ГЛАВА III

Интегральная геометрия и гармонический анализ на плоскости и в пространстве Лобачевского

Особенность преобразований интегральной геометрии по сравнению с другими интегральными преобразованиями в том, что они часто допускают непосредственное обобщение с плоского случая на искривленный. Мы проиллюстрируем это здесь, рассматривая аналоги преобразования Радона для плоскости и пространства Лобачевского. Мы увидим, что они строятся по той же схеме, что и преобразование Радона для аффинного пространства, и даже структуры формул очень похожи. Впрочем, ненулевая кривизна пространства Лобачевского приводит к более богатой геометрии. Именно, на плоскости Лобачевского имеются два разных аналога прямых: собственно прямые, т. е. геодезические, и орициклы (окружности бесконечно большого радиуса). С ними связаны два разных варианта преобразования Радона.

Для плоскости (пространства) Лобачевского существует и аналог преобразования Фурье, основанный на унитарных представлениях группы движений. Ввиду некоммутативности этой группы, теория интеграла Фурье для плоскости (пространства) Лобачевского много сложнее, чем у его евклидова аналога. Вероятно, самый простой способ строить неевклидову теорию интеграла Фурье (теорию представлений) — через преобразование Радона, для орициклов (орисфер). Дело в том, что, как и в аффинном случае, в случае пространства Лобачевского аналог преобразования Радона для орициклов (орисфер) и аналог преобразования Фурье связаны при помощи одномерного (аффинного) преобразования Фурье. Ввиду этого орициклическое (орисферическое) преобразование Радона очень важно для построения гармонического анализа на плоскости и пространстве Лобачевского. Оно допускает обобщения на другие важные классы однородных многообразий. На примере плоскости и пространства Лобачевского мы моделируем весьма общие конструкции гармонического анализа на однородных многообразиях. При чтении этой главы очень полезно учитывать для сравнения соответствующие конструкции из § 1 и 2 главы I.

§ 1. Элементы планиметрии Лобачевского[1)]

1.1. Модели плоскости Лобачевского. Плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ является однородным пространством группы $SL(2,\mathbb{R})$ со стационарной подгруппой $SO(2)$ (подгруппа ортогональных матриц). В модели Пуанкаре она реализуется как верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, где движения, отвечающие матрицам $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, задаются так:

$$z \mapsto z \circ g = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}.$$

Очевидно, что стационарной подгруппой точки $z = i$ является подгруппа $SO(2)$[2)].

Риманова метрика на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2). \tag{1.1}$$

Инвариантное расстояние d между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется равенством

$$4\operatorname{sh}^2 \frac{d}{2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{y_1 y_2}. \tag{1.2}$$

Элемент площади в метрике (1.1) имеет вид:

$$dv = y^{-2}\, dx\, dy. \tag{1.3}$$

Другой вариант задания плоскости Лобачевского — многообразие вещественных симметрических матриц

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ где } a > 0,\ \det u = 1, \tag{1.4}$$

[1)] Основные факты по геометрии Лобачевского приводятся здесь без доказательства.

[2)] Заметим, что центр группы $SL(2,\mathbb{R})$, состоящий из двух элементов $\pm e$, действует неэффективно (сохраняет все точки). Поэтому удобно рассматривать в качестве группы движений фактор-группу $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm e\}$.

с движениями:

$$u \mapsto g' u g,\ g \in SL(2,\mathbb{R}),$$

где g' — транспонированная матрица. Заметим, что многообразие матриц вида (1.4) можно представить как одну полу двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$:

$$ac - b^2 = 1,\ a, c > 0. \tag{1.5}$$

Соответствие между точками z верхней полуплоскости и матрицами $u = u(z)$ осуществляется следующим образом. Точке $z = i$ соответствует единичная матрица e, поскольку точка i и матрица e имеют одну и ту же стационарную подгруппу. Отсюда следует, что для любого $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ точке $i \circ g = \frac{\alpha i + \gamma}{\beta i + \delta}$ соответствует матрица $u = g' g$. В частности, $i \circ g = x + iy$ при $g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ x y^{1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}$, и мы получаем, что точке $z = x + iy$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} y^{-1}(x^2 + y^2) & y^{-1}x \\ y^{-1}x & y^{-1} \end{pmatrix}$; другими словами, матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ соответствует точка $z = \frac{b}{c} + \frac{i}{c}$. Геометрически переход от полы двуполостного гиперболоида к полуплоскости осуществляется так. Сначала мы проектируем гиперболоид (1.5) на плоскость (b, c) параллельно оси a; в проекции получаем полуплоскость $c > 0$. Затем в плоскости (b, c) осуществляем проективное преобразование $(b, c) \mapsto (\frac{b}{c}, \frac{1}{c})$, переводящее полуплоскость $c > 0$ в себя.

В уравнении (1.5) удобно перейти к новым координатам $x_1 = \frac{a+c}{2}$, $x_2 = \frac{a-c}{2}$, $x_3 = b$. Тогда мы получим реализацию плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$:

$$[x, x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad x_1 > 0. \tag{1.6}$$

В этой реализации движения задаются как линейные преобразования в $\mathbb{R}^3$, сохраняющие верхнюю полу гиперболоида, т.е. как элементы группы $SO_0(1,2) \cong SL(2,\mathbb{R})/\{\pm e\}$.

Риманова метрика в этой модели имеет вид:

$$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{1.7}$$

Инвариантное расстояние d между точками x и y определяется равенством

$$\operatorname{ch} d = [x, y]. \tag{1.8}$$

Элемент площади в координатах x_2, x_3 на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$dv = \frac{dx_2\,dx_3}{x_1}. \tag{1.9}$$

1.2. Орициклы. На плоскости Лобачевского можно определить окружности бесконечно большого радиуса (орициклы) — пределы неевклидовых окружностей, когда их центр и радиус согласованно стремятся к бесконечности. В модели Пуанкаре орициклы представляются либо как (евклидовы) окружности, касающиеся вещественной оси (абсолюта), либо как прямые, параллельные вещественной оси. Последние естественно интерпретировать как окружности бесконечно большого радиуса, касающиеся вещественной оси в точке $x = \infty$. Из этого описания следует, что каждый орицикл задается уравнением:

$$|\xi_2 z - \xi_1|^2 = y,\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, многообразие орициклов параметризуется точками $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, причем точкам (ξ_1, ξ_2) и $(-\xi_1, -\xi_2)$ отвечает один и тот же орицикл. Орицикл, заданный уравнением (1.10), обозначается через $h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2)$.

Замечание. Если плоскость $\mathcal{L}^2$ реализована как верхняя пола двуполостного гиперболоида (1.6), то орициклами являются плоские параболические сечения этого гиперболоида, а именно, сечения плоскостями вида $[\xi, x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0,\ \xi_1 > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^3$.

Очевидно, что на многообразии H орициклов действует, и притом транзитивно, группа движений $SL(2, \mathbb{R})$; движение, отвечающее матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, переводит орицикл $h(\xi_1, \xi_2)$ в орицикл $h(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2)$.

На языке движений орициклы описываются следующим образом. Это орбиты унипотентной подгруппы Z матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$[1)] и все их сдвиги. На каждом орицикле действует группа, сопряженная группе Z, и относительно этого действия орицикл является евклидовой прямой. Таким образом, многообразие H орициклов является однородным пространством группы $SL(2, \mathbb{R})$ со стационарной подгруппой $\pm Z$. В результате, перейдя от плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ к многообразию орициклов H, мы получили новое однородное пространство с той же

[1)] В интерпретации Пуанкаре это прямые, параллельные вещественной оси.

группой движений, но с другой стационарной подгруппой. Такого рода конструкции играют важную роль в геометрии.

Каждый орицикл имеет единственную общую точку с абсолютом, которая называется его центром. В интерпретации Пуанкаре это точка касания с вещественной прямой. Орициклы с общим центром называются параллельными. Заметим, что орицикл $h(\xi_1, \xi_2)$ касается вещественной оси в точке $x = \frac{\xi_1}{\xi_2}$; отсюда следует, что любой пучок параллельных орициклов есть $\{h(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2) \mid 0 < \lambda < \infty\}$, где (ξ_1, ξ_2) фиксировано.

Все точки орицикла $h(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ находятся на одинаковом расстоянии $2|\ln\lambda|$ от параллельного ему орицикла $h(\xi_1, \xi_2)$. Мы будем называть выражение $\rho(z;\xi) = -2\ln\lambda$ ориентированным расстоянием точки $z \in h(\lambda\xi)$ от орицикла $h(\xi)$. Оно имеет вид:

$$\rho(z;\xi) = \ln(y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2) \quad (z = x + iy,\ \xi = (\xi_1, \xi_2)) \tag{1.11}$$

(поскольку $\lambda = (y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2)^{-1/2}$).

Каждый орицикл $h(\xi)$ разбивает плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ на две части $\mathcal{L}_+(\xi)$ и $\mathcal{L}_-(\xi)$, из которых $\mathcal{L}_+(\xi)$ примыкает к абсолюту, а граница $\mathcal{L}_-(\xi)$ имеет с абсолютом лишь одну общую точку — центр орицикла $h(\xi)$. Области $\mathcal{L}_+(\xi)$ и $\mathcal{L}_-(\xi)$ состоят из точек $z \in \mathcal{L}^2$, для которых соответственно $\rho(z;\xi) > 0$ и $\rho(z;\xi) < 0$.

Примечание. Однородные пространства $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ и $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$ находятся в отношении двойственности. По построению, точкам $\xi \in H$ отвечают кривые $h(\xi)$ в $\mathcal{L}^2$ (орициклы). В то же время точкам $z \in \mathcal{L}^2$ можно сопоставить кривые $l(z) \in H$, отвечающие множеству орициклов, проходящих через z. Каждая из этих кривых является траекторией подгруппы $SO(2)$ или подгруппы, с ней сопряженной. Она разбивает многообразие H на две части: область $H_+(z)$, где $\rho(z,\xi) > 0$ и область $H_-(z)$, где $\rho(z;\xi) < 0$. В реализации $H = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ кривые $l(z)$ — это всевозможные эллипсы на $\mathbb{R}^2$ с центром в точке 0, ограничивающие площадь, равную 1; $H_+(z)$ и $H_-(z)$ — соответственно внешняя и внутренняя части эллипса $l(z)$. Заметим, что многообразие всех орбит подгруппы $SO(2)$ и подгрупп, сопряженных с ней, неоднородно; в рассматриваемой реализации оно состоит из всех эллипсов на $\mathbb{R}^2$ с центром в точке 0.

1.3. Геодезические. Рассмотрим теперь “прямые” (геодезические) на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$. В модели Пуанкаре это полуокружности на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с центрами на вещественной прямой и полупрямые, ортогональные вещественной прямой. Отсюда следует, что каждая “прямая” задается уравнением:

$$(x-a)(x-b) + y^2 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \cup (\infty),\ a \neq b. \tag{1.12}$$

В частности, при $a = \infty$ (или $b = \infty$) получаем семейство (евклидовых) полупрямых, ортогональных вещественной прямой. Из (1.12) следует, что многообразие “прямых” параметризуется парами (a, b), $a \neq b$, где a, b — точки проективной прямой $\mathbb{P}^1$, причем парам (a, b) и (b, a) отвечает одна и та же “прямая”.

На языке движений каждая “прямая” является орбитой подгруппы D диагональных матриц или подгруппы, с ней сопряженной, и все “прямые” получаются одна из другой движениями. Тем самым, многообразие “прямых” является однородным пространством $D \setminus SL(2, \mathbb{R})$. В результате мы получаем еще одно однородное пространство с той же группой движений $SL(2, \mathbb{R})$, но с другой стационарной подгруппой. Отметим, что многообразие всех орбит подгрупп D и сопряженных с ней подгрупп неоднородно. В модели Пуанкаре оно совпадает с многообразием всех полупрямых на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и дуг окружностей, имеющих ровно две общие точки с вещественной прямой.

