ГЛАВА II

Лучевое преобразование

В этой главе изучается лучевое преобразование или преобразование Йона $\mathcal{I}$ функций на $\mathbb{R}^3$ и его аналоги для функций на вещественном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ и комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Лучевое преобразование относит каждой финитной или быстро убывающей функции f на $\mathbb{R}^3$ ее интегралы по всевозможным прямым в $\mathbb{R}^3$. В результате получается функция $\varphi = \mathcal{I}f$ на многообразии прямых. Впервые преобразование $\mathcal{I}$ исследовал Ф. Йон (см. сноску на с. 10), установивший его тесную связь с решениями ультрагиперболического дифференциального уравнения.

Здесь, как и для преобразования Радона $\mathcal{R}$, ставятся две основные задачи: описать образ $\mathcal{I}$ и восстановить функцию f по ее образу $\mathcal{I}f$. Однако их решение существенно иное. Главное отличие $\mathcal{I}$ от $\mathcal{R}$ (а также и от преобразований, рассматриваемых в последующих главах) в том, что лучевое преобразование переводит функции от трех переменных в функции от четырех переменных (поскольку многообразие прямых в $\mathbb{R}^3$ имеет размерность 4). Отсюда, во-первых, следует, что функции из образа лучевого преобразования удовлетворяют дополнительному дифференциальному соотношению (соотношение Йона). Во-вторых, задача о восстановлении функции f на $\mathbb{R}^3$ по ее лучевому преобразованию $\mathcal{I}f$ является переопределенной: для восстановления f достаточно, вообще говоря, задавать $\mathcal{I}f$ не на всем четырехмерном многообразии прямых H, а лишь на некотором трехмерном подмногообразии $K \subset H$. Разумеется, существование формулы обращения и ее явный вид могут существенно зависеть от структуры подмногообразия K.

Изложим кратко содержание этой главы. В § 1 дано определение лучевого преобразования функций на $\mathbb{R}^3$. Показано, что одна из основных специальных функций анализа — гипергеометрическая функция Гаусса естественно возникает как лучевое преобразование некоторой функции на $\mathbb{R}^3$. Основная задача этого параграфа — описание образа пространства Шварца $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании; ее решению посвящены п.п. 3 — 6. Далее рассматривается задача о восстановлении функции на $\mathbb{R}^3$ через ее интегралы по прямым, пересекающим фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Существует простое необходимое и достаточное условие на Λ (условие Кириллова), при котором эта задача имеет однозначное решение: нужно, чтобы кривая Λ пересекала почти каждую плоскость в $\mathbb{R}^3$. Для случая, когда условие Кириллова выполнено, в § 1 выводится явная формула обращения.

Следуя плану главы I, мы рассматриваем затем в § 2 лучевое преобразование дифференциальных форм на $\mathbb{R}^3$. Это преобразование определено не только для 1-форм, но также и для форм степени 2 и 3 (ср. случай преобразования Радона). В каждом из этих случаев дано описание образа лучевого преобразования и получена формула, восстанавливающая исходную дифференциальную форму по ее лучевому преобразованию.

В § 3 основные определения и результаты § 1 переносятся на случай проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Переход от аффинного пространства к проективному имеет два важных преимущества. Во-первых, основные определения и результаты в проективном случае имеют более простую и инвариантную по сравнению с аффинным случаем форму. Во-вторых, поскольку само проективное пространство $\mathbb{P}^3$ и многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ компактны, то с этими многообразиями связаны более естественные по сравнению с аффинным случаем пространства функций. В § 3 описание образа лучевого преобразования дано в красивой проективно инвариантной форме. Приведено также простое теоретико-групповое истолкование лучевого преобразования.

Два последних параграфа главы II посвящены аналогу лучевого преобразования для комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. Преимущество комплексного варианта в том, что в комплексном случае существуют локальные формулы обращения: для восстановления функции f в точке $x \in \mathbb{C}^3$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$ достаточно знать функцию φ лишь на множестве прямых, бесконечно близких к x.

Фундаментальную роль здесь играет оператор κ, введенный И.М. Гельфандом, М.И. Граевым и З.Я. Шапиро для решения более общей задачи[1], который относит каждой функции φ на многообразии прямых H дифференциальную (1,1)-форму $\kappa\varphi$ на H. В терминах оператора κ в § 4 дается описание образа пространства $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании и строится явная локальная формула обращения для

[1] Гельфанд И.М., Граев М.И., Шапиро З.Я. Интегральная геометрия на k-мерных плоскостях // Функциональный анализ и его приложения. — 1967. — № 1. — С. 15–31 .

этого преобразования. Оказывается, если $\varphi = \mathcal{I} f$, то для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразии $H^x \subset H$ всех прямых, проходящих через x, и функцию f можно восстановить по следующей формуле обращения:

$$\int\limits_{\gamma^x} \kappa\varphi = c(\gamma^x)\, f(x),$$

где $\gamma^x \subset H^x$ — произвольный цикл вещественной размерности 2, а множитель $c(\gamma^x)$ зависит только от класса гомологий цикла γ^x.

Отметим, что аналог оператора κ был введен в § 1 и для вещественного случая, но там он может быть применен лишь для описания образа лучевого преобразования.

В § 5 сначала рассматриваются подмногообразия K прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих произвольную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Для них строится явная локальная формула обращения, восстанавливающая функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым из K. Этот пример естественно приводит к постановке следующей задачи: описать все "хорошие" трехмерные подмногообразия K (допустимые комплексы) в многообразии H всех прямых, для которых существует явная локальная формула обращения, восстанавливающая функцию на $\mathbb{C}^3$ через ее интегралы по прямым из K. Изучается геометрическая структура допустимых комплексов; показано, что любой допустимый комплекс есть либо многообразие прямых, пересекающих комплексную кривую, либо многообразие прямых, касательных к некоторой комплексной поверхности.

§ 1. Лучевое преобразование в вещественном аффинном пространстве

1.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{R}^3$. Будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ параметрическими уравнениями

$$x = \alpha t + \beta, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — точка прямой, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha \neq 0$ — ее направляющий вектор.

Определение. Определим интеграл функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ по произвольной прямой $x = \alpha t + \beta$ равенством

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, dt; \tag{1.1}$$

назовем определенную так функцию $\varphi(\alpha,\beta)$ лучевым преобразованием функции f и обозначим через $\mathcal{I}f$.

В силу этого определения φ является функцией на многообразии E всех пар $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^3\setminus 0)\times\mathbb{R}^3$. Очевидно, что она не зависит от выбора точки β на прямой, т.е.

$$\varphi(\alpha,\beta+\alpha t_0)=\varphi(\alpha,\beta)\quad \text{для любого}\quad t_0\in\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Тем самым, при любом фиксированном α она является функцией на фактор-пространстве $\mathbb{R}^3/\{\alpha\}$, где $\{\alpha\}$ — подпространство, натянутое на вектор α.

Очевидно также, что функция φ удовлетворяет условию однородности:

$$\varphi(\lambda\alpha,\beta)=|\lambda|^{-1}\varphi(\alpha,\beta),\quad \lambda\neq 0. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что функция φ зависит только от самой прямой и от меры на прямой, определяемой вектором α, т.е. является функцией в одномерном расслоении над многообразием прямых. Если при этом в $\mathbb{R}^3$ введена евклидова метрика, то в определении (1.1) можно предполагать, что $|\alpha|=1$; тогда φ является функцией на самом многообразии прямых.

Замечание. Условия (1.2) и (1.3) эквивалентны следующей системе соотношений:

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}=0,\quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=-\varphi;\quad \varphi(-\alpha,\beta)=\varphi(\alpha,\beta). \tag{1.4}$$

Иногда мы будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$x_1=\alpha_1x_3+\beta_1,\quad x_2=\alpha_2x_3+\beta_2,$$

а лучевое преобразование — формулой

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha_1x_3+\beta_1,\,\alpha_2x_3+\beta_2,\,x_3)\,dx_3. \tag{1.5}$$

Очевидно, что функция ψ и функция φ, определенная формулой (1.1), связаны простыми соотношениями:

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\varphi(\alpha_1,\alpha_2,1,\beta_1,\beta_2,0);$$
$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=|\alpha_3|^{-1}\,\psi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3},\frac{\alpha_2}{\alpha_3},\beta_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\beta_3,\beta_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\beta_3\right).$$

1.2. Лучевое преобразование и гипергеометрическая функция Гаусса. Интегралы (1.1) и (1.5) задают лучевое преобразование не только быстро убывающих функций $f \in S(\mathbb{R}^3)$, но и любых функций f на $\mathbb{R}^3$, для которых они сходятся или им можно придать тот или иной смысл. В частности, определено лучевое преобразование ψ_λ следующей функции на $\mathbb{R}^3$:

$$f_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (x_1)_+{}^{\lambda_1-1}\,(x_2)_+{}^{\lambda_2-1}\,(x_3)_+{}^{\lambda_3-1},$$

где $t_+^\lambda = t^\lambda$ при $t > 0$ и $t_+^\lambda = 0$ при $t < 0$; λ_i — произвольные комплексные числа. Установим связь между этим лучевым преобразованием и гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b, c; x)$.

По определению, функция ψ_λ задается интегралом:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_0^\infty (\alpha_1 x_3 + \beta_1)_+{}^{\lambda_1-1}\,(\alpha_2 x_3 + \beta_2)_+{}^{\lambda_2-1}\,x_3^{\lambda_3-1}\,dx_3.$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\operatorname{Re}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) < 2$, и в этой области является аналитической функцией от $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Поэтому его можно определить при любых значениях λ_i как аналитическое продолжение по λ_i этой функции.

Заметим, что интервал, на котором подынтегральная функция отлична от 0, зависит от знаков α_i и β_i, $i = 1, 2$. Рассмотрим для определенности область в многообразии прямых H, в которой $\alpha_i < 0 < \beta_i$, $i = 1, 2$. В этой области заменой переменной $x_3 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} t$ интеграл приводится к виду:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) =$$
$$= \beta_1^{\lambda_1-1}\,\beta_2^{\lambda_2+\lambda_3-1}\,|\alpha_2|^{-\lambda_3} \int\limits_0^1 (1 - xt)_+{}^{\lambda_1-1}\,(1-t)^{\lambda_2-1}\,t^{\lambda_3-1}\,dt,$$

где $x = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$.

Сравним полученное выражение с известным представлением гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c; x)$ при $|x| < 1$ в виде эйлеровского интеграла:

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-xt)^{-a}\,dt;$$

интеграл сходится при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, а при других значениях b и c его нужно понимать в смысле аналитического продолжения по b и c.

