\,,$$

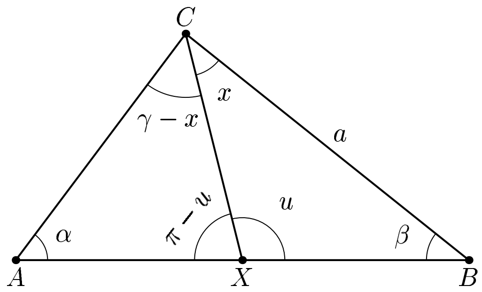

Рис. 5.

откуда

$$x + u + \beta = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\,. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{\pi + \alpha - \beta + \gamma}{2}\,, \qquad \omega = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}\,.$$

Лемма 1. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma - \sin\varphi\sin\gamma}{\sin\gamma(\cos\varphi + \cos\beta)}\,.$

Доказательство. Из формулы (3) получаем $x + u = \varphi$. По второй теореме косинусов для треугольника CXB

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos u + \cos x\cos\beta}{\sin x\sin\beta}\,,$$

$$\operatorname{ch} a\sin x\sin\beta = \cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x + \cos x\cos\beta,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ch} a\sin\beta - \sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\beta}\,. \tag{4}$$

По второй теореме косинусов для треугольника ABC

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\,.$$

Подставим в (4) и получим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma} - \sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\beta} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma - \sin\varphi\sin\gamma}{\sin\gamma(\cos\varphi + \cos\beta)}\,. \tag{5}$$

Лемма 2. $\dfrac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \dfrac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}\,.$

Доказательство. В самом деле

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\sin x}{\sin\gamma\cos x - \sin x\cos\gamma} = \frac{1}{\sin\gamma\operatorname{ctg} x - \cos\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma - \sin\varphi\sin\gamma}{\cos\varphi + \cos\beta} - \cos\gamma} = \frac{\cos\varphi + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos(\varphi - \gamma)} =$$

$$= \frac{\cos(\omega - \beta) + \cos\beta}{\cos\alpha + \cos(\omega - \alpha)} = \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}\,.$$

Предпоследнее равенство следует из

$$\varphi - \gamma = \frac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi - \alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - (\omega - \alpha).$$

Теорема 10. *Бисекционные отрезки пересекаются в одной точке.*

Доказательство. В доказательстве используем теорему Чевы для геометрии Лобачевского [1]: если

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} = 1, \tag{6}$$

то отрезки пересекаются в одной точке (обозначения на рис. 6).

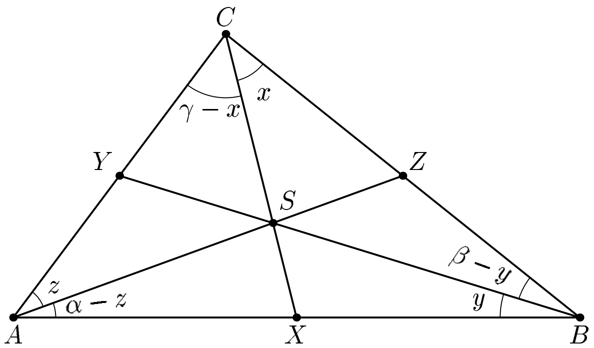

Рис. 6.

Преобразуем левую часть формулы (6) с помощью леммы 2. Получаем

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} =$$

$$= \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \alpha)}{\cos(\omega/2 - \gamma)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \gamma)}{\cos(\omega/2 - \beta)} = 1,$$

что и требовалось.

6. Трисектор, точка пересечения бисекционных отрезков и другие замечательные точки треугольника

В этом разделе мы проверим, что найденные выше точки — трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков — в общем случае не совпадают друг с другом и с другими замечательными точками треугольника:

ни с точкой пересечения медиан (как в геометрии Евклида), ни с точкой пересечения биссектрис, ни с точкой пересечения высот.

Для анализа взаимного расположения этих точек нам потребуется изучить геометрическое место точек, образующих с двумя данными отрезками с общим концом треугольники равной площади и лежащих внутри образованного этими отрезками угла. Назовем это ГМТ Σ. (Будем также использовать обозначения Σ_O или Σ_{AOB}, если нужно указать вершину угла или весь угол, относительно которого строится кривая Σ.)

Докажем следующий важный факт, относящийся к структуре Σ.

Теорема 11. *В общем случае любая прямая, проходящая через вершину угла, пересекает* Σ *не более одного раза (помимо вершины угла).*

Доказательство. Предположим противное: пусть есть угол $\widehat{AOB}$, прямая ℓ проходит через вершину O угла и пересекает Σ_{AOB} в двух точках M и N, тогда $S(OAM) = S(OBM)$, $S(OAN) = S(OBN)$, $S(AMN) = S(BMN)$. Отразим точку B симметрично относительно прямой ℓ, получим точку B_1, не совпадающую с A, для которой верны эти же равенства (рис. 7; если точки A и B_1 совпадают, то $OA = OB$ и Σ_{AOB} является биссектрисой угла $\widehat{OAB}$).