Если плоскость Лобачевского реализована как верхняя пола гиперболоида (1.6), то в этой реализации геодезическими являются линии пересечения (одна пола гиперболы) с плоскостями в $\mathbb{R}^3$, проходящими через точку O, т.е. с плоскостями

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0. \tag{1.13}$$

Обозначим через $\gamma(\xi)$ геодезическую, заданную уравнением (1.13). Очевидно, что плоскость (1.13) тогда и только тогда пересекает гиперболоид $[x, x] = 1$, когда $[\xi, \xi] < 0$. Так как, кроме того, $\gamma(\lambda\xi) = \gamma(\xi)$ для любого $\lambda \neq 0$, то можно принять

$$[\xi, \xi] = -1.$$

Таким образом, многообразие геодезических на плоскости Лобачевского параметризуется точками ξ двуполостного гиперболоида $[\xi, \xi] = -1$ в $\mathbb{R}^3$, причем точкам ξ и $-\xi$ соответствует одна и та же геодезическая.

§ 2. Орициклическое преобразование

2.1. Определение оператора $\mathcal{R}^h$. В этом параграфе мы исследуем аналог преобразования Радона на плоскости Лобачевского, связанный с орициклами.

Определение. Назовем орициклическим преобразованием интегральное преобразование $\mathcal{R}^h$ в $\mathcal{L}^2$, относящее каждой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ ее интегралы по орициклам:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{h(\xi)} f(z)\, ds, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \tag{2.1}$$

где $h(\xi)$ — орицикл, заданный уравнением (1.10), $ds = \frac{|dz|}{y}$ — элемент длины на плоскости Лобачевского.

Выражение для $\mathcal{R}^h$ может быть записано также в следующей форме:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int_{\mathcal{L}^2} f(z)\,\delta(\rho(z;\xi))\,\frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{2.2}$$

где $\rho(z;\xi)$ — расстояние от точки z до орицикла $h(\xi)$, см. формулу (1.11), а $\delta(\cdot)$ — дельта функция на $\mathbb{R}$.

Из определения следует, что оператор $\mathcal{R}^h$ перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$. Таким образом, мы имеем пару однородных пространств одной и той же группы $SL(2,\mathbb{R})$ — плоскость Лобачевского и многообразие орициклов и оператор перехода от функций на одном пространстве к функциям на другом пространстве, перестановочный с движениями. Заметим, что интегрирование ведется по орбитам стационарной подгруппы второго пространства и по их сдвигам.

2.2. Формула обращения. Найдем формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^h$, следуя той же схеме, что и в случае евклидовой плоскости (см. § 1 главы I).

Сначала берем радиально симметричную функцию f, зависящую только от неевклидова расстояния точки z от точки i:

$$f(z) = F(y^{-1/2}|z-i|).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с движениями плоскости $\mathcal{L}^2$ следует, что $\mathcal{R}^h f(\xi)$ зависит только от расстояния точки i до орицикла $h(\xi)$, т. е.

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \widehat{F}(r), \quad \text{где } r = \rho(i;\xi) = \ln(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Значит, $\widehat{F}(r)$ равно интегралу функции f по орициклу $h(e^{r/2},0)$: $y = e^r$, т. е.

$$\widehat{F}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(e^{-r/2}\sqrt{x^2+(e^r-1)^2})e^{-r}\,dx = 2\int_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{+\infty} \frac{F(s)s\,ds}{e^{r/2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}}} \tag{2.3}$$

(ср. формулу (1.2) из § 1 главы I). Таким образом, преобразование от $F(s)$ к $e^{r/2}\widehat{F}(r)$ сводится к преобразованию Абеля, и из (2.3) следует:

$$F(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{2\operatorname{sh}\frac{r}{2}>0} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\sqrt{4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}-s^2}}. \tag{2.4}$$

В частности,

$$f(i) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу (2.3) $e^{r/2}\widehat{F}(r)$ — гладкая четная функция. Отсюда следует, что интеграл (2.5) сходится (поскольку $(e^{r/2}\widehat{F}(r))'_{r=0} = 0$) и выражение для $f(i)$ можно также представить в виде:

$$f(i) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^2$; возьмем ее усреднение $\overline{f}(z) = F(y^{-1/2}|z-i|)$ по неевклидовым окружностям с центром в точке i:

$$F(y^{-1/2}|z-i|) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{z\cos\theta+\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta;$$

выражение для F можно записать также в следующей форме:

$$F(s) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z)\,\delta(y^{-1}|z-i|^2 - s^2)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Заметим, что $f(i) = F(0)$. Пусть $\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^h\,\overline{f}(\xi)$, $r = \ln(\xi_1^2+\xi_2^2)$. Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ следует, что

$$\widehat{F}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{R}^h\,f(e^{r/2}\cos\theta, e^{-r/2}\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-r}\int\limits_{\rho(i;\xi)=r}\mathcal{R}^h\,f(\xi)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-r}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathcal{R}^h\,f(\xi)\,\delta(\rho(i;\xi)-r)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{2.7}$$

где $\rho(i;\xi)$ — расстояние от точки $z=i$ до орицикла $h(\xi)$. На основании (2.5) и (2.6) имеем:

$$f(i) = \overline{f}(i) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(e^{r/2}\widehat{F}(r))'}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr \tag{2.8}$$

(ср. с формулой (1.4) из § 1 главы I). Подставив сюда выражение (2.7) для $\widehat{F}(r)$, получим после элементарных упрощений:

$$f(i) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{H_\pm(i)} \frac{e^{-1/2}\rho(i;\xi)}{\operatorname{sh}\frac{\rho(i;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{2.9}$$

где $H_\pm(i)$ — области в H^2, где соответственно $\rho(i;\xi) > 0$ и $\rho(i;\xi) < 0$.

Чтобы получить выражение для f в произвольной точке z нужно применить к полученным равенствам групповой сдвиг, переводящий точку i в точку z. В результате получаем:

Теорема 2.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое орициклическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))' r}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\, dr = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))' r}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\, dr, \tag{2.10}$$

где

$$\widehat{F}(z,r) = \frac{1}{2\pi} e^{-r} \int\limits_{\rho(z,\xi)=r} \mathcal{R}^h f(\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) = \\ = \frac{1}{\pi} e^{-r} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(z;\xi) - r)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{2.11}$$

(ср. формулы (1.5) *и* (1.6) *из главы* I):

Из (2.9) *следует также*

$$f(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{H_\pm(z)} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh}\frac{\rho(r;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1\right) \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{2.12}$$

$H_\pm(z)$ — области в H, где соответственно $\rho(x;\xi) > 0$ и $\rho(z;\xi) < 0$.

Заметим, что $\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}$ — оператор дифференцирования вдоль пучка параллельных орициклов.

2.3. Соотношения Асгейрссона. Для обращения преобразования $\mathcal{R}^h$ мы использовали формулу (2.4) только при $s = 0$. При $s \neq 0$ эта формула содержит дополнительную информацию о связи усреднений функции f и ее орициклического преобразования $\mathcal{R}^h f$.

Теорема 2.2. *Имеют место следующие соотношения Асгейрссона для плоскости Лобачевского*:

$$F(z;s) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{2\,\mathrm{sh}\, r/2>s} \frac{\left(e^{r/2}\widehat{F}(z,r)\right)'_r}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2 \frac{r}{2} - s^2}}\, dr, \qquad (2.13)$$

где $F(r;s)$ — *среднее функции* f *по неевклидовым окружностям с центром в точке* z

$$F(z,s) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z')\,\delta(y^{-1}{y'}^{-1}|z'-z|^2 - s^2)\,\frac{dx'\,dy'}{{y'}^2} \qquad (2.14)$$

и $\widehat{F}(z,r)$ — *среднее функции* $\mathcal{R}^h f$ *по множеству орициклов, равноотстоящих от точки* z, *см. формулу* (2.11). *Имеем также*

$$\widehat{F}(z,r) = 2 \int\limits_{2|\mathrm{sh}\,\frac{r}{2}|}^{\infty} \frac{F(z,s)s\,ds}{e^{r/2}\sqrt{s^2 - 4\,\mathrm{sh}^2 \frac{r}{2}}}. \qquad (2.15)$$

Формулы (2.13), (2.15) получаются из (2.4), (2.3) групповым сдвигом; ср. их с соотношениями Асгейрссона (1.8), (1.10) из § 1 главы I.

2.4. Соотношение симметрии. Из (2.15) следует, что $e^{r/2}\widehat{F}(z,r)$ — четная функция от r, т. е.

$$e^{r/2}\widehat{F}(z,r) = e^{-r/2}\widehat{F}(z,-r)$$

для любых z и r. Подставив сюда выражение (2.11) для $\widehat{F}(z,r)$, получаем следующее соотношение симметрии для функции $\mathcal{R}^h f$:

$$e^{-r/2}\int \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi) - r)\,d\xi_1\,d\xi_2 = e^{r/2}\int \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi) + r)\,d\xi_1\,d\xi_2. \qquad (2.16)$$

2.5. Формула обращения для орициклического преобразования в другой модели плоскости Лобачевского. Пусть плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ реализована в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$

$$[x,x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad x_1 > 0.$$

В этой модели орициклами являются сечения гиперболоида плоскостями

$$[\xi,x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 1,$$

где ξ — точка верхней полы конуса

$$K: \quad [\xi, \xi] = 0, \quad \xi_1 > 0.$$

Орициклическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(x)\, \delta([\xi, x] - 1)\, dx, \qquad \xi \in K, \tag{2.17}$$

где $dx = x_1^{-1}\, dx_2\, dx_3$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^2$.

Теорема 2.3. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое орициклическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\, ([\xi, x] - 1)^{-2}\, d\xi, \qquad \text{где} \qquad d\xi = \xi_1^{-1}\, d\xi_2\, d\xi_3. \tag{2.18}$$

Интеграл следует понимать в регуляризованном смысле, а именно как значение при $\mu = -2$ аналитической функции от μ, заданной при $\operatorname{Re} \mu > 0$ сходящимся интегралом: $(2\pi)^{-2} \int_K \mathcal{R}^h f(\xi)\, |[\xi, x] - 1|^{\mu}\, d\xi$.

Отметим сходство формул (2.17) и (2.18) с соответствующими формулами для преобразования Радона из главы I. Подобно случаю преобразования Радона, формулу обращения (2.18) достаточно доказать для функций на $\mathcal{L}^2$, зависящих только от расстояния до точки $x^0 = (1, 0, 0)$. Легко убедиться в том, что для таких функций f формула обращения (2.18) совпадает с уже доказанной ранее.

§ 3. Аналог преобразования Фурье на плоскости Лобачевского и его связь с орициклическим преобразованием

3.1. Преобразование Фурье на $\mathbb{R}^2$.. На наивном уровне классический интеграл Фурье на $\mathbb{R}^2$ есть разложение функции из $L^2(\mathbb{R}^2)$ по собственным функциям операторов параллельного сдвига, т. е. по экспонентам $e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}$. Однако он тесно связан и с более широкой группой — группой всех движений евклидовой плоскости. Укажем эту связь.

Рассмотрим оператор Лапласа Δ на евклидовой плоскости, т. е. дифференциальный оператор 2-го порядка, перестановочный с движениями: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Известно, что он имеет на $L^2(\mathbb{R}^2)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с полупрямой $(-\infty, 0)$. Требуется построить достаточный запас обобщенных собственных функций этого оператора, по которым разлагается любая функция $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Мы будем вести рассуждения на наивном уровне, не уточняя, что нужно понимать под обобщенными собственными функциями в случае непрерывного спектра и под разложением функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ по этим обобщенным функциям.