Мы заключаем, что при $\alpha_i < 0 < \beta_i$, $i = 1, 2$, и $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} < 1$ функция ψ_λ выражается через функцию Гаусса:

$$\psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \\ = \frac{\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_2 + \lambda_3)}\,\beta_1^{\lambda_1 - 1}\,\beta_2^{\lambda_2 + \lambda_3 - 1}\,|\alpha_2|^{-\lambda_3}\,F(-\lambda_1 + 1, \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3; \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}).$$

Отсюда следует, что

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c - b)}\,\psi_\lambda(-x - 1, 1, 1) \ \text{ при } 0 < x < 1,$$

где $\lambda = (1 - a, c - b, b)$.

Аналогичные выражения функции ψ_λ через функцию Гаусса получаются при других комбинациях знаков α_i и β_i, $i = 1, 2$.

1.3. Теорема об образе оператора $\mathcal{I}$. Этот и последующие три пункта посвящены описанию образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ функций Шварца при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$.

Ясно, прежде всего, что функции из образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяют условиям гладкости и быстрого убывания. Далее, поскольку лучевое преобразование действует из пространства функций от 3 переменных в пространство функций от 4 переменных, то естественно ожидать, что функции из образа должны удовлетворять и дополнительным условиям.

Убедимся, что любая функция φ из образа лучевого преобразования удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

В самом деле, если $\varphi = \mathcal{I}f$, то из (1.1) следует:

$$\frac{\partial^2\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f''_{x_i, x_j}(\alpha t + \beta)\,dt.$$

Таким образом, функция $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j}$ симметрична относительно перестановки индексов i и j.

Будет доказано, что соотношения (1.5) не только необходимы, но и достаточны для принадлежности функции φ образу пространства $S(\mathbb{R}^3)$. Перейдем к подробным определениям и формулировкам.

Обозначим через H многообразие прямых в $\mathbb{R}^3$ и через $G \simeq P^2$ многообразие одномерных подпространств в $\mathbb{R}^3$, т.е. подмногообразие прямых, проходящих через точку 0. Многообразие H снабжено структурой канонического векторного расслоения над G. Именно, проекция $\pi : H \to G$ ставит в соответствие каждой прямой $h \in H$ параллельное ей подпространство $a \in G$. Таким образом, слой расслоения π над a есть фактор-пространство $H_a = \mathbb{R}^3/a$.

Для H, как и для всякого векторного расслоения с компактной базой, определено понятие быстро убывающей функции: функция на H называется быстро убывающей, если она быстро убывает в каждом слое расслоения $H \to G$.

Определение. Обозначим через $S(H)$ пространство функций $\varphi(\alpha, \beta)$ на E, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3) и таких, что функция $\varphi(\alpha, \beta)$, $|\alpha| = 1$, рассматриваемая как функция на H, является бесконечно дифференцируемой функцией, быстро убывающей вместе со всеми производными.

Из определения оператора $\mathcal{I}$ непосредственно следует, что образ пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании принадлежит $S(H)$:

$$\mathcal{I} : S(\mathbb{R}^3) \to S(H).$$

Теорема 1.1. *Функция $\varphi \in S(H)$ принадлежит образу пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$, т.е. представима в виде $\varphi = \mathcal{I} f$, где $f \in S(\mathbb{R}^3)$, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе* (1.6).

Доказательство будет проведено в пп. 4 — 6.

Приведем другую эквивалентную формулировку теоремы об образе. Введем оператор κ, относящий каждой гладкой функции $\varphi(\alpha, \beta)$ на E следующую дифференциальную 1-форму на E:

$$\kappa\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1}\, d\alpha_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2}\, d\alpha_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_3}\, d\alpha_3. \tag{1.7}$$

Лемма. *Если $\varphi \in S(H)$, то $\kappa\varphi$ опускается с E на многообразие $\widetilde{H}$ ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$.*

В самом деле, из (1.2), (1.3) следует, что форма $\kappa\varphi$ инвариантна относительно преобразований $\beta \mapsto \beta + \alpha t_0$ и $\alpha \mapsto \lambda\alpha, \quad \lambda > 0$.

Заметим, что при изменении ориентации прямой ($\alpha \mapsto -\alpha$) форма $\kappa\varphi$ меняет знак.

Обозначим для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ через H^x подмногообразие прямых, проходящих через x, и через $\kappa_x\varphi$ ограничение формы $\kappa_x\varphi$ на подмногообразие H^x.

Предложение 1.1. *Условие (1.5) эквивалентно условию замкнутости дифференциальной формы $\kappa_x\varphi$ на подмногообразии H^x при любом $x \in \mathbb{R}^3$, т.е. условию, что $d\kappa_x\varphi = 0$.*

Доказательство. Имеем:

$$\kappa_x\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\beta_i}\Big|_{\beta=x}\, d\alpha_i.$$

Значит, внешний дифференциал формы $\kappa_x\varphi$ задается формулой:

$$d\kappa_x\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j}\Big|_{\beta=x}\, d\alpha_i \wedge d\alpha_j =$$
$$= \sum_{i<j}\Big(\frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j} - \frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i}\Big)\Big|_{\beta=x}\, d\alpha_i \wedge d\alpha_j.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение.

В силу Предложения 1.1 теорема 1.1 допускает следующую эквивалентную формулировку:

Теорема 1.2. *Функция $\varphi \in S(H)$ тогда и только тогда принадлежит образу пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$, когда для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ дифференциальная форма $\kappa_x\varphi$ на подмногообразии $H^x \subset H$ замкнута.*

Замечание. Если лучевое преобразование задано в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H формулой (1.5), то уравнения (1.6) эквивалентны одному уравнению на функцию ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}, \tag{1.8}$$

а оператор κ задается в локальных координатах следующей формулой:

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\alpha_2. \tag{1.9}$$

1.4. Пространство $S(H')$. Этот и два следующих пункта посвящены доказательству основной теоремы об образе пространства $S(\mathbb{R}^3)$. При желании читатель может их пропустить и перейти к чтению п. 1.7. Для описания образа пространства $S(\mathbb{R}^3)$ при лучевом преобразовании сначала перейдем при помощи преобразования Фурье от функций

$\varphi \in S(H)$ к функциям на расслоении $H' \to G$, двойственном к расслоению $H \to G$.

Заметим,что слой расслоения $H' \to G$ над $a \in G$, т.е. пространство H'_a, двойственное к $\mathbb{R}^3/a$, канонически вложен в $(\mathbb{R}^3)'$ как подпространство векторов, ортогональных к a. Таким образом, элементами H' являются пары (a,ξ), где $a \in G$ и ξ — вектор в $(\mathbb{R}^3)'$, ортогональный к a.

Определение. Обозначим через $S(H')$ пространство функций Шварца на H', где $H' \to G$ — расслоение, двойственное к расслоению $H \to G$.

Введем преобразование Фурье $\mathcal{F}_0$ функций $\varphi(\alpha,\beta) \in S(H)$ по слоям расслоения $H \to G$:

$$(\mathcal{F}_0\varphi)(\alpha,\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \varphi(\alpha,\beta)\, e^{i\,\langle \beta,\xi\rangle}\, d_\alpha\beta, \qquad \xi \in (\mathbb{R}^3/\{\alpha\})',$$

где $\{\alpha\}$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор α, а элемент объема $d_\alpha\beta$ на $\mathbb{R}^3/\{\alpha\}$ выбран согласованно с элементом объема $dx = dx_1\, dx_2\, dx_3$ на $\mathbb{R}^3$ и вектором α, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, dt\, d_\alpha\beta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, dx$$

для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$.

Из определения $\mathcal{F}_0$ и из условия (1.3) следует, что $\mathcal{F}_0\varphi(\lambda\alpha,\xi) = \mathcal{F}_0\varphi(\alpha,\xi)$ для любого $\lambda \neq 0$ и, значит,$\mathcal{F}_0\varphi$ есть функция на H'.

Напомним, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функций на $\mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{i\,\langle \xi,x\rangle}\, dx$$

задает изоморфизм пространств:

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^3) \to S((\mathbb{R}^3)').$$

Аналогично из свойств обычного преобразования Фурье легко следует

Предложение 1.2. *Если $\varphi \in S(H)$, то $\mathcal{F}_0\varphi \in S(H')$, и отображение $\varphi \mapsto \mathcal{F}_0\varphi$ задает изоморфизм пространств*

$$\mathcal{F}_0 : S(H) \to S(H').$$

Сформулируем в виде отдельных предложений два важных свойства пространства $S(H')$. Первое из этих свойств является очевидным, второе требует доказательства, которое мы здесь опускаем.

Предложение 1.3. *Если $F \in S(\mathbb{R}^3)$, то функция φ на H', заданная равенством*

$$\varphi(a,\xi) = F(\xi) \quad \text{для любого} \, (a,\xi) \in H',$$

принадлежит $S(H')$. Тем самым, определено естественное вложение

$$S((\mathbb{R}^3)') \hookrightarrow S(H').$$

Предложение 1.4. *Пусть функция $\varphi \in S(H')$ такова, что*

$$\varphi(a,\xi) = F(\xi) \quad \text{для любого} \quad \xi \neq 0,$$

т.е. для любого $\xi \neq 0$ функция $\varphi(a,\xi)$ не зависит от подпространства a, ортогонального вектору ξ. Тогда $\varphi(a,0)$ не зависит от подпространства a, и если положить $F(0) = \varphi(a,0)$, то определенная так на всем пространстве $(\mathbb{R}^3)'$ функция F принадлежит $S((\mathbb{R}^3)')$.

1.5. Описание образа $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$. Найдем образ $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$ при сквозном отображении

$$\mathcal{F}_0\mathcal{I} : S(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathcal{I}} S(H) \xrightarrow{\mathcal{F}_0} S(H').$$

Предложение 1.5. *Для любой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ имеем:*

$$\mathcal{F}_0\mathcal{I}f = (2\pi)^{1/2}\mathcal{F}f, \tag{1.10}$$

где $\mathcal{F}f$ — преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. $\mathcal{F}f$ — элемент подпространства $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$.

Доказательство. Пусть $(a,\xi) \in H'$ и $\alpha \neq 0$ — произвольный вектор в подпространстве $a \in G$. Тогда имеем:

$$(\mathcal{F}_0\mathcal{I}f)(\alpha,\xi) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/a} \mathcal{I}f(\alpha,\beta)\, e^{i\langle\beta,\xi\rangle}\, d_\alpha\beta =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3/\{\alpha\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \beta)\, e^{i\langle\beta,\xi\rangle}\, dt\, d_\alpha\beta =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx = (2\pi)^{1/2}(\mathcal{F}f)(\xi).$$

Следствие. *Образ $S(\mathbb{R}^3)$ при отображении $\mathcal{F}_0\mathcal{I}$ есть подпространство $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$.*

В самом деле, из Предложения 1.5 следует, что образ $S(\mathbb{R}^3)$ при отображении $\mathcal{F}_0\mathcal{I}$ содержится в $S((\mathbb{R}^3)')$. Обратно, если $\widetilde{f} \in S((\mathbb{R}^3)')$, то $\widetilde{f} = \mathcal{F}f$, где $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Но тогда $\mathcal{F}_0\mathcal{I}f = (2\pi)^{1/2}\mathcal{F}f = (2\pi)^{1/2}\widetilde{f}$.