Докажем, что у всех этих треугольников общая средняя линия. Действительно, так как $S(OAM) = S(OB_1M)$, то у них общая средняя линия p, проходящая, в частности, и через середины сторон AM и B_1M, а значит, и через середины сторон AN и B_1N (см. рис. 7 и теорему 7).

Рассмотрим четырехугольники Саккери, присоединенные к треугольникам AOM и AMN по сторонам OM и MN соответственно. У этих

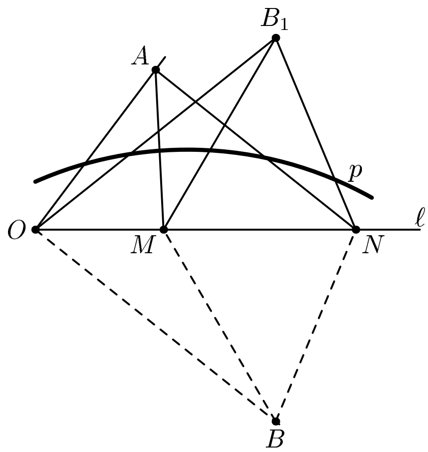

Рис. 7.

четырехугольников есть общая боковая сторона, поэтому расстояния от точек O, M и N до прямой p равны. Пришли к противоречию, так как прямая l не может пересекать эквидистанту в трех точках.

Следствие. *Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают.*

Теорема 12. *Пусть $AB < BC$, BL — биссектриса угла $\widehat{ABC}$. Тогда кривая Σ_{ABC} целиком лежит в угле $\widehat{LBC}$.*

Доказательство. Пусть N — произвольная точка Σ_{ABC}. Предположим, что точка N лежит в угле $\widehat{ABL}$. Отразим треугольник ABN относительно биссектрисы BL и получим треугольник A_1BN_1, где точка A_1 лежит на BC, а точка N_1 — внутри треугольника A_1BN. Приходим к противоречию:

$$S(ABN) = S(A_1BN_1) < S(A_1BN) < S(CBN),$$

но $S(ABN) = S(CBN)$ по определению Σ.

Следствие. *Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностроннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения биссектрис.*

Следствие. *Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения высот.*

Доказательство. Пусть так же, как в теореме, $AB < BC$, а BL — биссектриса, BH — высота в треугольнике ABC. Точно так же, как в евклидовой геометрии, докажем, что H лежит на отрезке AL. Отразим A относительно BH, получим точку A_1 на стороне AC. Треугольник ABA_1 равнобедренный, поэтому BH является его биссектрисой. Так как $\angle ABA_1 < \angle ABC$, то $\angle ABH < \angle ABL$.

Теорема 13. *Пусть $AB < BC$, M — основание медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B. Тогда часть Σ_{ABC}, находящаяся внутри треугольника ABC, лежит в треугольнике ABM.*

Доказательство. Обозначим через T_1 точку, симметричную B относительно точки M. Легко проверить, что T_1 лежит на Σ_{ABC}. Если найти на луче BM такую точку X, что $S(ABX) > S(CBX)$, то из теоремы 11 получим искомое утверждение.

Проведем среднюю линию в треугольнике ABC, которая пересекает медиану в точке K. Возьмем на отрезке BT_1 точку N так, чтобы $BK = KN$. Возможны два случая.

1. Точка N лежит на отрезке KM. Обозначим через σ_1 и σ_2 острые углы четырехугольников Саккери, присоединенных соответственно к треугольникам ABC и ABM. Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то

$$S(ABC) - 2S(ABM) = \\ = (\pi - 2\sigma_1) - 2(\pi - 2\sigma_2) = 2(2\sigma_2 - \sigma_1) - \pi < \\ < 2\sigma_2 - \pi < 0.$$

Значит, $S(ABM) > S(BCM)$ и можно взять $X = M$.

2. Точка N лежит на отрезке MT_1. Тогда $AN > CN$ и по формуле (2) получаем, что

$$\frac{\sin\dfrac{S(ABN)}{2}}{\sin\dfrac{S(BCN)}{2}} = \frac{\operatorname{th} AN}{\operatorname{th} CN} > 1, \quad \text{откуда } S(ABN) > S(BCN).$$

Можно взять $X = N$.

Следствие. *Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения медиан.*

7. Обобщение

С помощью Σ можно обобщить теоремы о пересечении бисекционных отрезков и медиан в треугольнике.