Фиксируем в группе движений евклидовой плоскости какую-нибудь однопараметрическую подгруппу трансляций, например, подгруппу сдвигов параллельно оси y. В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\lambda^2$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0)$ имеется пара обобщенных функций, инвариантных относительно этой подгруппы — $e^{\pm i\lambda x}$. Берем одну из них, например, $e^{i\lambda x}$ и применяем к ней всевозможные сдвиги. Очевидно, что при любой трансляции функция $e^{i\lambda x}$ умножается на число, а при повороте на угол θ вокруг точки 0 она переходит в $e^{i\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)}$. Таким образом, для каждого собственного значения $-\lambda^2$ оператора Δ мы получаем набор собственных функций $e^{i\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)}$, в частности, и функцию $e^{-i\lambda x}$. Между этими функциями нет линейных соотношений, и по ним можно разложить любую собственную функцию f_λ, оператора Δ с собственным значением $-\lambda^2$:

$$f_\lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty u_\lambda(\theta) e^{i\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, d\theta \quad (\lambda > 0). \tag{3.1}$$

Введем в пространство собственных функций оператора Δ, отвечающих собственному значению $-\lambda^2$, норму

$$||f_\lambda||^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u_\lambda(\theta)|^2\, d\theta \tag{3.2}$$

и рассмотрим соответствующее гильбертово пространство H_λ. В H_λ определено унитарное представление T_λ группы движений евклидовой плоскости: в функциях u_λ каждой трансляции $(x, y) \mapsto (x + x_0, y + y_0)$ отвечает оператор умножения на функцию $e^{i\lambda(x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)}$, а повороту на угол α вокруг точки 0 — оператор поворота $u_\lambda(\cdot) \mapsto u_\lambda(\cdot + \alpha)$. Нетрудно показать, что представления T_λ неприводимы.

Представление группы движений в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ разлагается по представлениям T_λ; опишем это разложение. Любая функция $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ разлагается в интеграл

$$f = \int\limits_0^\infty \lambda f_\lambda\, d\lambda, \tag{3.3}$$

где f_λ задается равенством (3.1), в котором $u_\lambda(\theta) = \widetilde{f}(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)$, $\widetilde{f}$ — преобразование Фурье функции f. При этом имеет место формула Планшереля:

$$||f||^2 = \int_0^\infty \lambda ||f_\lambda||^2 \, d\lambda, \tag{3.4}$$

где $||f_\lambda||$ задается равенством (3.2).

3.2. Преобразование Фурье на плоскости Лобачевского. Проведем теперь аналогичные рассуждения на том же нестрогом уровне для случая плоскости Лобачевского. Рассмотрим оператор Лапласа—Бельтрами Δ на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$, т. е. дифференциальный оператор 2-го порядка, перестановочный с движениями в $\mathcal{L}^2$; он имеет следующий вид:

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Пусть $L^2(\mathcal{L}^2)$ — пространство функций на $\mathcal{L}^2$ с интегрируемым квадратом модуля (относительно инвариантной меры $dv = \frac{dx\,dy}{y^2}$).

Оператор Δ имеет на $L^2(\mathcal{L}^2)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с интервалом $(-\infty, -1/4)$. Пусть Z — унипотентная подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Под интегралом Фурье на плоскости Лобачевского будем понимать разложение функций $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$ по некоторым специальным обобщенным функциям оператора Δ, а именно, по обобщенным собственным функциям, инвариантным относительно подгруппы Z, и их сдвигам. Эти функции и являются аналогами экспонент $e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}$.

В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\frac{1+s^2}{4}$ $(s \in \mathbb{R})$, имеются две функции, инвариантные относительно подгруппы Z — $y^{\frac{1\pm is}{2}}$. Берем одну из них $y^{\frac{1+is}{2}}$; при всевозможных сдвигах она переходит в функции вида

$$\Phi_s(z;\xi) = (y|\xi_2 z - \xi_1|^{-2})^{\frac{1+is}{2}} = \exp\left(-\frac{1+is}{2}\rho(z;\xi)\right), \tag{3.5}$$

где $\rho(z;\xi)$ — расстояние от точки $z = x + iy$ до орицикла $h(\xi)$. Будем называть функции $y^{\frac{1\pm is}{2}}$ зональными орициклическими функциями, а их сдвиги (3.5) — просто орициклическими функциями Мы видим, что если ξ и ξ' пропорциональны, то соответствующие функции Φ_s

различаются только множителем. Других соотношений между функциями Φ_s при $s > 0$ нет, и если взять функции $\Phi_s(z;\xi)$ где $s > 0$, а ξ пробегает по одному представителю на каждой прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через точку 0, то они образуют полный набор функций, по которым разлагается любая функция из $L^2(\mathcal{L}^2)$.

Определим преобразование Фурье функций на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ по аналогии с классическим преобразованием Фурье.

Определение. Преобразованием Фурье любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ называется скалярное произведение f и обобщенной орициклической функции (3.5),

$$\mathcal{F} f(\xi, s) = \int\limits_{\mathcal{L}^2} f(z)\Phi_s(z;\xi)\frac{dx\,dy}{y^2}. \tag{3.6}$$

Поскольку функции Φ_s однородны по ξ, то функция $\mathcal{F} f$ также однородна по ξ:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi; s) = |\lambda|^{-is-1}\mathcal{F} f(\xi; s). \tag{3.7}$$

3.3. Связь с орициклическим преобразованием и формула обращения. Полнота семейства орициклических функций Φ_s означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Построим ее.

Сначала установим связь между преобразованием Фурье $\mathcal{F} f$ и орициклическим преобразованием $\mathcal{R}^h f$. Как и в евклидовом случае, переход от функции f к функции $\mathcal{F} f$ можно разбить на два этапа: сначала мы интегрируем функцию f по орициклам $\rho(z; e^{-\lambda/2}\xi) \equiv \rho(z;\xi) - \lambda = 0$, а затем полученную функцию, умноженную на $e^{-\frac{is+1}{2}\lambda}$, интегрируем по λ.

При первом интегрировании получаем

$$\int\limits_{h(e^{-\lambda/2}\xi)} f(z)\,ds = \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi).$$

Итак, имеем:

Теорема 3.1. *Преобразование Фурье на $\mathcal{L}^2$ и орициклическое преобразование связаны соотношением*

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi)\, e^{-\frac{is+1}{2}\lambda}\, d\lambda. \tag{3.8}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье следует:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds. \tag{3.9}$$

Формулу обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ можно получить из уже известной нам формулы обращения (2.12) для орициклического преобразования $\mathcal{R}^h$. Заметим, что в евклидовом случае мы из формулы обращения для преобразования Фурье получили формулу обращения для преобразования Радона; здесь же мы идем в обратном направлении. Подставив в (2.12) выражение (3.9) $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$, получаем

$$f(z) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh} \frac{\rho(z;\xi)}{2}} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1 \right) \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{3.10}$$

Остается упростить полученное выражение. Прежде всего заметим, что из условия однородности (3.7) для $\mathcal{F} f$ следует

$$\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1 \right) \mathcal{F} f(\xi; s) = -is \mathcal{F} f(\xi; s).$$

Перейдем далее в (3.10) к "полярным" координатам $\xi = e^r \xi'$, где $-\infty < r < +\infty$, а ξ' принадлежит контуру $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$, пересекающему по одному разу каждый луч, выходящий из точки 0. Мы получим

$$f(z) = \frac{i}{8\pi^3} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\, \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho(z;\xi)}}{\operatorname{sh}\left(r + \frac{\rho(z;\xi)}{2} \right)}\, e^{-irs}\, \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds\, dr (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_2).$$

Интегрируя по r (интеграл по r нужно понимать в смысле главного значения), получаем:

Теорема 3.2. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ по следующей формуле обращения:*[1)]

$$f(z)=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\exp\Big(-\frac{1-is}{2}\rho(z;\xi)\Big)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds=$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds. \quad (3.11)$$

Мы не будем останавливаться на строгом обосновании перемены порядка интегрирования, которое было использовано при выводе формулы (3.11).

3.4. Соотношение симметрии. Покажем, что f может быть выражена только через $\mathcal{F}f(\xi;s)$ при $s>0$. Этот факт связан с тем, что сдвиги функций $y^{\frac{1\pm is}{2}}$, принадлежащих одному и тому же собственному подпространству оператора Δ, выражаются друг через друга. Именно,

$$y^{\frac{1-is}{2}}=c(s)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y|z-\xi_1|^{-2})^{\frac{1+is}{2}}\,d\xi_1,$$

где $c(s)=\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1+is}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{is}{2}\right)$.

Отсюда легко следует соотношение симметрии для $\mathcal{F}f$: *интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)$$

является четной функцией от s. Значит, в силу соотношения симметрии, формулу обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{0}^{\infty} s\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}\Big(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}f(\xi;s)\Phi_{-s}(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)\Big)\,ds. \quad (3.12)$$

Примечание. Соотношение симметрии для $\mathcal{F}f$ можно получить и из соотношения симметрии (2.16) для орициклического преобразования

[1)] Поскольку гл. зн. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-irs}\,dr}{\mathrm{sh}(z+\frac{\rho}{2})}=e^{\frac{i}{2}s\rho}$гл.зн. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-irs}}{\mathrm{sh}\,r}\,dr=ie^{\frac{i}{2}s\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin rs}{\mathrm{sh}\,r}\,dr=-$ $-\pi i\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2}e^{-\frac{i}{2}s\rho}$.

$\mathcal{R}^h f$. Именно, подставив в (2.16) выражение $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$ и перейдя к "полярным" координатам $\xi = e^t \xi'$, $\xi' \in \Gamma$, получим, что интеграл

$$e^{-r/2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-is)t} \mathcal{F} f(\xi; s)\, \delta(2t + \rho(z;\xi) - r)\, ds\, dt (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1). \tag{3.13}$$

является четной функцией от r. Проинтегрировав по t, получаем, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-isr} \mathcal{F} f(\xi; s) e^{-\frac{1-is}{2}\rho(z;\xi)} ds (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)$$

является четной функцией от r. Очевидно, что это условие эквивалентно условию симметрии для $\mathcal{F} f$.

3.5. Формула Планшереля. Из определения преобразования Фурье $\mathcal{F} f$ и из формулы обращения (3.12) получаем:

Теорема 3.3. *Для любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^2$ справедлива следующая формула Планшереля*:

$$\int\limits_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} |\mathcal{F} f(\xi; s)|^2 (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds. \tag{3.14}$$

В самом деле, подставив в интеграл $\int f(z) \overline{f(z)} \frac{dx\, dy}{y^2}$ вместо функции $\overline{f(z)}$ ее выражение через $\mathcal{F} f$, получаем:

$$\int\limits_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathcal{L}^2} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} f(z) \overline{\mathcal{F} f(\xi; s)} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1+is}{2}\rho(z;\xi)\right] (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds \frac{dx\, dy}{y^2} =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Gamma} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} |\mathcal{F} f(\xi; s)|^2 (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)\, ds.$$

На основании формулы Планшереля, преобразование Фурье по классической схеме переносится с гладких финитных функций на все функции $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$.

§ 4. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{R})$

Продемонстрируем на примере плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ связь интегральной геометрии с теорией представлений групп Ли.