Примечание. Из равенства (1.10) следует формула обращения для лучевого преобразования. Именно, для восстановления f нужно к функции $\mathcal{F}_0\mathcal{I}f$ применить обратное преобразование Фурье на $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$f = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_0)\mathcal{I}f.$$

1.6. Доказательство теоремы 1.1 об образе лучевого преобразования. Пусть $\varphi \in S(H)$ и $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}_0\varphi$. Для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 1.6. *Если функция φ удовлетворяет уравнениям (1.6), то $\tilde{\varphi}(a,\xi) = F(\xi)$ для любого вектора $\xi \neq 0$, т.е. при $\xi \neq 0$ функция $\tilde{\varphi}(a,\xi)$ не зависит от подпространства a, ортогонального ξ.*

В самом деле, в этом случае, в силу Предложения 1.4, функция $\tilde{\varphi} = \mathcal{I}_0\varphi$ принадлежит подпространству $S((\mathbb{R}^3)') \subset S(H')$. Но тогда, в силу Предложения 1.5 (Следствие), $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}_0\mathcal{I}f$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$. Значит, $\varphi = \mathcal{I}f$.

Доказательство Предложения 1.6. Пусть a — любое одномерное подпространство и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — любой ненулевой вектор в a. Обозначим через V_i, $i = 1, 2, 3$, совокупность подпространств a, для которых $\alpha_i \neq 0$. Поскольку V_i образуют покрытие G, то утверждение достаточно доказать для каждой области V_i в отдельности. Рассмотрим для определенности область V_3.

Зададим каждое подпространство $a \in V_3$ вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 1)$ и примем координаты α_1, α_2 этого вектора в качестве координат на V_3. Очевидно далее, что на каждой прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной a, существует точка $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, у которой $\beta_3 = 0$. Примем координаты β_1, β_2 этой точки в качестве координат в $\mathbb{R}^3/a$. В этой системе координат мера на $\mathbb{R}^3/a$ имеет вид $d_\alpha\beta = d\beta_1\, d\beta_2$, а потому

$$\tilde{\varphi}(a,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\, e^{i(\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2)}\, d\beta_1\, d\beta_2,$$

где обозначено:

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, 1, \beta_1, \beta_2, 0),$$

причем α_1, α_2 и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ связаны соотношением:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \xi_3 = 0. \tag{1.11}$$

В силу соотношения (1.11), можно принять ξ_1, ξ_2 в качестве координат на $H'_a = (\mathbb{R}^3/a)'$. При этом, если $\xi \neq 0$, то $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$.

В силу условия теоремы, функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1}.$$

Отсюда следует, что ее преобразование Фурье по β_1, β_2 удовлетворяет уравнению

$$\xi_2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha_1} = \xi_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha_2}.$$

При $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2, -(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)),$$

т.е. в силу соотношения (1.11)

$$\tilde{\varphi}(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Таким образом, при фиксированном $\xi \neq 0$ функция $\tilde{\varphi}(a, \xi)$ не зависит от a.

1.7. Формулы обращения. Рассмотрим задачу о восстановлении функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$ через ее лучевое преобразование $\varphi = \mathcal{I} f$. Как уже отмечалось в начале главы II, эта задача переопределена. Например, чтобы восстановить f в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^x$, достаточно провести через x произвольную плоскость и воспользоваться формулой обращения для преобразования Радона, связанного с этой плоскостью.

Естественно поставить другую задачу — восстановить функцию f через ее лучевое преобразование, заданное на некотором трехмерном подмногообразии K в многообразии H всех прямых. Разумеется, существование формулы обращения и ее явный вид могут существенно зависеть от структуры подмногообразия K.

Простейший пример: K — многообразие всех прямых, пересекающих фиксированную прямую l в $\mathbb{R}^3$. В этом случае, чтобы восстановить f в произвольной точке x, нужно рассмотреть плоскость π, натянутую на x и l (если $x \in l$, то произвольную плоскость, содержащую l). Так как по условию интегралы по всем прямым в этой плоскости нам заданы, то $f(x)$ можно восстановить по формуле обращения для преобразования Радона на плоскости, полученной в § 1 главы 1.

В этом пункте мы рассмотрим более общий пример. Пусть K — многообразие всех прямых в $\mathbb{R}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Требуется восстановить функцию $f \in S(\mathbb{R}^3)$ по функции $\mathcal{I}f\,|_K$, т.е. по функции

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t + \lambda)\, dt, \quad (\alpha, \lambda) \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \times \Lambda. \tag{1.12}$$

А.А. Кириллов [1)] доказал, что функция f тогда и только тогда однозначно восстанавливается по функции φ, когда кривая Λ пересекает почти каждую плоскость в $\mathbb{R}^3$. Построим явную формулу обращения, восстанавливающую f по функции φ в случае, когда условие Кириллова выполнено.

Перейдем от φ к новой функции ψ, определенной следующим равенством:

$$\psi(\xi, \lambda) = \int\limits_{|\omega|=1} \varphi(\omega, \lambda)\, \langle \xi, \omega \rangle^{-2}\, d\sigma, \quad \xi \in (\mathbb{R}^3)' \setminus 0. \tag{1.13}$$

Интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения как значение при $s = -2$ аналитической функции, заданной при $\operatorname{Re} s > 0$ сходящимся интегралом:

$$\int\limits_{|\omega|=1} \varphi(\omega, \lambda)\, \langle \xi, \omega \rangle^{s}\, d\sigma.$$

Замечание. Функция ψ совпадает с преобразованием Фурье по α функции φ, рассматриваемой как обобщенная однородная функция от α.

Задача тем самым свелась к восстановлению f по функции ψ.

Обозначим через $\lambda(\xi, p)$ произвольную точку пересечения плоскости $\langle \xi, x \rangle - p = 0$ с кривой Λ. По предположению, для почти каждой пары (ξ, p) хотя бы одна такая точка существует.

Предложение 1.7. *Функция $\psi(\xi, \lambda(\xi, p))$ не зависит от выбора точки $\lambda(\xi, p)$, т. е. $\psi(\xi, \lambda(\xi, p)) = \Psi(\xi, p)$, и справедлива следующая формула обращения*:

$$f(x) = c \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi, p)\, (\langle \xi, x \rangle - p)^{-2}\, dp\, d\sigma, \tag{1.14}$$

[1)] Кириллов А.А. Об одной задаче И.М.Гельфанда // Докл. АН СССР. — 1961. — № 2. — С. 276–277.

где интеграл, подобно (1.13)*, надо понимать в смысле регуляризованного значения.*

Приведем набросок доказательства Предложения 1.7. Выразим ψ непосредственно через исходную функцию f, подставив (1.9) в формулу (1.13). Мы получим:

$$\psi(\xi,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,(\langle\xi, x-\lambda\rangle)^{-2}\,dx.$$

Следовательно,

$$\psi(\xi,\lambda(\xi,p)) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,(\langle\xi, x\rangle - p)^{-2}\,dx. \tag{1.15}$$

Из (1.15) следует прежде всего, что $\psi(\xi,\lambda(\xi,p))$ не зависит от выбора точки $\lambda(\xi,p)$ пересечения кривой Λ с плоскостью $\langle\xi, x\rangle - p = 0$. Далее, функция $\psi(\xi,\lambda(\xi,p)) = \Psi(\xi,p)$ получается из исходной функции f преобразованием, аналогичным преобразованию Радона в $\mathbb{R}^3$, где ядро $\delta(\langle\xi, x\rangle - p)$ заменено другой обобщенной функцией $(\langle\xi, x\rangle - p)^{-2}$. Для этого преобразования, подобно преобразованию Радона, справедлива формула обращения, выражающаяся равенством (1.14).

1.8. Аналоги оператора κ. В п. 1.3 был введен линейный оператор κ из пространства $S(H)$ в пространство $\Omega^1(H)$ дифференциальных 1-форм на многообразии прямых H, обладающий следующим важным свойством:

Условие А. Если $\varphi = \mathcal{I}f$, то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразиях H^x прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{R}^3$.

Поставим задачу: описать все линейные операторы κ, обладающие этим свойством. В формулировке Предложения 1.8 мы уточним постановку задачи, сузив класс рассматриваемых операторов.

Будем предполагать, что прямые в $\mathbb{R}^3$ заданы уравнениями

$$x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

а лучевое преобразование $\psi = \mathcal{I}f$ задано в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H формулой (1.5). Согласно п. 1.3 функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1},$$

а оператор κ задается следующей формулой:

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}d\alpha_2. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что, кроме $\kappa = \kappa_1$, условию A удовлетворяют также следующие три оператора:

$$\begin{aligned}
\kappa_2\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_2}\,d\beta_2,\\
\kappa_3\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}\,d\alpha_2,\\
\kappa_4\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}\,d\beta_2.
\end{aligned}$$

В самом деле, так как $d\beta_i\,\big|_{H^x} = -x_3\,d\alpha_i$, $i = 1, 2$, на H^x, то на H^x формы $\kappa_2\psi$ и $\kappa_4\psi$ пропорциональны соответственно $\kappa_1\psi$ и $\kappa_3\psi$. Далее, имеем: $\kappa_2\psi + \kappa_3\psi = d\psi$. Следовательно, на H^x все формы $\kappa_i\psi$ с точностью до множителя когомологичны форме $\kappa_1\psi$.

Рассмотрим операторы κ вида

$$\kappa\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1}\omega_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}\omega_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}\omega_3 + \frac{\partial\psi}{\partial\beta_1}\omega_4, \tag{1.17}$$

где ω_i — произвольные 1-формы на H.

Предложение 1.8. *Любой оператор κ вида* (1.17)*, удовлетворяющий условию A, является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов κ_i, $i = 1, 2, 3, 4$.*

Доказательство. Для удобства будем писать α_3, α_4 вместо β_1, β_2. Тогда выражение (1.17) примет вид:

$$\kappa\psi = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}\omega_i, \quad \text{где} \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}(\alpha)\,d\alpha_j, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Из равенства $d\kappa\psi\,\big|_{H^x} = 0$ следует, что на подмногообразиях H^x дифференциальные формы ω_i удовлетворяют соотношениям:

$$\omega_i \wedge d\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.18}$$

$$\omega_1 \wedge d\alpha_2 + \omega_2 \wedge d\alpha_1 = 0, \quad \omega_3 \wedge d\alpha_4 + \omega_4 \wedge d\alpha_3 = 0, \tag{1.19}$$

$$d\omega_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1.20}$$

Из (1.18) следует, что

$$\omega_1 = a_{11}\,d\alpha_1 + a_{13}\,d\alpha_3, \quad \omega_2 = a_{22}\,d\alpha_2 + a_{24}\,d\alpha_4,$$
$$\omega_3 = a_{31}\,d\alpha_1 + a_{33}\,d\alpha_3, \quad \omega_4 = a_{42}\,d\alpha_2 + a_{44}\,d\alpha_4.$$

Подставив полученные выражения для ω_i в (1.19), получим:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{24}, \quad a_{31} = a_{42}, \quad a_{33} = a_{44}.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa = a_{11}\,\kappa_4 + a_{33}\,\kappa_2 + a_{31}\,\kappa_1 + a_{13}\,\kappa_3.$$

Наконец, подставив это выражение в (1.20), заключаем, что все входящие в него коэффициенты a_{ij} суть постоянные.