Теорема 14. *Если на Σ_A, Σ_B и Σ_C в треугольнике ABC отметить точки A_1, B_1 и C_1, такие, что $S(ABB_1) = S(BCC_1) = S(CAA_1)$, то прямые (AA_1), (BB_1) и (CC_1) пересекутся в одной точке.*

Доказательство. Пусть дан произвольный треугольник ABC и проведены Σ_A, Σ_B и Σ_C. Возьмем произвольную точку $B_1 \in \Sigma_B$. Введем следующие обозначения: $AB = 2a$, $BC = 2b$, $\angle ABB_1 = \alpha$, $\angle CBB_1 = B - \alpha$, $S(ABB_1) = S(CBB_1) = \pi - 2\sigma$. Проведем средние линии ℓ_1 и ℓ_2 в треугольниках ABB_1 и CBB_1, параллельные BB_1 и пересекающие сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке L (рис. 8). Опустим на них перпендикуляры BH_1 и BH_2, тогда по формуле (2) и по формулам тригонометрии в треугольниках BKH_1 и BLH_2 получаем следующие равенства:

$$\cos(\sigma - \alpha) \operatorname{th} a = \operatorname{th} BH_1 = \operatorname{th} BH_2 = \cos\bigl(\sigma - (B - \alpha)\bigr) \operatorname{th} b.$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin(\sigma - B) \operatorname{th} b + \sin\sigma \operatorname{th} a}{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} b - \cos\sigma \operatorname{th} a},$$

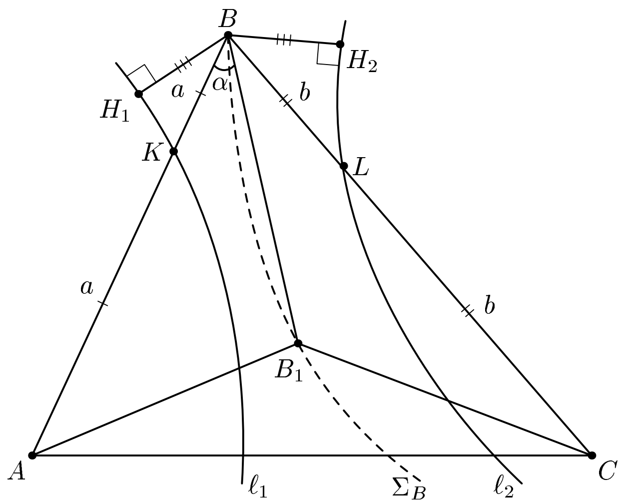

Рис. 8.

значит,

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cos(\sigma - B)\operatorname{th} a - \cos\sigma \operatorname{th} b}{\cos(\sigma - B)\operatorname{th} b - \cos\sigma \operatorname{th} a}\,.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{M_1 \operatorname{ctg}\sigma + N_1}{M_1' \operatorname{ctg}\sigma + N_1'}\,.$$

Аналогичные равенства верны и для двух других углов треугольника. Перемножим три полученных выражения, тогда получается равенство

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(A-\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

где $x = \operatorname{ctg}\sigma$ и $\deg f = \deg g = 3$. Нам нужно доказать, что $f \equiv g$. Но мы знаем, что $f = g$ при четырех различных σ (они соответствуют случаям трисектора, бисекционных отрезков, медиан и касательных, проведенных в вершинах, т. е. когда $\sigma = \pi/2$), а значит, для любого σ

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(C-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(A-\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

и по теореме Чевы получаем требуемое.

Задачи

1. Рассчитайте длину бисекционного отрезка, считая углы треугольника известными.

2. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делит сторону треугольника.

3. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делится точкой пересечения бисекционных отрезков.

4. Пользуясь леммой 2 (с. 120), докажите, что бисекционный отрезок в общем случае лежит между медианой и биссектрисой треугольника.

5. Докажите, что вне треугольника ABC существуют такие точки T_1, T_2, T_3, что площади треугольников ABC, ABT_1, ACT_1, BCT_1, ABT_2, ACT_2, BCT_2, ABT_3, ACT_3 и BCT_3 равны.

6. Докажите, что кривая Σ в общем случае не является ни прямой, ни окружностью, ни эквидистантой, ни орициклом.

7. Пусть Ω — это геометрическое место точек, из которых две стороны треугольника видны под равными углами. Докажите, что Ω лежит между высотой и Σ.

8. Докажите, что ни трисектор, ни точка пересечения бисекционных отрезков не совпадают с точкой Торичелли.

Список литературы

[1] Атанасян Л. С. *Геометрия Лобачевского.* М.: Просвещение, 2001.

[2] Гальперин Г. А. *Бильярдная формула для измерения расстояний на плоскости Лобачевского* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 8, 2004. С. 93–112.

[3] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия.* М.: Физматлит, 2003.

[4] Норден А. П. *Введение в геометрию Лобачевского.* М.: ГИТТЛ, 1953.

[5] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского.* 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

П. В. Бибиков, механико-математический факультет МГУ
email: tsdtp4u@proc.ru

И. В. Ткаченко, ФУПМ МФТИ
email: ilyatkc@yandex.ru