Мы имеем гильбертово пространство $L^2(\mathcal{L}^2)$, в котором действует унитарное представление T группы $SL(2,\mathbb{R})$:

$$T_g f(z) = f(z \circ g), \quad g \in SL(2,\mathbb{R}),$$

где $z \mapsto z \circ g$ — движение плоскости Лобачевского, отвечающее g. Задача теории представлений (гармонический анализ для плоскости Лобачевского) состоит в том, чтобы разложить $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые инвариантные подпространства. Эта задача аналогична задаче о разложении функций из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в интеграл Фурье, а неприводимые инвариантные подпространства можно трактовать как аналоги экспонент. Покажем, что решение этой задачи дается формулами (3.12) и (3.14) из § 3.

Вначале нужно описать сами неприводимые инвариантные подпространства, на которые разлагается $L^2(\mathcal{L}^2)$. Рассмотрим собственное подпространство оператора Лапласа — Бельтрами Δ, отвечающее произвольному собственному значению $-\frac{1+s^2}{4}$. Как уже говорилось, оно порождено обобщенными функциями $\Phi_s(z;\xi) = (y|\xi_2 z - \xi_2|^{-2})^{\frac{1+is}{2}}$, где ξ пробегает по одному представителю на каждой прямой в $\mathbb{R}^2$, проходящей через точку 0. Тем самым, элементы этого собственного подпространства можно представить в виде:

$$f_s(z) = \int\limits_{\Gamma} u_s(\xi)\Phi_s(z;\xi)(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1); \tag{4.1}$$

где функция u_s удовлетворяет условию однородности:

$$u_s(\lambda\xi) = |\lambda|^{is-1} u_s(\xi); \tag{4.2}$$

интеграл берется по любому контуру $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$, пересекающему по одному разу каждый луч, выходящий из точки 0. (От выбора Γ интеграл не зависит, так как дифференциальная форма, которую мы интегрируем, инвариантна относительно преобразований подобия $\xi \mapsto \lambda\xi$, ср. формулу (1.14) из главы I). Введем в пространстве функций f_s норму

$$\|f_s\|^2 = \int\limits_{\Gamma} |u_s(\xi)|^2(\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1) \tag{4.3}$$

и определим гильбертово пространство H_s как L^2 по этой норме. Заметим, что, в силу сказанного в п. 3.4, пространства H_s и H_{-s} совпадают.

Сдвиги на $\mathcal{L}^2$ индуцируют в H_s унитарное представление T_s группы $SL(2,\mathbb{R})$. В функциях $u_s(\xi)$ оно имеет вид:

$$(T_s(g)u_s)(\xi_1,\xi_2) = u_s(\alpha\xi_1 + \gamma\xi_2, \beta\xi_1 + \delta\xi_2), \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Известно,[1)] что это представление неприводимо.

Введем операторы проектирования $P_s : L^2(\mathcal{L}^2) \to H_s$

$$P_s f = f_s,$$

где f_s задается равенством (4.1), в котором $u_s(\xi) = \mathcal{F} f(\xi, s)$. Очевидно, что эти операторы P_s перестановочны с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ в пространствах $L^2(\mathcal{L}^2)$ и H_s. Итак, задача о разложении $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые подпространства состоит в том, чтобы разложить функции $f \in L^2(\mathcal{L}^2)$ по их проекциям f_s.

Решение этой задачи дается формулами (3.12) и (3.14), поскольку эти формулы можно представить в следующем виде:

$$f = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} f_s\, ds, \quad f_s = P_s f; \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}^2} |f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{\infty} s \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} \|f_s\|^2\, ds, \tag{4.5}$$

где $\|f_s\|$ задается равенством (4.3).

Напомним, что вывод основной формулы (3.12) опирался на формулу обращения для оператора $\mathcal{R}^h$ орициклического преобразования. Разъясним роль этого оператора с теоретико-групповой точки зрения.

Оператор $\mathcal{R}^h$ переводит функции $f(z)$ на однородном пространстве $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ в функции $\mathcal{R}^h f(\xi)$ на однородном пространстве $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$, и он перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ на этих пространствах. При этом неприводимые компоненты переходят в неприводимые компоненты, но a priori может существовать ненулевое

[1)] См., например: Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений: Обобщенные функции. — М.: Физматгиз, 1962. — Вып. 5.

ядро. В действительности, поскольку для $\mathcal{R}^h$ существует формула обращения, ядро отображения равно нулю, и задача о разложении представления группы $SL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $L^2(\mathcal{L}^2)$ сводится к задаче о разложении представления в пространстве функций на $H = \pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$. Решение последней задачи очень просто по следующей причине. На однородном пространстве H действует коммутативная группа преобразований подобия $\xi \mapsto \lambda\xi$, перестановочных с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$. Рассмотрим соответствующую коммутативную группу операторов A_λ:

$$(A_\lambda f)(\xi) = f(\lambda\xi).$$

Общие собственные подпространства операторов A_λ состоят из однородных функций. Так как операторы A_λ коммутируют с операторами представления группы $SL(2,\mathbb{R})$, их собственные подпространства инвариантны относительно этой группы. Известно, что индуцированные в этих подпространствах представления группы $SL(2,\mathbb{R})$ неприводимы. Разложение пространства функций на H на неприводимые составляющие тем самым сводится к разложению на собственные подпространства операторов A_λ и, так как группа операторов A_λ коммутативна и изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}$, это разложение сводится к обычному одномерному преобразованию Фурье. Композиция орициклического преобразования $\mathcal{R}^h$ и этого одномерного преобразования Фурье есть преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на плоскости Лобачевского.

Итак, роль орициклического преобразования в том, что оно сводит задачу о разложении функций на однородном пространстве $\mathcal{L}^2 = SO(2) \setminus SL(2,\mathbb{R})$ к задаче о разложении функций на другом однородном пространстве $\pm Z \setminus SL(2,\mathbb{R})$, где она решается элементарно. Аналогичные преобразования, сводящие задачу о разложении представлений групп, связанных с однородными пространствами, к задаче интегральной геометрии, можно определить, кроме $\mathcal{L}^2$, и для других однородных пространств. Этот прием, получивший название метода орисфер, впервые был описан в статье И.М. Гельфанда и М.И. Граева[1)].

Конструкция, с помощью которой в этом параграфе были построены неприводимые представления группы $SL(2,\mathbb{R})$, входит в общую схему реализации неприводимых представлений в функциях на однородных пространствах, восходящую к Фробениусу. Конечномерное неприводимое унитарное представление T группы G реализуется в функциях на однородном пространстве $U \setminus G$ тогда и только тогда, когда в пространстве этого представления имеется вектор, инвариантный относительно подгруппы U; размерность пространства таких

[1)] Гельфанд И.М., Граев М.И. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I: Труды моск. матем. об-ва. — М., 1959. — № 8. — С. 321–390.

векторов равна кратности вхождения T в пространство $L^2(U \setminus G)$. Теорема двойственности Фробениуса явно задает оператор вложения T в $L^2(U \setminus G)$. В бесконечномерном случае требуются некоторые аналитические уточнения.

Рассматривавшиеся нами функции $y^{\frac{1+is}{2}}$ как раз являются инвариантными относительно подгруппы Z, и конструкция по ним неприводимых представлений группы $G = SL(2,\mathbb{R})$ следует схеме Фробениуса. Поскольку в каждом неприводимом пространстве имеется два (обобщенных) вектора, инвариантных относительно Z, оно дважды вкладывается в $L^2(\pm Z \setminus G)$. Однако в разложение $L^2(\mathcal{L}^2)$ каждое неприводимое представление входит с кратностью 1; этот факт связан с соотношением симметрии для $\mathcal{F} f$.

§ 5. Интегральное преобразование, связанное с прямыми (геодезическими) на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$

5.1. Определение и формула обращения в модели Пуанкаре. Рассмотрим еще один аналог преобразования Радона для плоскости Лобачевского — интегральное преобразование, связанное с "прямыми" (геодезическими) на $\mathcal{L}^2$.

Согласно § 1 каждая "прямая" на $\mathcal{L}^2$ задается в модели Пуанкаре уравнением на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$:

$$(x-a)(x-b) + y^2 = 0, \tag{5.1}$$

где $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup (\infty)$; обозначим ее через $G(a,b)$. Из уравнения (5.1) легко следует, что при движении $z \mapsto \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}$ прямая $G(a,b)$ переходит в прямую $G\left(\frac{\alpha a+\gamma}{\beta a+\delta}, \frac{\alpha b+\gamma}{\beta b+\delta}\right)$.

Определение. Обозначим через $\mathcal{R}^g$ интегральное преобразование, относящее каждой гладкой финитной функции f на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ ее интегралы по прямым в $\mathcal{L}^2$ (т.е. геодезическим относительно метрики в $\mathcal{L}^2$):

$$\mathcal{R}^g f(a,b) = \int\limits_{G(a,b)} f(z)\, ds, \quad ds = \frac{|dz|}{y}. \tag{5.2}$$

Очевидно, что это преобразование перестановочно с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$.

Найдем формулу обращения, восстанавливающую функцию f по функции $\mathcal{R}^g f$. При ее выводе будем следовать той же схеме, что в случае преобразования Радона на евклидовой плоскости и орициклического преобразования на $\mathcal{L}^2$.

Сначала рассмотрим функцию $f \in D(\mathcal{L}^2)$, постоянную на неевклидовых окружностях с центром в точке i, т. е. на орбитах подгруппы $SO(2)$ матриц $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$f(z) = F\left(\frac{|z-i|^2}{2y}\right).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^g$ с действием группы $SL(2,\mathbb{R})$ следует, что функция $\mathcal{R}^g f(a,b)$ также инвариантна относительно преобразований из $SO(2)$. Нетрудно убедиться, что инвариантом пары точек $a, b \in \mathbb{P}^1$ относительно $SO(2)$ является $\frac{1+ab}{a-b}$. Таким образом, $\mathcal{R}^g f(a,b) = \widehat{F}\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)$. Из (5.2) следует, что

$$\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^g f(\infty, r) = \int_0^\infty F\left(\frac{r^2+(y-1)^2}{2y}\right)\frac{dy}{y} =$$

$$= \int_{(r^2+1)^{1/2}}^\infty F(s-1)\frac{ds}{\sqrt{s^2-(r^2+1)}} = \int_{(r^2+1)^{1/2}}^\infty (s^{-1}F(s-1))\frac{s\,ds}{\sqrt{s^2-(r^2+1)}}.$$

Таким образом, $\widehat{F}(r)$ — четная функция от r, и по формуле обращения для преобразования Абеля получаем:

$$s^{-1}F(s-1) = -\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{s^2-1}}^\infty \frac{\widehat{F}'(r)\,dr}{\sqrt{r^2+1-s^2}}; \quad s \geqslant 1.$$

В частности, при $s=1$ имеем:

$$f(i) = F(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\widehat{F}'(r)\,dr}{r} \tag{5.3}$$

(интеграл сходится, поскольку $\widehat{F}'(r) = o(r)$ при $r \to 0$).

Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^2$, $\overline{f}$ — ее среднее по неевклидовым окружностям с центром в точке i,

$$\overline{f}(z) = F\left(\frac{|z-i|^2}{2y}\right).$$

Из перестановочности $\mathcal{R}^g$ с движениями $\mathcal{L}^2$ следует, что

$$\mathcal{R}^g\,\overline{f}(a,b) = \widehat{F}\Big(\frac{1+ab}{a-b}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{R}^g f\Big(\frac{a\cos\theta+\sin\theta}{-a\sin\theta+\cos\theta}, \frac{b\cos\theta+\sin\theta}{-b\sin\theta+\cos\theta}\Big)\,d\theta,$$

откуда

$$\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^g\,\overline{f}(\infty, r) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{R}^g f\left(-\operatorname{ctg}\theta, \frac{r\cos\theta+\sin\theta}{-r\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}^g f\left(t, \frac{rt-1}{r+t}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{5.4}$$

Согласно (5.3) имеем:

$$f(i) = \overline{f}(i) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\widehat{F}'(r)}{r}\,dr, \tag{5.5}$$

где $\widehat{F}(r)$ задается равенством (5.4).