§ 2. Лучевое преобразование дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$

2.1. Определение лучевого преобразования дифференциальных форм. Здесь будут рассмотрены интегральные преобразования, относящие дифференциальным формам на $\mathbb{R}^3$ их интегралы по прямым в $\mathbb{R}^3$. Эти преобразования определены не только для дифференциальных форм степени 1, но также и для дифференциальных форм степеней 2 и 3. При этом получаются дифференциальные формы на многообразии прямых степени на единицу меньшей. Аналогичные преобразования дифференциальных форм на $\mathbb{R}^3$, связанные с плоскостями в $\mathbb{R}^3$, рассматривались в § 7 главы I.

Хотя определение этих преобразований можно дать в инвариантной форме, нам удобнее связать его здесь с выбором конкретной локальной системы координат на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$.

Будем задавать прямые в $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$x_i = \alpha_i\,x_3 + \beta_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.1}$$

и примем коэффициенты α_i, β_i этих уравнений в качестве локальных координат на многообразии прямых.

Введем 4-мерное многообразие флагов A, элементы которого — пары (h, x), где h — произвольная прямая в $\mathbb{R}^3$, а x — произвольная точка в $\mathbb{R}^3$, принадлежащая прямой h. Зададим на A две системы координат. Первая система — $(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2)$, где (x_1, x_2, x_3) — координаты точки в $\mathbb{R}^3$, а (α_1, α_2) задают направление прямой, проходящей через эту точку. Вторая система — $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$

локальные координаты прямой, а x_3 — координата точки на этой прямой. Эти две системы координат связаны соотношением (2.1).

Определим лучевое преобразование дифференциальной формы ω на $\mathbb{R}^3$ степени $r \geqslant 1$. Будем трактовать ω как дифференциальную форму на A, заданную в системе координат $(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2)$. Перейдем в выражении для ω ко второй системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$ и отбросим слагаемые, не содержащие dx_3. Полученное выражение является при фиксированных $\alpha_i, \beta_i, d\alpha_i, d\beta_i$ дифференциальной 1-формой на прямой с координатами α_i, β_i, $i = 1, 2$. Интегрируя ее по этой прямой, мы получим дифференциальную $(r-1)$-форму на многообразии прямых. Назовем эту форму лучевым преобразованием исходной дифференциальной формы ω и обозначим через $\mathcal{I}\omega$.

Приведенное определение удобно для вычислений, но оно привязано к конкретной системе координат в $\mathbb{R}^3$ и в многообразии прямых H. Существует инвариантное определение лучевого преобразования дифференциальных форм в терминах операций поднятия и опускания. Именно, для любого гладкого расслоения $\pi : A \to B$ определены две операции над дифференциальными формами — операция $\pi^\star$ поднятия и операция $\pi_\star$ опускания. Первая из них переводит дифференциальные формы на B в дифференциальные формы той же степени на A; вторая (интегрирование по слоям расслоения) переводит дифференциальные формы степени r на A в формы степени $r-l$ на B, где l – размерность слоя расслоения $A \to B$ (предполагается, что $r \geqslant l$).

Если задана пара расслоений $A \to B$ и $A \to C$, то с нею можно связать интегральное преобразование

$$\mathcal{I} : \Omega(B) \to \Omega(C)$$

из пространства дифференциальных форм на B в пространство дифференциальных форм на C. Оно определяется как композиция $\mathcal{I} = \pi_\star \pi^\star$ операции $\pi^\star$ поднятия формы с B на A и операции $\pi_\star$ опускания формы с A на C. Оказывается, что определенный так оператор $\mathcal{I}$ перестановочен с оператором внешнего дифференцирования d:

$$d\mathcal{I} = \mathcal{I}d.$$

Лучевое преобразование $\mathcal{I} : \Omega(\mathbb{R}^3) \to \Omega(H)$ есть пример такой операции, связанный с расслоениями $A \to \mathbb{R}^3$ и $A \to H$, где A — пространство флагов. Свойство $d\mathcal{I} = \mathcal{I}\,d$ этой операции можно проверить непосредственным вычислением.

2.2. Лучевое преобразование 3-форм на $\mathbb{R}^3$. Пусть задана дифференциальная 3-форма

$$\omega = f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad f \in S(\mathbb{R}^3).$$

Чтобы построить ее лучевое преобразование, надо сначала представить ω в координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3)$ на A:

$$\omega = f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,(x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1) \wedge (x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2) \wedge dx_3.$$

В соответствии с определением из п. 2.1, лучевое преобразование формы ω задается следующим равенством:

$$\mathcal{I}\omega = \varphi_2(\alpha,\beta)\, d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \varphi_1(\alpha,\beta)\,(d\alpha_1 \wedge d\beta_2 - d\alpha_2 \wedge d\beta_1) + \\ + \varphi_0(\alpha,\beta)\, d\beta_1 \wedge d\beta_2, \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_i(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,(x_3)^i\, dx_3, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.3)$$

Исследуем свойства полученной формы. Прежде всего, поскольку $f \in S(\mathbb{R}^3)$, коэффициенты φ_i этой формы удовлетворяют естественным условиям быстрого убывания вместе со всеми производными.

Предложение 2.1. *Дифференциальная форма $\mathcal{I}\omega$ замкнута.*

В самом деле, из выражений (2.3) для коэффициентов φ_i формы $\mathcal{I}\omega$ следует:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Эти соотношения эквивалентны условию замкнутости формы $\mathcal{I}\omega$.

Замечание. Замкнутость $\mathcal{I}\omega$ вытекает также из замкнутости ω как формы максимальной степени на $\mathbb{R}^3$ и перестановочности $\mathcal{I}$ с оператором внешнего дифференцирования.

Предложение 2.2. *Ограничение дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$ на подмногообразие прямых, лежащих в произвольной фиксированной плоскости, равно нулю.*

Доказательство. Подмногообразие P прямых, лежащих в произвольной фиксированной плоскости, задается в локальных координатах (α,β) следующей системой уравнений:

$$\lambda_1\,(\alpha_1 - \alpha_1^0) + \lambda_2\,(\alpha_2 - \alpha_2^0) = 0, \quad \lambda_1\,(\beta_1 - \beta_1^0) + \lambda_2\,(\beta_2 - \beta_2^0) = 0.$$

Здесь (α^0, β^0) — координаты произвольной фиксированной прямой на этой плоскости, а λ_1, λ_2 — постоянные. Значит, на этом подмногообразии P мы имеем: $d\alpha_2 = \lambda\, d\alpha_1$, $d\beta_2 = \lambda\, d\beta_1$, где $\lambda = -\lambda_1/\lambda_2$, а потому из (2.2) следует, что $\mathcal{I}\omega\,|_P = 0$.

Теорема 2.1. *Дифференциальная 2-форма Ω с быстро убывающими коэффициентами на многообразии прямых H является лучевым преобразованием некоторой* **3**-*формы* $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $\quad f \in S(\mathbb{R}^3)$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям Предложений* 2.1 *и* 2.2.

Доказательство. Необходимость условий уже установлена. Докажем их достаточность. Пусть дифференциальная 2-форма Ω удовлетворяет условиям Предложений 2.1 и 2.2. Докажем сначала, что она имеет вид (2.2), т.е. не содержит членов с $d\alpha_i \wedge d\beta_i$, $\quad i=1,2$, а коэффициенты при $d\alpha_1 \wedge d\beta_2$ и $d\alpha_2 \wedge d\beta_1$ различаются только знаком.

В самом деле, пусть

$$\Omega = a_1\,d\alpha_1 \wedge d\beta_1 + a_2\,d\alpha_2 \wedge d\beta_2 + b_1\,d\alpha_1 \wedge d\beta_2 + b_2\,d\alpha_2 \wedge d\beta_1 + \ldots,$$

где многоточием обозначены остальные члены. Тогда, если h^0 — произвольная прямая и P — многообразие прямых в произвольной плоскости, проходящей через h^0, то (см. доказательство Предложения 2.2) имеем:

$$\Omega\,|_P = (a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda(b_1 + b_2))\,d\alpha_1 \wedge d\beta_1.$$

Так как, согласно условию, $\Omega\,|_P = 0$, то, ввиду произвольности λ, отсюда следует: $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = -b_2$.

Итак, доказано, что форма Ω имеет вид:

$$\Omega = \psi_2(\alpha,\beta)\,d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 + \psi_1(\alpha,\beta)\,(d\alpha_1 \wedge d\beta_2 - d\alpha_2 \wedge d\beta_1) + \\ + \psi_0(\alpha,\beta)\,d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

Из замкнутости Ω следует, что функции ψ_i связаны соотношениями

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\alpha_i}, \quad i = 1,2. \tag{2.5}$$

Поэтому функция ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_1\beta_2} = \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}.$$

Значит, по теореме об образе лучевого преобразования (см. § 1), она является лучевым преобразованием некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^3)$:

$$\psi_0(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3.$$

Убедимся, что $\Omega = \mathcal{I}\omega$, где $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. В самом деле, из формул (2.3), которыми задаются коэффициенты φ_i формы $\mathcal{I}\omega$, следует прежде всего, что $\psi_0 = \varphi_0$. Далее, отсюда и из (2.4), (2.5) следует, что $\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_i} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_i}$, $i = 1, 2$. Следовательно, ввиду быстрого убывания ψ_1 и φ_1, $\psi_1 = \varphi_1$. Аналогично убеждаемся, что $\psi_2 = \varphi_2$ и, значит, $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

Заметим, что форма $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ восстанавливается только по одному коэффициенту φ_0 формы $\mathcal{I}\omega$, поскольку функция φ_0 является лучевым преобразованием функции f.