Чтобы получить выражение для f в произвольной точке z, достаточно применить групповой сдвиг g, переводящий точку i в точку z, например,

$$g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ xy^{-1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

При этом сдвиге $f(i)$ перейдет в $f(z)$, а $\mathcal{R}^g f(a,b)$ в $\mathcal{R}^g f(x+ay, x+by)$. В результате получаем:

Теорема 5.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с прямыми на $\mathcal{L}^2$, по следующей формуле обращения:*

$$f(z) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\widehat{F}'_s(z;r)}{r}\,dr,$$

где

$$\widehat{F}(z;r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}^g f\left(x+ty, x+\frac{rt-1}{r+t}\,y\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

5.2. Связь с преобразованием Радона на проективной плоскости. Предположим теперь, что плоскость Лобачевского $\mathcal{L}^2$ реализована как верхняя пола двуполостного гиперболоида $[x,x]=1$, где $[x,x]=x_1^2-x_2^2-x_3^2$. В этой реализации геодезические на $\mathcal{L}^2$ являются линиями $\gamma(\xi)$ пересечения гиперболоида с плоскостями

$$\langle \xi, x\rangle \equiv \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=0, \quad [\xi,\xi]=-1,$$

а интегральное преобразование $\mathcal{R}^g$ задается формулой:

$$\mathcal{R}^g f(\xi)=\int\limits_{\gamma(\xi)} f(x)\,ds, \quad [\xi,\xi]=-1, \tag{5.6}$$

где ds — элемент длины на $\mathcal{L}^2$. Нетрудно убедиться, что выражение для $\mathcal{R} f$ можно также представить в виде

$$\mathcal{R}^g f(\xi)=\int\limits_{\mathcal{L}\in} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle)\,\frac{dx_2\,dx_3}{x_1}, \tag{5.7}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$.

В этой модели формулу обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^g$ можно получить, подобно преобразованию Минковского — Функа, связанному с единичной двумерной сферой, как следствие из формулы обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$ на проективной плоскости, см. § 8 главы 1. Именно, поставим в соответствие функции $f\in\mathcal{L}^2$ C^∞ функцию F на $\mathbb{R}^3\setminus 0$, удовлетворяющую условию однородности $F(\lambda x)=\lambda^{-2}F(x)$ и такую, что $F\,\big|_{[x,x]=1}=f$, $F=0$ при $[x,x]<0$.

Из определения оператора $\mathcal{R}$ следует, что $\mathcal{R}F(\xi)=\mathcal{R}^g f(\xi)$ при $[\xi,\xi]=-1$ и $\mathcal{R}F(\xi)=0$ при $[\xi,\xi]>0$. Поэтому из формулы обращения главы I для интегрального преобразования $\mathcal{R}$ (см. (8.10) на с. 63) непосредственно следует

Теорема 5.2. *Функция f на $\mathcal{L}^2$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с геодезическими по следующей формуле обращения*:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{[\xi,\xi]=-1} \mathcal{R}^g f(\xi)\,\langle \xi, x\rangle^{-2}\omega(\xi). \tag{5.8}$$

О смысле, который придается этому интегралу, см. § 8 главы I.

§ 6. Орисферическое преобразование в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$

Определения и результаты § 1–5 для плоскости Лобачевского переносятся и на пространства Лобачевского больших размерностей, однако формулы обращения для пространств нечетных размерностей выглядит иначе. Поэтому мы дадим здесь независимое изложение для трехмерного пространства Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Основной упор будет сделан на явные формулы.

6.1. Модели пространства Лобачевского. Сначала изложим кратко элементы геометрии в $\mathcal{L}^3$. Пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ является однородным пространством группы $SL(2,\mathbb{C})$ со стационарной подгруппой $SU(2)$ (подгруппа унитарных матриц). Удобной для нас моделью пространства $\mathcal{L}^3$ является кватернионная модель: точками $\mathcal{L}^3$ являются кватернионы с тремя компонентами:

$$w = x + iy + zj, \quad z > 0,$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$; движение в $\mathcal{L}^3$, отвечающее матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, задается так:

$$w \mapsto w' = (w\beta + \delta)^{-1}(w\alpha + \gamma).$$

Очевидно, что стационарной подгруппой точки $w = j$ является $SU(2)$.

Риманова метрика на $\mathcal{L}^3$ имеет вид:

$$ds^2 = z^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{6.1}$$

Расстояние d между точками $w_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j$ и $w_2 = x_2 + y_2 i + z_2 j$ определяется равенством

$$4 \operatorname{sh}^2 \frac{d}{2} = \rho^2(w_1, w_2), \tag{6.2}$$

где

$$\rho^2(w_1, w_2) = \frac{|w_1 - w_2|^2}{z_1 z_2}, \tag{6.3}$$

$|\ |$ — норма кватерниона. Элемент объема в метрике (6.1) имеет вид:

$$dv = z^{-3}\, dx\, dy\, dz. \tag{6.4}$$

Другой вариант задания пространства Лобачевского — многообразие эрмитовых симметрических матриц

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c > 0, \ \det u = 1 \tag{6.5}$$

с движениями

$$u \mapsto g^* u g, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}),$$

где g^* — эрмитово сопряженная матрица.

Заметим, что многообразие матриц (6.5) можно интерпретировать как одну полу двухполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^4$:

$$ac - b_1^2 - b_2^2 = 1, \quad a, c > 0 \ (b_1 + ib_2 = b). \tag{6.6}$$

Соответствие между кватернионами w и матрицами $u = u(w)$ задается так:

$$x + yi + zj \mapsto \begin{pmatrix} z^{-1}(x^2 + y^2 + z^2) & z^{-1}(x + iy) \\ z^{-1}(x - iy) & z^{-1} \end{pmatrix};$$

другими словами, матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$ соответствует кватернион $w = \frac{b}{c} + \frac{1}{c} j$ (ср. случай плоскости Лобачевского). В частности, точке $w = j$ отвечает единичная матрица.

Удобно в уравнении гиперболоида (6.6) перейти к новым координатам: $x_1 = \frac{a+c}{2}$, $x_2 = \frac{a-c}{2}$, $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2$. Тогда мы получим реализацию пространства Лобачевского в виде верхней полы двуполостного гиперболоида:

$$[x, x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1, \quad x_1 > 0. \tag{6.7}$$

В этой реализации движения задаются как линейные преобразования в $\mathbb{R}^4$, сохраняющие верхнюю полу гиперболоида, т.е. как элементы группы $SO_0(1,3) \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm e\}$.

Риманова метрика в этой модели имеет вид:

$$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2;$$

инвариантное расстояние d между точками x и y определяется равенством

$$\operatorname{ch} d = [x, y];$$

элемент объема в координатах x_2, x_3 на $\mathcal{L}^2$ имеет вид:

$$dv = \frac{dx_2\, dx_3\, dx_4}{x_1}.$$

6.2. Орисферы. В пространстве Лобачевского можно определить сферы бесконечно большого радиуса (орисферы) — пределы неевклидовых сфер, когда их центр и радиус согласованно стремятся к бесконечности. Они представляются либо как (евклидовы) сферы на полупространстве $z>0$ в $\mathbb{R}^3$, касающиеся плоскости $z=0$ (абсолюта), либо как плоскости в этом полупространстве, параллельные плоскости $z=0$. Последние естественно интерпретировать как сферы бесконечно большого радиуса, касающиеся плоскости $z=0$ в бесконечно удаленной точке. В кватернионной модели каждая орисфера задается уравнением:

$$|w\xi_2-\xi_1|^2=z,\ w=x+ui+zj, \tag{6.8}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{C}^2\setminus 0$. Таким образом, многообразие орисфер параметризуется точками $\xi\in\mathbb{C}^2\setminus 0$, причем точкам ξ и $\lambda\xi$, $|\lambda|=1$ отвечает одна и та же орисфера (ср. уравнения орициклов на плоскости Лобачевского). Орисферу, заданную уравнением (6.8), обозначим через $h(\xi)$.

Замечание. Если пространство $\mathcal{L}^3$ реализовано как верхняя пола двуполостного гиперболоида (6.7), то орисферами являются плоские параболические сечения этого гиперболоида, а именно, сечения плоскостями вида $[\xi,x]=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi,\xi]=0,\ \xi_1>0,\ \xi\in\mathbb{R}^4\setminus 0$.

На многообразии орисфер действует, и притом транзитивно, группа движений $SL(2,\mathbb{C})$; движение, отвечающее матрице $g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$, переводит орисферу $f(\xi_1,\xi_2)$ в орисферу $h(\alpha\xi_1+\gamma\xi_2,\beta\xi_1+\delta\xi_2)$.

На языке движений орисферы описываются так: они либо являются орбитами подгруппы Z матриц вида $\begin{pmatrix}1&0\\ t&1\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{C}$ (это — плоскости, параллельные плоскости $z=0$), либо получаются сдвигами этих орбит. Таким образом, многообразие орисфер является однородным пространством группы $SL(2,\mathbb{C})$ со стационарной подгруппой $\pm Z$.

Каждая орисфера имеет единственную точку касания с абсолютом, которая называется ее центром. В нашей интерпретации это точки касания с плоскостью $z=0$. Орисферы с общим центром называются параллельными. Заметим, что орисфера $h(\xi)$ касается плоскости $z=0$ в точке $\frac{\xi_1}{\xi_2}$; отсюда следует, что любой пучок параллельных орисфер есть $\{h(\lambda\xi)\mid 0<\lambda<\infty\}$, где ξ фиксировано.

Расстояние (ориентированное) $\rho(w,\xi)$ от точки $w\in\mathcal{L}^3$ до орисферы $h(\xi)$ определяется так же, как расстояние от точки до орицикла на плоскости Лобачевского, и задается аналогичной формулой:

$$\rho(w;\xi)=\ln(z^{-1}|w\xi_2-\xi_1|^2),\ w=x+yi+zj. \tag{6.9}$$

6.3. Орисферическое преобразование.

Определение. Назовем орисферическим преобразованием в $\mathcal{L}^3$ интегральное преобразование $\mathcal{R}^h$, относящее гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ ее интегралы по орисферам:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{h(\xi)} f(w)\,d\sigma, \tag{6.10}$$

где $h(\xi)$ — орисфера, заданная уравнением (6.4), а $d\sigma$ — (неевклидов), элемент площади на $h(\xi)$.

Выражение для $\mathcal{R}^h$ может быть записано также в следующей форме:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^3} f(w)\,\delta(\rho(w;\xi))\,\frac{dx\,dy\,dz}{z^3}, \tag{6.11}$$

где $\rho(w;\xi)$ — расстояние то точки $w = x + yi + zj$ до орисферы $h(\xi)$, см. формулу (6.9).

Из определения следует, что оператор $\mathcal{R}^h$ перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{C})$.

6.4. Формула обращения. Перейдем к построению формулы обращения для интегрального преобразования $\mathcal{R}^h$, повторив те же рассуждения, что и в случае плоскости Лобачевского. Пусть сначала f — радиальная функция, зависящая только от расстояния точки w до точки j

$$f(w) = F(z^{-1/2}|w - j|).$$

Тогда $\mathcal{R}^h f(\xi)$ зависит только от расстояния точки j до орисферы $h(\xi)$, т. е.

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \widehat{F}(r), \text{ где } r = \ln(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2).$$

Значит, $\widehat{F}(r)$ равно интегралу функции f по орисфере $h(e^{r/2}, 0)$: $z = e^r$, т. е.

$$\widehat{F}(r) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (e^r - 1)^2}}{e^{r/2}}\right)\frac{dx\,dy}{e^{2r}} =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^\infty F\left(\frac{\sqrt{t^2 + (e^r - 1)^2}}{e^{r/2}}\right)\frac{t\,dt}{e^{2r}} = 2\pi\int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{\infty} F(s)\,\frac{s\,ds}{e^r}. \tag{6.12}$$

Отсюда следует, что, во-первых, $e^r\widehat{F}(r)$ — четная функция от r,

$$e^r\widehat{F}(r) = e^{-r}\widehat{F}(-r)$$

и, во-вторых,

$$(e^r\widehat{F}(r))' = -2\pi(\operatorname{ch} r F(2\operatorname{sh}\frac{r}{2}) + \operatorname{sh} r \operatorname{ch}\frac{r}{2}F'(2\operatorname{sh}\frac{r}{2})). \tag{6.13}$$

Из (6.13) при $r = 0$ следует:

$$f(j) = F(0) = -\frac{1}{2\pi}(e^r\widehat{F}(r))'|_{r=0} \tag{6.14}$$

(ср. с формулой (2.5) этой главы и формулой (2.4) из § 2 главы I). Пусть теперь f — произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{L}^3$ и

$$\overline{f}(w) = F(z^{-1/2}|w-j|)$$

— ее среднее по неевклидовым сферам с центром в точке j. Так как эти сферы — орбиты подгруппы унитарных матриц

$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то

$$\overline{f}(w) = F(z^{-1/2}|w-j|) = \int f((w\beta+\overline{\alpha})^{-1}(w\alpha-\overline{\beta}))\,d\mu(\alpha,\beta),$$

где $d\mu(\alpha,\beta)$ — инвариантная мера на группе унитарных матриц, т. е. на трехмерной единичной сфере $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, нормированная условием $\int d\mu(\alpha,\beta) = 1$. Нетрудно проверить, что выражение для F можно представить в следующей удобной форме:

$$F(s) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}^3} z^{1/2}|w-j|^{-1}f(w)\,\delta(z^{-1}|w-j|^2 - s^2)\frac{dx\,dy\,dz}{z^3}. \tag{6.15}$$

Пусть $\widehat{F}(r) = \mathcal{R}^h\overline{f}(\xi)$, где $r = \rho(j;\xi) = \ln(|\xi_i|^2 + |\xi_2|^2)$. Из перестановочности $\mathcal{R}^h$ с действием группы $SL(2,\mathbb{C})$ следует, что

$$\widehat{F}(r) = \int\limits_{|\alpha|^2+|\beta|^2=1} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\alpha, e^{r/2}\beta)\,d\mu(\alpha,\beta) =$$

$$= \pi^2\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{\mathbb{C}^2}\mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\,\delta(\rho(j;\xi))\,d\xi_1\,d\overline{\xi_1}\,d\xi_2\,d\overline{\xi_2}, \tag{6.16}$$

где $\rho(j;\xi)$ — расстояние от j до орисферы $h(\xi)$. В силу (6.14) имеем:

$$f(j) = \overline{f}(j) = -\frac{1}{2\pi}(e^r \widehat{F}(r))''|_{r=0}.$$

Подставив сюда выражение (6.16) для $\widehat{F}(r)$, получим:

$$f(j) = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, d\mu(\xi) = \\ = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{C}^2} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(j;\xi))\, dv, \quad (6.17)$$

где

$$L = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \overline{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_2}} + 2,\ dv = \left(\frac{i}{2}\right)^2 d\xi_1\, d\overline{\xi_1}\, d\xi_2\, d\overline{\xi_2}. \quad (6.18)$$

Итак, получено выражение $f(j)$ через орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$. Отсюда, применив сдвиг, переводящий j в произвольную фиксированную точку w, получаем:

Теорема 6.1. *Функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения*:

$$f(w) = -\frac{1}{2\pi}(e^r \widehat{F}(w,r))''|_{r=0}, \quad (6.19)$$

где

$$\widehat{F}(w,r) = \pi^{-2} \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\, \delta(\rho(w,\xi))\, dv; \quad (6.20)$$

отсюда

$$f(w) = -\frac{1}{8\pi^3} \int\limits_{\mathbb{C}^2} L^2 \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv, \quad (6.21)$$

где оператор L задается равенством (6.18).

Замечание. Так как $\mathcal{R}^h f(e^{i\theta}\xi_1, e^{i\theta}\xi_2) = \mathcal{R}^h f(\xi_1,\xi_2)$, то $L_\xi \mathcal{R}^h f = \overline{L}_\xi \mathcal{R}^h f$, где $L_\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 1$, $\overline{L}_\xi = \overline{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_2}} + 1$. Поэтому $L^2 \mathcal{R}^h f = 4L_\xi^2 \mathcal{R}^h f = 4\overline{L}_\xi^2 \mathcal{R}^h f = 4L_\xi \overline{L}_\xi \mathcal{R}^h f$.

Отметим, что в отличие от случая плоскости Лобачевского, эта формула обращения локальна: для восстановления функции в точке w, нужно знать интегралы функции f только по орисферам, бесконечно близким к w.

6.5. Соотношение симметрии. Попутно, применив к равенству (6.12) групповой сдвиг, мы получаем следующий результат.

Теорема 6.2. *Имеет место следующее соотношение Асгейрссона для пространства Лобачевского*:

$$e^r \widehat{F}(w;r) = 2\pi \int\limits_{2|\operatorname{sh}\frac{r}{2}|}^{\infty} F(w;s) s\, ds. \tag{6.22}$$

Здесь $F(w,s)$ — среднее функции f по сферам с центром в точке w.

$$F(w,s) = \pi^{-1}\int\limits_{\mathcal{L}^3} z^{\frac{1}{2}} z'^{\frac{1}{2}} |w-w'|^{-1} f(w')\, \delta(z^{-1} z'^{-1} |w-w'|^2 - s^2) \frac{dx'dy'dz'}{z^3} =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathcal{L}^3} \left|\operatorname{sh}\frac{d(w,w')}{2}\right|^{-1} \delta\left(4\operatorname{sh}^2\frac{d(w,w')}{2} - s^2\right) f(w') \frac{dx'dy'dz'}{z'^3}, \tag{6.23}$$

где $d(w,w')$ — неевклидово расстояние между w и w', а $\widehat{F}(w,r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по орисферам, равноотстоящим от точки w, формула (6.20).

Следствие. $e^r \widehat{F}(w,r)$ *— четная функция от r,*

$$e^r \widehat{F}(w,r) = e^{-r} \widehat{F}(w,-r).$$

Подставив сюда выражение (6.20) для $\widehat{F}$, получаем, что $\mathcal{R}^h f$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии:

$$e^r \int \mathcal{R}^h f(e^{r/2}\xi_1, e^{r/2}\xi_2)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv =$$

$$= e^{-r} \int \mathcal{R}^h f(e^{-r/2}\xi_1, e^{-r/2}\xi_2)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv. \tag{6.24}$$

6.6. Формула обращения для орисферического преобразования в другой модели пространства Лобачевского. Реализуем пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ в виде верхней полы двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^4$

$$[x,x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1, \quad x_1 > 0.$$

В этой модели орисферами являются сечения гиперболоида гиперплоскостями

$$[\xi,x] \equiv \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 - \xi_4 x_4 = 1,$$

где ξ — точка верхней полы конуса

$$K: \quad [\xi,\xi]=0, \quad \xi_1>0.$$

Орисферическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi)=\int\limits_{\mathcal{L}^3} f(x)\,\delta([\xi,x]-1)\,dx, \qquad \xi\in K, \tag{6.25}$$

где $dx=x_1^{-1}\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^3$.

Теорема 6.3. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое орисферическое преобразование $\mathcal{R}^h f$ по следующей формуле обращения:*

$$f(x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_K \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta''([\xi,x]-1)\,d\xi, \quad d\xi=\xi_1^{-1}\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4, \tag{6.26}$$

где $\delta''(\cdot)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$.

Формулы (6.25) и (6.26) аналогичны соответствующим формулам для преобразования Радона из главы I, и, подобно случаю преобразования Радона, формулу обращения (6.26) достаточно доказать для функций на $\mathcal{L}^3$, зависящих только от расстояния до точки $x^0=(1,0,0,0)$. Легко убедиться в том, что для таких функций f формула обращения (6.26) совпадает с уже доказанной ранее.

6.7. Интегральное преобразование, связанное с вполне геодезическими поверхностями в $\mathcal{L}^3$. Здесь мы рассмотрим еще одно интегральное преобразование на $\mathcal{L}^3$; оно относит функциям на $\mathcal{L}^3$ их интегралы по вполне геодезическим поверхностям в $\mathcal{L}^3$. Обозначим его через $\mathcal{R}$.

Реализуем пространство Лобачевского $\mathcal{L}^3$ как верхнюю полу гиперболоида (6.7) в $\mathbb{R}^4$. В этой модели вполне геодезические являются сечениями этого гиперболоида плоскостями

$$\langle\xi,x\rangle\equiv\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4=0,$$

где ξ пробегает однополостный гиперболоид $[\xi,\xi]=-1$. Интегральное преобразование $\mathcal{R}^g$ задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^g f(\xi)=\int\limits_{\mathcal{L}^{\in}} f(x)\,\delta(\langle\xi,x\rangle)\,\frac{dx_2\,dx_3\,dx_4}{x_1}, \tag{6.27}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на $\mathbb{R}$; ср. определение для плоскости Лобачевского в § 5.

Подобно случаю плоскости Лобачевского, формула обращения для этого интегрального преобразования может быть получена как следствие из формулы обращения для преобразования Радона $\mathcal{R}$ на проективном пространстве, см. § 8 главы I. Именно, поставим в соответствие функции $f \in \mathcal{L}^3$ C^∞ функцию F на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, удовлетворяющую условию однородности $F(\lambda x) = |\lambda|^{-3} F(x)$ и такую, что $F\big|_{[x,x]=1} = f$, $F = 0$ при $[x,x] < 0$.

Из определения оператора $\mathcal{R}$ следует, что $\mathcal{R}F(\xi) = \mathcal{R}^g f(\xi)$ при $[\xi,\xi] = -1$ и $\mathcal{R}F(\xi) = 0$ при $[\xi,\xi] > 0$. Поэтому из формулы обращения (8.6) главы I для интегрального преобразования $\mathcal{R}$ (см. с. 58) непосредственно следует:

Теорема 6.4. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое преобразование $\mathcal{R}^g f$, связанное с вполне геодезическими поверхностями, по следующей формуле обращения*:

$$f(x) = -(2\pi)^{-2} \int\limits_{[\xi,\xi]=-1} \mathcal{R}^g f(\xi)\, \delta''(\langle \xi, x\rangle)\, \omega(\xi), \tag{6.28}$$

где $\delta''(\cdot)$ — вторая производная дельта-функции на $\mathbb{R}$.

О смысле, который придается этому интегралу, см. § 8 главы I.

Подчеркнем, что в отличие от случая плоскости Лобачевского, формула обращения (6.28) локальна.