2.3. Лучевое преобразование 2-форм на $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим теперь произвольную дифференциальную 2-форму

$$\omega = f_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2$$

с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. В координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_3$ на пространстве флагов она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\omega = f_1\,(x_3\,d\alpha_2 + d\beta_2) \wedge dx_3 \ + \ f_2\,dx_3 \wedge (x_3\,d\alpha_1 + d\beta_1) + \\ + f_3\,(\alpha_1\,dx_3 + x_3\,d\alpha_1 + d\beta_1) \wedge (\alpha_2\,dx_3 + x_3\,d\alpha_2 + d\beta_2).\end{aligned}$$

В соответствии с определением из п. 2.1, лучевое преобразование 2-формы ω есть 1-форма

$$\mathcal{I}\omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b_1\,d\beta_1 + b_2\,d\beta_2 \tag{2.6}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_2\,\psi_3 - \psi_2, \quad a_2 = -\alpha_1\,\psi_3 + \psi_1, \\ b_1 &= \alpha_2\,\varphi_3 - \varphi_2, \quad b_2 = -\alpha_1\,\varphi_3 + \varphi_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(\alpha_1\,x_3 + \beta_1\,, \alpha_2\,x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.8}$$

$$\psi_i(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_3\,f_i(\alpha_1\,x_3 + \beta_1\,, \alpha_2\,x_3 + \beta_2, x_3)\,dx_3. \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Рассмотрим сначала задачу о восстановлении формы ω по ее лучевому преобразованию $\mathcal{I}\omega$. Эта задача сводится к соответствующей задаче для функций на основании следующего утверждения:

Предложение 2.3. *Функции* φ_i *следующим образом выражаются через коэффициенты формы* $\mathcal{I}\omega$:

$$\varphi_3 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}, \quad \varphi_1 = \alpha_1 \varphi_3 + b_2, \quad \varphi_2 = \alpha_2 \varphi_3 - b_1. \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) следуют непосредственно из (2.7) — (2.9).

Поскольку функции φ_i являются лучевыми преобразованиями коэффициентов f_i формы ω, то для восстановления этих коэффициентов достаточно применить к φ_i формулу обращения для лучевого преобразования функций.

Перейдем теперь к описанию образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$. Для этого установим сначала соотношения между коэффициентами дифференциальной формы $\mathcal{I}\omega$.

Предложение 2.4. *Коэффициенты* a_i, b_i *дифференциальной формы* $\mathcal{I}\omega$ *удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \beta_2} = \frac{\partial b_2}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} = -\Big(\frac{\partial a_2}{\partial \beta_1} - \frac{\partial b_2}{\partial \alpha_1}\Big) \tag{2.11}$$

и

$$\Delta\Big(\frac{\partial a_1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2}\Big) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1}. \tag{2.12}$$

В самом деле, (2.11) следует непосредственно из (2.7), (2.8), (2.9). Соотношение (2.12) следует из доказанного выше равенства $\varphi_3 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}$, поскольку $\Delta\varphi_3 = 0$.

Предложение 2.5. *Соотношения* (2.11) *эквивалентны условию, что ограничение* $\mathcal{I}\omega\,|_P$ *дифференциальной формы* $\mathcal{I}\omega$ *на подмногообразие прямых, принадлежащих произвольной плоскости* P, *является замкнутой формой на* P, *т.е.* $d\mathcal{I}\omega\,|_P = 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}\omega = \Big(\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_1}\Big)\, d\alpha_1 \wedge d\beta_1 + \Big(\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \beta_2}\Big)\, d\alpha_1 \wedge d\beta_2 + \\ + \Big(\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta_1}\Big)\, d\alpha_2 \wedge d\beta_1 + \Big(\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial a_2}{\partial \beta_2}\Big)\, d\alpha_2 \wedge d\beta_2 + \ldots . \end{aligned}$$

Поэтому соотношения (2.11) эквивалентны условию, что форма $d\mathcal{I}\omega$ не содержит членов с $d\alpha_i \wedge d\beta_i$, $\quad i = 1, 2$, а коэффициенты при $d\alpha_1 \wedge d\beta_2$ и $d\alpha_2 \wedge d\beta_1$ различаются только знаком. В свою очередь, согласно п. 2.2, это условие эквивалентно условию, сформулированному в Предложении.

Теорема 2.2. *Пусть Ω — дифференциальная 1-форма на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно дифференцируемыми быстро убывающими коэффициентами*

$$\Omega = a_1\,d\alpha_1 + a_2\,d\alpha_2 + b_1\,d\beta_1 + b_2\,d\beta_2.$$

Для того чтобы форма Ω была лучевым преобразованием некоторой дифференциальной 2-формы ω на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничения $\Omega\,|_P$ на подмногообразия P прямых, лежащих в одной и той же плоскости, были замкнутыми формами, и чтобы ее коэффициенты удовлетворяли дополнительному условию (2.12).

Доказательство. Необходимость условий теоремы уже доказана. Докажем их достаточность. Итак, пусть дифференциальная форма Ω удовлетворяет условиям теоремы. Тогда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям (2.11) и (2.12).

Определим функции φ_i, $i = 1,2,3$, равенствами (2.10). Из (2.12) следует, что $\Delta\varphi_3 = 0$. Убедимся, что также $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\Delta\varphi_2 = 0$. В самом деле, имеем: $\Delta\varphi_2 = \alpha_2\,\Delta\varphi_3 - \frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_1} - \Delta b_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial b_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial a_1}{\partial\beta_2}\right) - -\frac{\partial^2 b_1}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial\alpha_2\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial\beta_1} - \frac{\partial b_1}{\partial\alpha_1}\right) = 0$. Аналогично устанавливается, что $\Delta\varphi_1 = 0$.

Отсюда следует (см. § 1), что функции φ_i являются лучевыми преобразованиями функций $f_i \in S(\mathbb{R}^3)$, т.е. задаются равенствами (2.8). Введем дифференциальную форму

$$\omega = f_1(x)\,dx_2\wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3\wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1\wedge dx_2$$

и докажем, что $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

В самом деле,

$$\mathcal{I}\omega = \tilde a_1\,d\alpha_1 + \tilde a_2\,d\alpha_2 + \tilde b_1\,d\beta_1 + \tilde b_2\,d\beta_2,$$

где

$$\tilde a_1 = \alpha_2\,\psi_3 - \psi_2,\quad \tilde a_2 = -\alpha_1\,\psi_3 + \psi_1,$$
$$\tilde b_1 = \alpha_2\,\varphi_3 - \varphi_2,\quad \tilde b_2 = -\alpha_1\,\varphi_3 + \varphi_1,$$

а φ_i и ψ_i выражаются через коэффициенты формы ω равенствами (2.8),(2.9).

В силу Предложения 2.3

$$\varphi_3 = \frac{\partial\tilde b_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\tilde a_1}{\partial\beta_2},\quad \varphi_1 = \alpha_1\,\varphi_3 + \tilde b_2,\quad \varphi_2 = \alpha_2\,\varphi_3 - \tilde b_1. \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.8) и (2.13), заключаем, что $\tilde{b}_i = b_i$, $i = 1, 2$. Отсюда, сравнивая соотношения (2.11) для a_i, b_i с аналогичными соотношениями для $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$, получаем: $\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial a_i}{\partial \beta_j}$, $i, j = 1, 2$. Значит, ввиду быстрого убывания функций $a_i, \tilde{a}_i$, имеем: $\tilde{a}_i = a_i$, $i = 1, 2$, а потому $\Omega = \mathcal{I}\omega$.

2.4. Лучевое преобразование 1-форм на $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим дифференциальную 1-форму на $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = f_1(x)\,dx_1 + f_2(x)\,dx_2 + f_3(x)\,dx_3, \quad f_i \in S(\mathbb{R}^3).$$

По определению, ее лучевое преобразование $\varphi = \mathcal{I}\omega$ является функцией на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,\alpha_1 + \\ + f_2(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\,\alpha_2 + \\ + f_3(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)]\,dx_3.$$

Найдем ядро и образ преобразования $\mathcal{I}$.

Предложение 2.6. *Ядро* $\mathrm{Ker}\,\mathcal{I}$ *лучевого преобразования совпадает с подпространством всех точных дифференциальных* 1*-форм на* $\mathbb{R}^3$ *с коэффициентами из* $S(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Очевидно, любая точная 1-форма ω на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $\mathrm{Ker}\,\mathcal{I}$. Обратно, пусть $\omega \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{I}$, т.е. $\mathcal{I}\omega = 0$. Тогда $\mathcal{I}\,d\omega = d\mathcal{I}\omega = 0$. Так как на дифференциальных 2-формах лучевое преобразование $\mathcal{I}$ имеет нулевое ядро, то из $\mathcal{I}\,d\omega = 0$ следует, что $d\omega = 0$, т.е. форма ω замкнута. Из замкнутости формы ω следует ее точность.

Предложение 2.7. *Функция* φ *из пространства Шварца на многообразии прямых* H *принадлежит образу* $\mathrm{Im}\,\mathcal{I}$ *лучевого преобразования тогда и только тогда, когда ее дифференциал* $d\varphi$ *принадлежит образу лучевого преобразования дифференциальных* 2*-форм на* H.

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathrm{Im}\,\mathcal{I}$, т.е. $\varphi = \mathcal{I}\omega_1$, где ω_1 — 1-форма с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Тогда $d\varphi = d\mathcal{I}\omega_1 = \mathcal{I}d\omega_1$, т.е. $d\varphi \in \mathrm{Im}\,\mathcal{I}$. Обратно, пусть $d\varphi \in \mathrm{Im}\,\mathcal{I}$, т.е. $d\varphi = \mathcal{I}\omega_2$, где ω_2 — 2-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Тогда имеем: $\mathcal{I}d\omega_2 = d\mathcal{I}\omega_2 = 0$ и так как на 3-формах в $\mathbb{R}^3$ лучевое преобразование имеет нулевое ядро, то $d\omega_2 = 0$, т.е. форма ω_2 замкнута. Поскольку любая замкнутая 2-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$ точна, то $\omega_2 = d\omega_1$, где ω_1 — 1-форма на $\mathbb{R}^3$ с коэффициентами из $S(\mathbb{R}^3)$. Итак, $d\varphi = \mathcal{I}d\omega_1 = d\mathcal{I}\omega_1$, откуда $d(\varphi - \mathcal{I}\omega_1) = 0$. Следовательно, $\varphi = \mathcal{I}\omega_1$.

Теорема 2.3. *Функция φ из пространства Шварца на H является лучевым преобразованием 1-формы на $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$\Delta^2\varphi = 0, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\beta_1}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Из Предложения 2.7 и из описания образа лучевого преобразования дифференциальных 2-форм (п. 2.3) следует, что $\varphi \in \operatorname{Im}\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $a_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}$ и $b_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}$, $i = 1, 2$, дифференциальной формы $d\varphi$ удовлетворяют соотношениям (2.11) и (2.12). Очевидно, что в случае дифференциальной формы $d\varphi$ соотношения (2.11) выполняются тождественно, а (2.12) совпадает с (2.14).

§ 3. Лучевое преобразование в трехмерном вещественном проективном пространстве

В этом параграфе основные определения и результаты § 1 будут перенесены на случай проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Переход от аффинного пространства к проективному имеет два важных преимущества. Во-первых, основные определения и результаты в проективном случае имеют более простую и инвариантную по сравнению с аффинным случаем форму. Во-вторых, поскольку само проективное пространство $\mathbb{P}^3$ и многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ компактны, то с этими многообразиями связаны более естественные по сравнению с аффинным случаем пространства функций.

Мы дадим также групповое истолкование лучевого преобразования.

3.1. Многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$. Будем задавать точки в $\mathbb{P}^3$ однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4, т.е. векторами $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, определенными с точностью до множителя. Иначе говоря, точки пространства $\mathbb{P}^3$ интерпретируются как одномерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Множеству точек на прямой соответствует множество одномерных подпространств в $\mathbb{R}^4$, принадлежащих двумерному подпространству. Таким образом, прямые в $\mathbb{P}^3$ интерпретируются как двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$ и, значит, многообразие прямых в $\mathbb{P}^3$ отождествляется с грассманианом $G_{2,4}$ двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$.

Введем систему координат на грассманиане $G_{2,4}$. Пусть $h \in G_{2,4}$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ — произвольный базис в подпространстве h.

Определение. Плюккеровыми координатами двумерного подпространства h в $\mathbb{R}^4$ называются координаты бивектора $x \wedge y$, т.е. следующий набор чисел:

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j.$$

При замене базиса в h, т.е. при замене векторов x, y их линейными комбинациями, все плюккеровы координаты умножаются на одно и то же число. Таким образом, плюккеровы координаты подпространства h определены однозначно, с точностью до множителя. Обратно, если плюккеровы координаты двух подпространств пропорциональны, то эти подпространства совпадают. Таким образом, каждое двумерное подпространство в $\mathbb{R}^4$ однозначно определяется своими плюккеровыми координатами, а потому их можно принять в качестве однородных координат на грассманиане $G_{2,4}$.

Поскольку $p_{ij} = -p_{ji}$, то, как правило, можно ограничиваться 6 координатами p_{ij}, $i < j$.

Между плюккеровыми координатами p_{ij} существует квадратичное соотношение:

$$p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0. \tag{3.1}$$

Его можно получить, например, раскладывая по элементам первых двух строк следующий определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что обратно, если числа p_{ij}, $i \neq j$ не равны одновременно нулю и связаны соотношением (3.1), то они являются плюккеровыми координатами некоторого подпространства $h \in G_{2,4}$. В самом деле, пусть для определенности $p_{12} \neq 0$; тогда можно предполагать, что $p_{12} = 1$. Рассмотрим подпространство, натянутое на векторы $x = (1, 0, -p_{23}, -p_{24})$ и $y = (0, 1, p_{13}, p_{14})$. Используя соотношение (3.1), легко убедиться, что плюккеровы координаты этого подпространства равны p_{ij}.

Существует вложение

$$G_{2,4} \hookrightarrow \mathbb{P}^5,$$

относящее каждому двумерному подпространству с плюккеровыми координатами p_{ij} точку проективного пространства $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами p_{ij}, $i < j$. Образом $G_{2,4}$ при этом вложении является квадратичная поверхность (3.1) в $\mathbb{P}^5$.

3.2. Лучевое преобразование в $\mathbb{P}^3$. Первый вопрос, возникающий при переходе от аффинного пространства к проективному, — на каком функциональном пространстве должно строиться лучевое преобразование $\mathcal{I}$. Как и в случае преобразования Радона, пространство функций на самом $\mathbb{P}^3$ для этой цели неудобно. Естественным объектом, на котором будет определено лучевое преобразование, является пространство $\mathcal{F}(-2)$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$, т.е. на одномерном расслоении над $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющих следующему условию однородности:

$$f(\lambda x) = \lambda^{-2} f(x) \quad \text{для любого} \quad \lambda \neq 0. \tag{3.2}$$

Определим лучевое преобразование произвольной функции $f \in \mathcal{F}(-2)$. Пусть $h \in G_{2,4}$. Фиксируем в h произвольный базис u, v и обозначим через s и t координаты точек на h в этом базисе:

$$x = s\,u + t\,v.$$

Поставим в соответствие функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ следующую дифференциальную 1-форму на h:

$$f(su + tv)\,(s\,dt - t\,ds).$$

В силу условия однородности (3.2) эта форма однородна степени однородности 0 и ее интеграл по контуру S в h, охватывающему точку O, не зависит от выбора этого контура.

Определение. Назовем лучевым преобразованием функции $f \in \mathcal{F}$ следующую функцию от пары линейно независимых векторов $u, v \in \mathbb{R}^4$:

$$(\mathcal{I}f)\,(u, v) = 1/2 \int\limits_S f(su + tv)\,(s\,dt - t\,ds); \tag{3.3}$$

интеграл берется по произвольному контуру S в подпространстве h, натянутом на u и v, охватывающему точку O.

Как было уже сказано, от выбора контура S интеграл не зависит.

Определенная так функция $\varphi = \mathcal{I}f$ зависит не только от подпространства $h \in G_{2,4}$, но и от выбора базиса в h. Из (3.3) следует, что при переходе от одного базиса u, v к любому другому базису $u' = \alpha\,u + \beta\,v, \quad v' = \gamma\,u + \delta\,v$ функция φ преобразуется по следующему закону:

$$\varphi(\alpha\,u + \beta\,v, \gamma\,u + \delta\,v) = |\alpha\delta - \beta\gamma|^{-1}\,\varphi(u, v).$$

В частности, если элементы площади в базисах u, v и u', v' совпадают, т.е. $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$, то $\varphi(\alpha\, u + \beta\, v, \gamma\, u + \delta\, v) = \varphi(u, v)$.

Таким образом, лучевое преобразование $\varphi(u, v)$ зависит только от плюккеровых координат $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$, т.е. является функцией на квадратичном конусе $K \subset \mathbb{R}^6$, заданном уравнением (3.1). Очевидно, что $K \setminus 0$ является одномерным расслоением над грассманианом $G_{2,4}$.

В дальнейшем мы часто будем писать $\varphi(p)$ вместо $\varphi(u, v)$, подразумевая под p точку конуса K, т.е. точку в $\mathbb{R}^6$ с координатами p_{ij}, $i < j$, удовлетворяющими уравнению (3.1).

Определение. Обозначим через $\mathcal{H}(-1)$ пространство C^∞-функций φ на $K \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi(\lambda\, p) = |\lambda|^{-1}\, \varphi(p). \tag{3.4}$$

Из определения лучевого преобразования $\mathcal{I}$ следует, что если $\varphi \in \mathcal{F}(-2)$, то $\mathcal{I}\varphi \in \mathcal{H}(-1)$. Таким образом, лучевое преобразование есть отображение

$$\mathcal{I} : \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1).$$

Примечание. Если заменить условие однородности (3.2) более слабым, потребовав, чтобы оно выполнялось только при $\lambda > 0$, то мы получим, что $\mathcal{I}f = 0$ для любой нечетной функции f. Поэтому лучевое преобразование естественно рассматривать только на четных функциях f.

3.3. Связь с лучевым преобразованием в аффинном пространстве. В этом пункте мы будем для удобства обозначать лучевые преобразования в аффинном и проективном пространствах соответственно через $\mathcal{I}_a$ и $\mathcal{I}_p$. Напомним, что лучевое преобразование $\mathcal{I}_a$ функции F на $\mathbb{R}^3$ задается в локальных координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ на многообразии прямых в $\mathbb{R}^3$ следующим равенством:

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha_1\, x_3 + \beta_1,\, \alpha_2\, x_3 + \beta_2,\, x_3)\, dx_3. \tag{3.5}$$

Вложим $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^4$ как гиперплоскость $x_4 = 1$ и отнесем каждой функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ ее ограничение F на эту гиперплоскость, т.е. положим

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

В силу условия однородности (3.2) функция f однозначно восстанавливается по функции F и обратно, любая C^∞-функция F на $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая подходящим условиям убывания на бесконечности, является ограничением на $\mathbb{R}^3$ некоторой функции $f \in \mathcal{F}(-2)$.

Из (3.5) следует, что

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta_1 + \alpha_1 t, \beta_2 + \alpha_2 t, t, 1)\, dt = (\mathcal{I}_p f)(u, v),$$

где $u = (\beta_1, \beta_2, 0, 1)$, $\quad v = (\alpha_1, \alpha_2, 1, 0)$. (В определении (3.3) функции $\mathcal{I}_p f$ в качестве S взята пара прямых $s = \pm 1$.) Отсюда, перейдя от векторов u, v к плюккеровым координатам, получаем.

Предложение 3.1. *Между лучевым преобразованием $\mathcal{I}_p f$ функции $f \in \mathcal{F}(-2)$ и аффинным лучевым преобразованием $\mathcal{I}_a F$, где F — ограничение f на гиперплоскость $x_4 = 1$, имеет место следующее соотношение*:

$$(\mathcal{I}_a F)(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\mathcal{I}_p f)(p), \tag{3.6}$$

где $p_{12} = \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1$, $\quad p_{13} = \beta_1$, $p_{14} = -\alpha_1$, $p_{23} = \beta_2$, $p_{24} = -\alpha_2$, $p_{34} = -1$.

В свою очередь, из (3.6) и условия однородности (3.2) следует:

$$(\mathcal{I}_p f)(p) = |p_{34}|^{-1} (\mathcal{I}_a F)(p_{14}/p_{34}, p_{24}/p_{34}, -p_{13}/p_{34}, -p_{23}/p_{34}).$$

3.4. Описание образа лучевого преобразования. Как и в аффинном случае, функции $\varphi(u, v)$ из образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$ удовлетворяют дополнительным соотношениям. Именно, из определения (3.3) лучевого преобразования непосредственно следует:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial v_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_i}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (i \neq j), \tag{3.7}$$

где u_i, v_i — координаты векторов u и v.

Представим эти соотношения на функции $\varphi = \mathcal{I} f$ в инвариантной форме, рассматривая φ как функции от плюккеровых координат p_{ij}, т.е. как однородные функции на конусе $K : p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0$ в $\mathbb{R}^6$.

Пусть $H(-1)$ — пространство C^∞-функций на $\mathbb{R}^6 \setminus 0$, удовлетворяющих условию однородности (3.4). Введем на $H(-1)$ следующий дифференциальный оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial p_{12}\, \partial p_{34}} - \frac{\partial^2}{\partial p_{13}\, \partial p_{24}} + \frac{\partial^2}{\partial p_{14}\, \partial p_{23}}. \tag{3.8}$$

Предложение 3.2. *Оператор* Δ *опускается с* $H(-1)$ *на* $\mathcal{H}(-1)$ *при операции ограничения* $H(-1) \to \mathcal{H}(-1)$. *Другими словами, если* $\varphi\,|_K = 0$, *то* $\Delta\varphi\,|_K = 0$.

Доказательство. Положим:

$$r = p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}$$

и перейдем в окрестности произвольной точки $p^0 \in K$ к новым координатам на $\mathbb{R}^6$, заменив одну из координат p_{ij} $(i < j)$, например, p_{34}, на r (эта замена допустима, если $p_{12} \neq 0$). Нужно убедиться, что в новых координатах $\Delta\varphi\,|_K \equiv \Delta\varphi\,|_{r=0}$ не содержит производных по r.