Добавление. Орисферическое преобразование для пространства Лобачевского произвольной размерности. Пространство Лобачевского $\mathcal{L}^n$ произвольной размерности n — это верхняя пола гиперболоида в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$[x,x] \equiv x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = 1, \quad x_1 > 0, \tag{6.29}$$

в котором движения задаются линейными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющими эту гиперповерхность. Орисферами называются сечения гиперболоида гиперплоскостями

$$[\xi, x] \equiv \xi_1 x_1 - \ldots - \xi_{n+1} x_{n+1} = 1, \tag{6.30}$$

где ξ — точка верхней полы конуса $K: \quad [\xi,\xi] = 0, \quad \xi_1 > 0$. Орисферическое преобразование задается следующей формулой:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = \int\limits_{\mathcal{L}^n} f(x)\, \delta([\xi,x] - 1)\, dx, \qquad \xi \in K, \tag{6.31}$$

где $dx = x_1^{-1}\,dx_2\cdots dx_{n+1}$ — инвариантная мера на $\mathcal{L}^n$.

Структура формулы обращения зависит от четности n. Приведем ее без доказательства. Если $n = 2m+1$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{2\,(2\pi)^{2m}} \int\limits_K \mathcal{R}^h\, f(\xi)\, \delta^{(2m)}([\xi, x] - 1)\, d\xi, \tag{6.32}$$

где $d\xi = \xi_1^{-1}\, d\xi_2 \cdots d\xi_{n+1}$ — инвариантная мера на конусе K. Если $n = 2m$, то

$$f(x) = \frac{(-1)^m (2m-1)!}{(2\pi)^{2m}} \int\limits_K \mathcal{R}^h\, f(\xi)\, ([\xi, x] - 1)^{-2m}\, d\xi. \tag{6.33}$$

Таким образом, как и в случае преобразования Радона, формула обращения локальна при нечетном n и нелокальна при четном n.

§ 7. Аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского и его связь с орисферическим преобразованием

7.1. Определение преобразования Фурье. Определим интеграл Фурье для пространства Лобачевского $\mathcal{L}^3$, подобно тому, как это было уже сделано для плоскости Лобачевского. Рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами Δ на $\mathcal{L}^3$; он имеет следующий вид:

$$\Delta = z^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Известно, что оператор Δ имеет на $L^2(\mathcal{L}^3)$ непрерывный лебеговский спектр, совпадающий с интервалом $(-\infty, -1)$. Пусть Z — унипотентная подгруппа комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Под интегралом Фурье на $\mathcal{L}^3$ будем понимать расположение функций $f \in L^2(\mathcal{L}^3)$ по некоторым специальным функциям оператора Δ, а именно, по собственным функциям, инвариантным относительно подгруппы Z, и их сдвигам. В каждом собственном подпространстве оператора Δ, отвечающем собственному значению $-\frac{4+s^2}{4}$ $(s \in \mathbb{R})$, имеются две функции, инвариантные относительно подгруппы Z, а именно, $z^{\frac{2\pm is}{2}}$. Берем одну из них $z^{\frac{2+is}{2}}$; при всевозможных сдвигах она переходит в функции вида

$$\Phi_s(w;\xi) = (z|w\xi_2 - \xi_1|^{-2})^{\frac{2+is}{2}} = \exp\left(-\frac{2+is}{2} \rho(w;\xi) \right), \quad \xi \in \mathbb{C}^2, \tag{7.1}$$

где $\rho(w;\xi)$ — расстояние от точки $w = x + yi + zj$ до орисферы $h(\xi)$. Будем называть функции $z^{\frac{2\pm is}{2}}$ зональными орисферическими функциями, а их сдвиги (7.1) — просто орисферическими функциями. Если ξ, ξ' пропорциональны, то соответствующие функции Φ_s различаются только множителями и при $s > 0$ других соотношений между функциями Φ_s не существует. Эти функции, когда $s > 0$, а ξ пробегает по одному представителю на каждой комплексной прямой в $\mathbb{C}^2 \setminus 0$, проходящей через точку 0, образуют полный набор функций, по которым разлагается любая функция из $L^2(\mathcal{L}^3)$.

Определение. Преобразование Фурье гладкой финитной функции f на пространстве Лобачевского $\mathcal{L}^3$ определяется равенством

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int_{\mathcal{L}^3} f(w) \Phi_{-s}(w;\xi) \frac{dx\,dy\,dz}{z^3} \tag{7.2}$$

(ср. определение $\mathcal{F} f$ для $\mathcal{L}^2$ — формула (3.6)).

Из однородности Φ_s по ξ следует, что $\mathcal{F} f$ — также однородная функция от ξ:

$$\mathcal{F} f(\lambda\xi; s) = |\lambda|^{is-2} \mathcal{F} f(\xi; s). \tag{7.3}$$

7.2. Формула обращения. Полнота семейства орисферических функций Φ_s означает, что должна существовать формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Построим ее, повторив рассуждения для случая плоскости Лобачевского.

Прежде всего, как и в случае плоскости Лобачевского, между преобразованием Фурье $\mathcal{F} f$ и орисферическим преобразованием $\mathcal{R}^h f$ имеется следующая простая связь:

$$\mathcal{F} f(\xi; s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}^h f(e^{-\lambda/2}\xi) e^{\frac{is-2}{2}\lambda}\, d\lambda. \tag{7.4}$$

Отсюда по формуле обращения для одномерного преобразования Фурье следует:

$$\mathcal{R}^h f(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(\xi; s)\, ds. \tag{7.5}$$

Формула обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ получается из формулы обращения (6.21) для орисферического преобразования $\mathcal{R}^h$, если в последнюю подставить выражение (7.5) $\mathcal{R}^h f$ через $\mathcal{F} f$. Имеем:

$$f(w) = -\frac{1}{16\pi^4} \int\limits_{\mathbb{C}^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L^2 \mathcal{F} f(\xi; s)\, \delta(\rho(w;\xi))\, ds\, dv, \tag{7.6}$$

где

$$L = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \overline{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_1}} + \overline{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi_2}} + 2.$$

Упростим это выражение. Заметим, прежде всего, что из условия однородности (7.3) для $\mathcal{F} f$ следует

$$L^2 \mathcal{F} f(\xi; s) = -s^2 \mathcal{F} f(\xi; s).$$

Далее, перейдем в (7.6) от ξ к новым координатам $\xi = \lambda \xi'$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, а ξ' пробегает поверхность $\Gamma \subset \mathbb{C}^2 \setminus 0$, пересекающую по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0. Мы получим:

$$f(w) = \frac{1}{16\pi^4} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^2 \Big(\int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} |\lambda|^{is} \mathcal{F} f(\xi; s)\, \delta(2 \ln |\lambda| + \\ + \rho(w;\xi))\, d\lambda\, d\overline{\lambda} (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1})\Big)\, ds.$$

Интегрируя по λ, получаем окончательно:

Теорема 7.1. *Гладкая финитная функция f на $\mathcal{L}^3$ выражается через свое преобразование Фурье $\mathcal{F} f$ по следующей формуле обращения*:

$$f(w) = \frac{1}{16\pi^3} \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Gamma} s^2 \mathcal{F} f(\xi; s) \exp\left(-\frac{2 + is}{2} \rho(w;\xi)\right) \times \\ \times (\xi_1\, d\xi_2 - \xi_2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1})\, ds = \tag{7.7}$$

$$= \frac{1}{16\pi^3} \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\Gamma} s^2 \mathcal{F} f(\xi; s) \Phi_s(w;\xi) (\xi_1\, d\xi_2 - \xi - 2\, d\xi_1)(\overline{\xi_1}\, d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\, d\overline{\xi_1})\, ds.$$

7.3. Соотношение симметрии и формула Планшереля. Подобно случаю плоскости Лобачевского, сдвиги зональных орисферических функций $z^{\frac{2+is}{2}}$ и $z^{\frac{2-is}{2}}$ выражаются друг через друга:

$$z^{\frac{2-is}{2}} = c(s) \frac{i}{2} \int\limits_{\mathbb{C}} (z |w - \xi_1|^{-2})^{\frac{2+is}{2}}\, d\xi_1\, d\overline{\xi_1},$$

где $c(s)=\frac{is}{2\pi}$. Отсюда вытекает следующее соотношение симметрии для $\mathcal{F}\,f$:

$$\int\limits_{\Gamma}\mathcal{F}\,f(\xi;s)\Phi_s(w;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2}-\overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1}).$$

Интеграл является четной функцией от s. В силу этого соотношения функция f на $\mathcal{L}^3$ может быть выражена только через $\mathcal{F}\,f(\xi;s)$ при $s>0$:

$$f(w)=\frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_\Gamma s^2\mathcal{F}\,f(\xi;s)\Phi_s(w;\xi)(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2}-\overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1})\,ds. \tag{7.8}$$

Примечание. Как и в случае плоскости Лобачевского, соотношение симметрии для $\mathcal{F}\,f$ можно получить из соотношения симметрии (6.24) для $\mathcal{R}^h f$.

Из определения преобразования Фурье $\mathcal{F}\,f$ и из формулы обращения (7.5) получаем:

Теорема 7.2. *Для любой гладкой финитной функции f на $\mathcal{L}^3$ справедлива следующая формула Планшереля*:

$$\int\limits_{\mathcal{L}^3}|f(w)|^2\frac{dxdydz}{z^3}= \tag{7.9}$$

$$=\frac{1}{8\pi^3}\frac{i}{2}\int\limits_0^\infty s^2\left(\int\limits_\Gamma|\mathcal{F}\,f(\xi;s)|^2(\xi_1\,d\xi_2-\xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2}-\overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1})\right)ds$$

(ср. формулу Планшереля (3.14) для $\mathcal{L}^2$). На основании формулы Планшереля преобразование Фурье $\mathcal{F}\,f$ по классической схеме переносится на все функции $f\in L^2(\mathcal{L}^2)$.

§ 8. Связь с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{C})$

Установим по аналогии со случаем плоскости Лобачевского, связь полученного в § 7 результата с теорией представлений группы $SL(2,\mathbb{C})$.

Мы имеем гильбертово пространство $L^2(\mathcal{L}^3)$, в котором действует унитарное представление T группы $SL(2,\mathbb{C})$:

$$T_g f(w)=f(w\circ g),\quad g\in SL(2,\mathbb{C}),$$

где $w\mapsto w\circ g$ — движение плоскости Лобачевского, отвечающее g. Задача теории представлений (гармонический анализ для пространства

Лобачевского) состоит в том, чтобы разложить $L^2(\mathcal{L}^2)$ на неприводимые инвариантные подпространства.

Вначале надо описать сами неприводимые инвариантные подпространства, на которые разлагается $L^2(\mathcal{L}^2)$. Рассмотрим собственное подпространство оператора Лапласа — Бельтрами Δ на $\mathcal{L}^3$, отвечающее собственному значению $-\frac{4+s^2}{4}$. Оно порождается обобщенными функциями $\Phi_s(w;\xi)$, см. (4.1), и его элементы можно представить в виде:

$$f_s(w) = \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma u_s(\xi)\Phi_s(z;\xi)(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1}), \tag{8.1}$$

где u_s удовлетворяет условию однородности

$$u_s(\lambda\xi) = |\lambda|^{is-2}u_s(\xi), \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus 0, \tag{8.2}$$

интеграл берется по произвольной поверхности $\Gamma\subset\mathbb{C}^2\setminus 0$, пересекающей по одному разу почти каждую комплексную прямую, проходящую через точку 0. Введем в пространстве функций f_s норму

$$||f_s||^2 = \int\limits_\Gamma |u_s(\xi)|^2(\xi_1\,d\xi_2 - \xi_2\,d\xi_1)(\overline{\xi_1}\,d\overline{\xi_2} - \overline{\xi_2}\,d\overline{\xi_1}) \tag{8.3}$$

и рассмотрим пространство L^2 по этой норме, которое обозначим через H_s. Сдвиги на $\mathcal{L}^3$ индуцируют в H_s унитарное представление T_s группы $SL(2,\mathbb{C})$. В функциях $u_s(\xi)$ это представление имеет вид:

$$(T_s(g)u_s)(\xi_1,\xi_2) = u_s(\alpha\xi_1+\gamma\xi_2, \beta\xi_1+\delta\xi_2), \quad g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

Известно, что это представление неприводимо. Мы строим оператор $P_s : L^2(\mathcal{L}^3)\to H_s$

$$P_s f = f_s,$$

где f_s задается равенством (8.1), в котором $u_s(\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$. Этот оператор перестановочен с действием группы $SL(2,\mathbb{C})$ в пространствах $L^2(\mathcal{L}^3)$ и H_s. В результате на основании (7.8), (7.2) получаем разложение функций $f\in L^2(\mathcal{L}^3)$ по неприводимым подпространствам:

$$f = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_0^\infty s^2 f_s\,ds, \quad f_s = P_s f \tag{8.4}$$

и формулу Планшереля

$$\int\limits_{\mathcal{L}^3} |f(w)|^2 \frac{dx\,dy\,dz}{z^3} = \frac{1}{8\pi^3} \int\limits_0^{+\infty} s^2 \|f_s\|^2 \, ds, \tag{8.5}$$

где $\|f_s\|$ задается равенством (8.3).

§ 9. Волновое уравнение для плоскости и пространства Лобачевского и принцип Гюйгенса

9.1. Двумерный случай. Напомним, что оператор Лапласа—Бельтрами на плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ имеет вид $\Delta^2 = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ и его спектр в $L^2(\mathcal{L}^2)$ есть интервал $(-\infty, -\frac{1}{4})$. Рассмотрим следующее волновое уравнение на $\mathcal{L}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4}u. \tag{9.1}$$

Член $\frac{1}{4}u$ добавлен для того, чтобы спектр стоящего справа оператора совпадал с полупрямой $(-\infty, 0)$.

Покажем, как с помощью орициклического преобразования можно решить следующую задачу Коши для уравнения (9.1):

$$u(0,z) = 0,\ u'_t(0,z) = f(z); \tag{9.2}$$

для простоты будем предполагать, что $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^2)$. Приведенный ниже вывод параллелен решению задачи Коши для волнового уравнения на евклидовой плоскости (см. § 3 главы I). Он основан на методе орициклических волн, опирающемся на следующий замечательный факт:

Предложение 9.1. *Если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то для любого $\xi \in \mathbb{R}^2$ функция*

$$\Phi_\xi(t,z) = e^{\pm t/2}\varphi(\rho(z; e^{\pm t/2}\xi)) = e^{\pm t/2}\varphi(\rho(z;\xi) \pm t), \tag{9.3}$$

где $\rho(z;\xi) = \ln(y^{-1}|\xi_2 z - \xi_1|^2)$ — расстояние от z до орицикла $h(\xi)$, является решением волнового уравнения (9.1).

Доказательство — непосредственная проверка.

Функции (9.3) назовем орициклическими волнами. Метод орициклических волн состоит в представлении любого решения уравнения (9.1) в виде суперпозиции орициклических волн.

Перейдем к построению решения задачи Коши (9.2). Пусть $\mathcal{R}^h f$ — орициклическое преобразование функции f, $\widehat{F}(z;r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по орициклам, равноотстоящим от точки $z \in \mathcal{L}^2$, см. формулу (2.11). Рассмотрим следующую функцию

$$u(t,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{r+t}{2}}\widehat{F}(z,r+t)}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr. \tag{9.4}$$

Из (2.11) следует, что

$$e^{\frac{r+t}{2}}\widehat{F}(z,r+t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{r+t}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\,\delta(\rho(z;\xi)-r-t)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

значит, $u(t,z)$ как суперпозиция орициклических волн является решением уравнения (9.1). Убедимся, что u — искомое решение задачи Коши (9.2). В силу соотношения симметрии (2.16) $e^{r/2}\widehat{F}(z,r)$ — четная функция от r; следовательно,

$$u(0,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{r/2}\widehat{F}(z;r)}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = 0.$$

Далее, на основании формулы обращения (2.10) для орициклического преобразования имеем:

$$u'_t(0,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{r/2}\widehat{F}(z,r))'_r}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}}\,dr = f(z).$$

Мы хотим вернуться в (9.4) к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением Асгейрссона (2.15) для плоскости Лобачевского. На основании (2.15) получаем при $t > 0$:

$$u(t,z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{2\left|\operatorname{sh}\frac{r+t}{2}\right|}^{\infty} \frac{F(z,s)s\,ds\,dr}{\operatorname{sh}\frac{r}{2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r+t}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{2\left|\operatorname{sh}\frac{r}{2}\right|<s} \frac{F(z,s)s\,dr\,ds}{\operatorname{sh}\frac{r-t}{2}\sqrt{s^2-4\operatorname{sh}^2\frac{r}{2}}}, \tag{9.5}$$

где $F(z,s)$ — среднее функции f по неевклидовым окружностям в $\mathcal{L}^2$ с центром в точке z, см. (2.14); интеграл по z нужно понимать в смысле главного значения.

Выполним в (9.5) интегрирование по r, воспользовавшись следующим равенством[1]:

$$J \equiv \int\limits_{-b}^{b} \frac{dx}{\operatorname{sh}(x-a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}} = \begin{cases} 0 & \text{если } a < b, \\ \frac{-\pi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b}} & \text{если } a > b. \end{cases}$$

Здесь $a, b > 0$.

В результате получаем:

$$u(t,z) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\operatorname{sh}\frac{t}{2}} \frac{F(z,s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{t}{2} - s^2/4}}. \tag{9.6}$$

Подставив сюда выражение (2.14) функции $F(z,s)$ через функцию f, получаем окончательно:

Теорема 9.1. *Решение задачи Коши* (9.2) *для волнового уравнения* (9.1) *имеет вид*:

$$u(t,z) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{d(z,z')<t} \frac{f(z')}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{t}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{d(z,z')}{2}}} \frac{dx'dy'}{y'^2}, \tag{9.7}$$

---

[1] **Вычисление интеграла** J. Очевидно, что J — нечетная функция от a. Следовательно,

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_{-b}^{b} \frac{(\operatorname{sh}^{-1}(x-a) - \operatorname{sh}^{-1}(x+a))\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}} = \int\limits_{-b}^{b} \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} x\, dx}{(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 x}}.$$

Отсюда элементарными преобразованиями получаем:

$$J = \int\limits_{-\operatorname{sh} b}^{\operatorname{sh} b} \frac{\operatorname{sh} a\, dt}{(t^2 - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{\operatorname{sh}^2 b - t^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sh} a\, dt}{(t^2 \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{sh}^2 a)\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \operatorname{sh} a \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 b \sin^2 t - \operatorname{sh}^2 a} = -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\operatorname{sh} b \sin t + \operatorname{sh} a}.$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно: гл.зн. $J = 0$, если $a < b$; $J = -\frac{\pi}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b}}$, если $a > b$ (см.: Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962, формула 3.613.1.

где $d(z,z')$ — неевклидово расстояние между точками z и z' (см. формулу (1.2)).

Полученная формула аналогична формуле Пуассона для волнового уравнения на евклидовой плоскости, см. § 3 главы I. Как и там, решение уравнения в точке z в момент времени t зависит только от начальных данных в неевклидовом круге радиуса t с центром в точке z (эффект существования переднего фронта волны).

9.2. Трехмерный случай. Перейдем теперь к пространству Лобачевского $\mathcal{L}^3$. Напомним, что оператор Лапласса — Бельтрами на $\mathcal{L}^3$ имеет вид: $\Delta = z^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - z\frac{\partial}{\partial z}$ и его спектр на $L^2(\mathcal{L}^3)$ есть $(-\infty,-1)$. Рассмотрим на $\mathcal{L}^3$ следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - z\frac{\partial u}{\partial z} + u. \tag{9.8}$$

Как и в случае $\mathcal{L}^2$, член u добавлен для того, чтобы спектр стоящего справа оператора совпадал с полупрямой $(-\infty,0)$. Решим методом орисферических волн следующую задачу Коши для уравнения (9.8):

$$u(0,w) = 0,\ u'_t(0,w) = f(w) \quad (w = x + ui + zj). \tag{9.9}$$

Этот метод опирается на следующий факт:

Предложение 9.2. *Если $\varphi(s)$ — любая гладкая функция одного переменного, то для любого $\xi \in \mathbb{C}^2$ функция*

$$\Phi_\xi(t,w) = e^{\pm t}\varphi(\rho(w;\xi) \pm t), \tag{9.10}$$

где $\rho(w;\xi) = \ln(z^{-1}|w\xi_2 - \xi_1|^2)$ — расстояние от точки w до орисферы $h(\xi)$ является решением волнового уравнения (9.8).

Доказательство — непосредственная проверка.

Решения (9.10) назовем орисферическими волнами.

Перейдем к решению задачи Коши (9.9). Пусть $\mathcal{R}^h f$ — орисферическое преобразование функции f, $\widehat{F}(w;r)$ — среднее функции $\mathcal{R}^h f$ по орисферам, равноотстоящим от точки $w \in \mathcal{L}^3$, см. формулу (6.20). Рассмотрим следующую функцию:

$$u(t,w) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(e^t\widehat{F}(w,t)). \tag{9.11}$$

Из (6.20) следует, что

$$e^t \widehat{F}(w,t) = \pi^{-2} e^{-t} \int\limits_{\mathbb{C}^2} \mathcal{R}^h f(\xi)\, \delta(\rho(w;\xi))\, dv.$$

Значит, $u(t,w)$ как суперпозиция орисферических волн является решением волнового уравнения (9.8). Убедимся, что u — искомое решение задачи Коши (9.9). В силу соотношения симметрии (6.23) $e^t \widehat{F}(w,t)$ — четная функция от t; следовательно,

$$u(0,w) = \frac{d}{dt}(e^t \widehat{F}(w,t))|_{t=0} = 0.$$

Далее, на основании формулы обращения (6.19) для орисферического преобразования имеем:

$$u_t'(0,w) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2}(e^t \widehat{F}(w,t))|_{t=0} = f(w).$$

Мы хотим вернуться в (9.11) к исходной функции f. Для этого воспользуемся соотношением Асгейрссона (6.22) для пространства Лобачевского. На основании (6.22) получаем при $t > 0$:

$$u(t,w) = \operatorname{sh} t\, F(w, 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}),$$

где $F(w,s)$ — среднее функции f, по сферам в $\mathcal{L}^3$ с центром в точке w, см. (6.23). В результате, на основании (6.23) получаем окончательно:

Теорема 9.2. *Решение задачи Коши* (9.9) *для волнового уравнения* (9.8) *имеет вид*:

$$u(t,w) =$$
$$= \frac{1}{8\pi} \operatorname{sh} t \int\limits_{\mathcal{L}^3} \operatorname{sh}^{-1} \frac{d(w,w')}{2} \delta\left(4 \operatorname{sh}^2 \frac{d(w,w')}{2} - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}\right) f(w') \frac{dx'dy'dz'}{z'^3} =$$
$$= \frac{1}{16\pi} \operatorname{th}^{-1} \frac{t}{2} \int\limits_{\mathcal{L}^3} f(w') \delta\left(\operatorname{sh} \frac{d(w,w')}{2} - \operatorname{sh} \frac{t}{2}\right) \frac{dx'dy'dz'}{z'^3}.$$

Полученная формула аналогична формуле Кирхгофа из § 3 главы I для волнового уравнения в евклидовом пространстве. Как и там, решение волнового уравнения в точке w в момент t зависит только от начальных данных в точках w', находящихся от точки w на неевклидовом расстоянии t (принцип Гюйгенса).