Обозначим через ψ функцию φ в новых координатах, т.е.

$$\varphi(p) = \psi(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, r).$$

Непосредственным вычислением получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} + {\sum}' p_{ij}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{ij}\partial r} + 3\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}, \qquad (3.9)$$

где штрих означает, что сумма берется по всем i,j $(i < j)$, кроме $(i,j) = (3,4)$. Далее, из условия однородности для φ следует, что ${\sum}' p_{ij}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_{ij}} + 2\,r\,\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\psi$, откуда

$${\sum}' p_{ij}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{ij}\partial r} = -3\,\frac{\partial\psi}{\partial r} - 2\,r\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}.$$

Подставив это выражение в (3.9), получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} - r\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}. \qquad (3.10)$$

Из (3.10) следует утверждение.

Следствие. *Оператор* Δ *определен на функциональном пространстве* $\mathcal{H}(-1)$.

Предложение 3.3. *Каждое из уравнений* (3.7) *для функций* $\varphi \in \mathcal{H}(-1)$ *эквивалентно уравнению*

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{12}\partial p_{34}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{14}\partial p_{23}} = 0. \qquad (3.11)$$

Доказательство. Докажем, например, что соотношение $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2 \partial v_1}$ эквивалентно соотношению (3.11).

Примем в качестве локальных координат на конусе K плюккеровы координаты p_{ij}, $i<j$, $(i,j) \neq (1,2)$. В этих координатах, согласно (3.10), имеем:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{13}\partial p_{24}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{14}\partial p_{23}}.$$

Поскольку $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1 \partial v_2} = -\sum_{i,j=3,4} v_i u_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{1i}\partial p_{2j}}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2 \partial v_1} = -\sum_{i,j=3,4} v_i u_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_{2i}\partial p_{1j}}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1 \partial v_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2 \partial v_1} = (v_3 u_4 - v_4 u_3)\,\Delta\varphi,$$

что и доказывает наше утверждение.

Теорема 3.1. *Функция $\varphi \in \mathcal{H}(-1)$ тогда и только тогда представима в виде $\varphi = \mathcal{I}f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$, когда она удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$.*

Необходимость условия теоремы уже доказана. Доказательство достаточности условия будет проведено в п. 3.6.

3.5. Другой способ определения лучевого преобразования. Будем задавать двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$ не парами u, v линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^4$, а системами независимых уравнений:

$$\langle \xi, x \rangle = 0, \quad \langle \eta, x \rangle = 0, \tag{3.12}$$

т.е. парами ξ, η линейно независимых векторов дуального пространства $(\mathbb{R}^4)'$.

Обозначим через $h_{\xi\eta}$ подпространство в $\mathbb{R}^4$, заданное уравнениями (3.12), и через $Ph_{\xi\eta}$ его проективизацию. Зададим на $h_{\xi\eta}$ дифференциальную 1-форму $\sigma_{\xi\eta}(x)$, определенную равенством:

$$\langle \xi, dx \rangle \wedge \langle \eta, dx \rangle \wedge \sigma_{\xi\eta}(x) = \omega(x), \tag{3.13}$$

где $\omega(x) = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \ldots$ (циклические перестановки).

Если $f \in \mathcal{F}(-2)$, то дифференциальная 1-форма на $h_{\xi\eta}$

$$f(x)\,\sigma_{\xi\eta}(x),$$

имеет степень однородности 0 и ортогональна слоям расслоения $h_{\xi,\eta} \setminus 0 \to Ph_{\xi,\eta}$.

Определение. Назовем лучевым преобразованием функции $f \in \mathcal{F}$ следующую функцию от пары линейно независимых векторов $\xi, \eta \in (\mathbb{R}^4)'$:

$$(\mathcal{I}'f)(\xi, \eta) = \int\limits_{\gamma_{\xi\eta}} f(x)\, \sigma_{\xi\eta}(x), \tag{3.14}$$

где $\gamma_{\xi\eta}$ — любое сечение расслоения $h_{\xi,\eta} \setminus 0 \to Ph_{\xi,\eta}$; от выбора $\gamma_{\xi\eta}$ интеграл не зависит.

Используя символику дельта-функций, можно представить интеграл (3.14) в следующем виде:

$$(\mathcal{I}'f)(\xi, \eta) = \int\limits_{\Gamma} f(x)\, \delta(\langle \xi, x\rangle)\, \delta(\langle \eta, x\rangle)\, \omega(x), \tag{3.15}$$

где Γ — произвольное сечение расслоения $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \to \mathbb{P}^3$.

Подобно $\varphi = \mathcal{I}f$, функция $\psi = \mathcal{I}'f$ удовлетворяет следующим условиям.

1^0. Она зависит только от бивектора $q = \xi \wedge \eta$, т.е. от миноров $q^{ij} = \xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i$.

2^0. Как функция от q, она является C^∞-функцией на конусе $q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0$ в $(\mathbb{R}^6)'$, удовлетворяющей условию однородности:

$$\psi(\lambda q) = |\lambda|^{-1}\, \psi(q). \tag{3.16}$$

3^0. Выполняются соотношения:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^i \partial \eta^j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^j \partial \eta^i}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (i \neq j), \tag{3.17}$$

где ξ^i, η^i — координаты векторов ξ и η.

Как и в случае функций $\varphi = \mathcal{I}f$, можно показать, что каждое из соотношений (3.17) эквивалентно соотношению:

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^{12} \partial q^{34}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^{13} \partial q^{24}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^{14} \partial q^{23}} = 0. \tag{3.18}$$

Установим связь между операторами $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$. Назовем бивекторы $p = \{p_{ij}\}$ в $\mathbb{R}^4$ и $q = \{q^{ij}\}$ в $(\mathbb{R}^4)'$ двойственными и будем писать $p \sim q$, если

$$p_{ij} = \operatorname{sign}(i, j, k, l)\, q^{kl}$$

для любой перестановки (i,j,k,l) индексов $(1,2,3,4)$.

Нетрудно убедиться, что двойственным бивекторам p и q отвечает одно и то же подпространство $h \subset \mathbb{R}^4$ и что связанные с этими бивекторами дифференциальные 1-формы на h совпадают. Отсюда следует

Предложение 3.4. *Если $q \sim p$, то $\mathcal{I}f(p) = \mathcal{I}'f(q)$.*

Обозначим через $\mathcal{H}'(-1)$ пространство C^∞-функций на $K' \setminus 0$, где K' — конус $q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0$ в $(\mathbb{R}^6)'$, удовлетворяющих условию однородности (3.16). В силу Предложения 3.4 теорема 3.1 может быть перефразирована в терминах функций из $H'(-1)$.

Теорема 3.2. *Функция $\psi \in \mathcal{H}'(-1)$ тогда и только тогда представима в виде $\psi = \mathcal{I}'f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$, когда она удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = 0$.*

3.6. Доказательство теоремы об образе лучевого преобразования.. Необходимость условий теорем 3.1 и 3.2 была уже установлена. Докажем достаточность условий теоремы 3.2.

Итак, пусть $\psi(\xi,\eta)$ — C^∞-функция от бивектора $\xi \wedge \eta$, удовлетворяющая условиям однородности (3.16) и уравнениям (3.17). Докажем, что тогда $\psi = \mathcal{I}'f$, где $f \in \mathcal{F}(-2)$.

Введем многообразие A пар (x,η), где $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$, $\eta \in (\mathbb{R}^4)' \setminus 0$ и $\langle \eta, x\rangle = 0$. Пусть $(x,\eta) \in A$. Обозначим через $L_\eta \subset \mathbb{R}^4$ подпространство, ортогональное к η. Заметим, что $x \in L_\eta$. Положим для любого $\xi \in (\mathbb{R}^4)' \setminus \{\eta\}$, где $\{\eta\}$ — подпространство, натянутое на η

$$\psi_\eta(\xi) = \psi(\xi,\eta).$$

Поскольку ψ зависит только от $\xi \wedge \eta$, то $\psi_\eta(\xi + \lambda\eta) = \psi_\eta(\xi)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. ψ_η является функцией на $((\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}) \setminus 0$. Очевидно, что эта функция бесконечно дифференцируема на $((\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}) \setminus 0$ и удовлетворяет условию однородности: $\psi_\eta(\lambda\xi) = |\lambda|^{-1}\psi_\eta(\xi)$. Значит, по теореме об образе преобразования Радона для проективной плоскости, ψ_η является преобразованием Радона C^∞- функции $f_\eta(x)$, определенной на подпространстве $L_\eta \subset \mathbb{R}^4$, двойственном к $(\mathbb{R}^4)'/\{\eta\}$, и удовлетворяющей условию однородности: $f_\eta(\lambda x) = \lambda^{-2} f_\eta(x)$.

Тем самым, на многообразии A определена функция

$$F(x,\eta) = f_\eta(x).$$

Лемма. *Для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$ функция F не зависит от η.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для какой-либо одной точки x, например для $x = x_0 = (1,0,0,0)$. В этом случае условие ортогональности η и x имеет вид $\eta^1 = 0$, т.е. $\eta = (0, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$. Нам нужно доказать, что $\frac{\partial F(x_0,\eta)}{\partial \eta_i} = 0$, $i = 2,3,4$. Докажем, например, что $\frac{\partial F(x_0,\eta)}{\partial \eta_2} = 0$.

Напишем, используя формулу обращения для преобразования Радона на проективной плоскости, явное выражение $F(x,\eta)$ через $f_\eta(x)$.

Пусть L — координатное подпространство $\xi^4 = 0$ в $(\mathbb{R}^4)'$. Если $\eta^4 \neq 0$, то L трансверсально к вектору η, и можно считать, что ψ_η — функция на подпространстве L.

Так как $\langle \xi, x_0 \rangle = \xi^1$, то по формуле обращения для преобразования Радона имеем:

$$F(x_0,\eta) = c \int \psi_\eta(\xi) \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-2}\, d\xi^1 \wedge d\xi^2 =$$
$$= c \int \frac{\partial \psi(\eta,\xi)}{\partial \xi^1} \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-1}\, d\xi^1 \wedge d\xi^2.$$

Продифференцировав полученное равенство по η^2 и применив соотношение $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^1 \partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^1}$, получаем:

$$\frac{\partial F(x_0,\eta)}{\partial \eta^2} = c \int \frac{\partial^2 \psi(\eta,\xi)}{\partial \xi^2 \partial \eta^1} \Big|_{\xi^3=1} (\xi^1)^{-1}\, d\xi^1 \wedge d\xi^2 = 0.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Определим на основании доказанной леммы функцию $f(x)$ на $\mathbb{R}^4$ по формуле:

$$f(x) = f_\eta(x),$$

где η — произвольный вектор в $(\mathbb{R}^4)'$, ортогональный к x. Она бесконечно дифференцируема на $L_\eta \setminus 0$, где L_η — любое 3-мерное подпространство в $\mathbb{R}^4$, значит, она C^∞-дифференцируема на $\mathbb{R}^4 \setminus 0$. Далее, выполняется условие однородности: $f(\lambda x) = \lambda^{-2} f(x)$. Следовательно, $f \in \mathcal{F}(-2)$. При этом ясно, что $\mathcal{I}' f = \psi$, так как это равенство справедливо для ограничения ψ на множество подпространств, принадлежащих произвольному трехмерному пространству.

3.7. Лучевое преобразование как сплетающий оператор. Лучевое преобразование имеет простое теоретико-групповое истолкование. Рассмотрим группу $G = GL(4,\mathbb{R})$ невырожденных матриц 4-го порядка. Каждому элементу $g \in G$ отвечает линейное преобразование $x \mapsto xg$ в пространстве $\mathbb{R}^4$, которое переводит точку $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в точку x' с координатами $x'_j = \sum_{i=1}^{4} x_i\, g_{ij}$.

Поставим в соответствие элементам $g \in G$ линейные операторы $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$ соответственно в пространствах $\mathcal{F}(-2)$ и $\mathcal{H}(-1)$:

$$(T_g^{(1)} f)(x) = f(xg), \quad (T_g^{(2)} \varphi)(u, v) = \varphi(ug, vg).$$

Очевидно, что

$$T_{g_1}^{(i)} T_{g_2}^{(i)} = T_{g_1 g_2}^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

для любых $g_1, g_2 \in G$, т.е. операторы $T_g^{(1)}$, $T_g^{(2)}$ образуют представление группы G в соответствующих функциональных пространствах.

Из определения оператора $\mathcal{I}$ непосредственно следует

Предложение 3.5. *Оператор лучевого преобразования $\mathcal{I}$ удовлетворяет соотношению*:

$$T_g^{(2)} \mathcal{I} = \mathcal{I} T_g^{(1)} \quad \text{для любого} \quad g \in G. \tag{3.19}$$

В терминах теории представлений групп соотношение (3.19) означает, что оператор $\mathcal{I}\colon \mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1)$ является сплетающим оператором для представлений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G.

Можно доказать, что с точностью до множителя существует единственный сплетающий оператор $\mathcal{F}(-2) \to \mathcal{H}(-1)$. Таким образом, условием, что $\mathcal{I}$ есть сплетающий оператор, лучевое преобразование определяется однозначно, с точностью до множителя.

Установим теперь теоретико-групповой смысл дополнительных соотношений (3.7) на функции $\varphi = \mathcal{I} f$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и $\{e_{ij}\}$ — стандартный базис в $\mathfrak{g}$ (т.е. e_{ij} — матрица, у которой (ij)-ый элемент равен 1, а остальные равны нулю).

Представления $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ группы G индуцируют представления ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в соответствующих пространствах. Обозначим через $E_{ij}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(2)}$ операторы этих представлений, отвечающие $e_{ij} \in \mathfrak{g}$. Из формул для операторов $T_g^{(1)}$ и $T_g^{(2)}$ непосредственно получаем выражения для $E_{ij}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(2)}$:

$$E_{ij}^{(1)} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{3.20}$$

$$E_{ij}^{(2)} \varphi = u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial v_j}. \tag{3.21}$$

Из (3.20) непосредственно следует

Предложение 3.6. *Любая функция $f \in \mathcal{F}(-2)$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$(E_{ij}^{(1)} E_{kl}^{(1)} - \delta_{jk} E_{il}^{(1)}) f = (E_{il}^{(1)} E_{kj}^{(1)} - \delta_{lk} E_{ij}^{(1)}) f, \tag{3.22}$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$, *где δ_{ij} — символ Кронекера.*

Поскольку $\mathcal{I}$ есть сплетающий оператор, отсюда следует.

Следствие. *Функции $\varphi = \mathcal{I} f$ удовлетворяют соотношениям*

$$(E_{ij}^{(2)} E_{kl}^{(2)} - \delta_{jk} E_{il}^{(2)}) \varphi = (E_{il}^{(2)} E_{kj}^{(2)} - \delta_{lk} E_{ij}^{(2)}) \varphi, \tag{3.23}$$

где операторы $E_{ij}^{(2)}$ задаются равенствами (3.21).

Полученные из теоретико-групповых соображений соотношения (3.23) эквивалентны соотношениям (3.7). В самом деле, если подставить в (3.23) явные выражения для операторов $E_{ij}^{(2)}$, то (3.23) принимает вид:

$$u_i\, v_k\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_l} + v_i\, u_k\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_j \partial u_l} = u_i\, v_k\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_l \partial v_j} + v_i\, u_k\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_l \partial u_j},$$

т.е.

$$(u_i\, v_k - u_k\, v_i)\,(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial v_l} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_l \partial v_j}) = 0.$$

§ 4. Лучевое преобразование в комплексном аффинном пространстве

Определение лучевого преобразования для комплексного аффинного пространства и описание его образа аналогичны приведенным в § 1 для вещественного случая. Мы изложим это кратко в пп. 4.1 и 4.2. Главное же, что отличает комплексное лучевое преобразование от вещественного, — существование для него локальных формул обращения. Построению этих формул будут посвящены пп. 4.3 и 4.4.

4.1. Лучевое преобразование в $\mathbb{C}^3$. Подобно случаю вещественного аффинного пространства, комплексные прямые в $\mathbb{C}^3$ будем задавать уравнениями

$$x = \alpha t + \beta, \quad \alpha \in \mathbb{C}^3 \setminus 0, \quad \beta \in \mathbb{C}^3,$$

а интеграл функции f на $\mathbb{C}^3$ по прямой $x = \alpha t + \beta$ — уравнением

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} f(\alpha t + \beta)\, dt \wedge d\bar{t}. \tag{4.1}$$

Определенная так функция $\varphi(\alpha, \beta)$ на многообразии E пар (α, β) называется лучевым преобразованием функции f и обозначается через $\mathcal{I}f$. В дальнейшем всюду предполагается, что функции f принадлежат пространству Шварца $S(\mathbb{C}^3)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих вместе со всеми производными функций на $\mathbb{C}^3$.

Подобно вещественному случаю, функции $\varphi = \mathcal{I}f$ удовлетворяют соотношениям:

$$\varphi(\alpha, \beta + \alpha t_0) = \varphi(\alpha, \beta) \quad \text{для любого } t_0 \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

т.е. φ не зависит от выбора точки β на прямой;

$$\varphi(\lambda\alpha, \beta) = |\lambda|^{-2} \varphi(\alpha, \beta) \quad \text{для любого } \lambda \neq 0. \tag{4.3}$$

Таким образом φ зависит только от самой прямой и от выбора направляющего вектора α.

Если в $\mathbb{C}^3$ введена евклидова метрика, то в определении (4.1) лучевого преобразования можно предполагать, что $|\alpha| = 1$. Тогда условие (4.3) сводится к более простому: $\varphi(\lambda\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ при $|\lambda| = 1$. В этом случае φ можно рассматривать как функцию на самом многообразии H комплексных прямых.

Обозначим по аналогии с вещественным случаем через $S(H)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\alpha, \beta)$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3) и таких, что при $|\alpha| = 1$ эти функции, рассматриваемые как функции на H, быстро убывают вместе со всеми производными. Легко убедиться, что образы функций $f \in S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$ принадлежат пространству $S(H)$.

Иногда удобно задавать прямые на $\mathbb{C}^3$ уравнениями

$$x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

а лучевое преобразование $\psi = \mathcal{I}f$ в локальных координатах $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на H — формулой

$$\psi(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3)\, dx_3 \wedge d\bar{x}_3. \tag{4.4}$$

4.2. Дифференциальная форма $\kappa\varphi$ и теорема об образе лучевого преобразования. Комплексным аналогом дифференциальной формы $\kappa\varphi$, введенной в § 1, является следующая дифференциальная (1,1)-форма на многообразии E пар (α, β):

$$\kappa\varphi = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_i\, \partial \bar{\beta}_j}\, d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j. \tag{4.5}$$

Здесь φ — произвольная функция на E. Если φ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3), то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ опускается с многообразия E на многообразие прямых H. Соответственно в локальных координатах $\alpha_1\alpha_2, \beta_1, \beta_2$ форма $\kappa\psi$ имеет вид:

$$\kappa\psi = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_i\, \partial \bar{\beta}_j}\, d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j. \tag{4.6}$$

Подобно вещественному случаю, с помощью формы $\kappa\varphi$ можно описать образ пространства $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании. Именно, обозначим через H^x подмногообразие прямых в $\mathbb{C}^3$, проходящих через произвольную точку $x \in \mathbb{C}^3$, и через $\kappa_x\varphi$ ограничение формы $\kappa\varphi$ на H^x.

Теорема 4.1. *Функция $\varphi \in S(H)$ принадлежит образу пространства Шварца $S(\mathbb{C}^3)$ при лучевом преобразовании $\mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальная форма $\kappa_x\varphi$ на подмногообразии H^x замкнута.*

Отметим, что условие замкнутости дифференциальной формы $\kappa_x\varphi$ для любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ эквивалентно следующим условиям на функцию φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_i\, \partial \beta_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_j\, \partial \beta_i}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\alpha}_i\, \partial \bar{\beta}_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\alpha}_j\, \partial \bar{\beta}_i}.$$

Доказательство теоремы 4.1 такое же, как и в вещественном случае.

4.3. Формула обращения. В комплексном случае, в отличие от вещественного случая, оператор κ может быть применен не только для описания образа лучевого преобразования $\mathcal{I}$, но и для получения формулы обращения, восстанавливающей функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$.

Теорема 4.2. *Если $\varphi = \mathcal{I}f$, $f \in S(\mathbb{C}^3)$, и $\kappa_x\varphi$ — ограничение дифференциальной (1,1)-формы $\kappa\varphi$ на подмногообразие $H^x \subset H$ прямых,* *проходящих через произвольную точку* $x \in \mathbb{C}^3$, *то для любого цикла* $\gamma \subset H^x$ *вещественной размерности* 2 *имеем*:

$$\int\limits_{\gamma} \kappa_x \varphi = c(\gamma)\, f(x), \tag{4.7}$$

где $c(\gamma)$ *зависит только от класса гомологий цикла* γ. *При этом если цикл* γ *не гомологичен нулю, то* $c(\gamma) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку дифференциальная форма $\kappa_x \varphi$ замкнута, то интеграл (4.7) зависит при фиксированном f только от класса гомологий цикла γ. Известно, что группа двумерных гомологий многообразия H^x есть группа с одним образующим $\tilde{\gamma}$, и представителем класса гомологий $\tilde{\gamma}$ является эйлеровский цикл — многообразие прямых, проходящих через точку x и лежащих в какой-либо фиксированной плоскости. Поэтому достаточно вычислить интеграл (4.7) по какому-либо эйлеровскому циклу. Покажем, что если γ — эйлеровский цикл, то формула обращения (4.7) совпадает с формулой обращения для преобразования Радона в $\mathbb{C}^2$, полученной в главе 1.

Будем задавать лучевое преобразование в локальных координатах формулой (4.4).

Рассмотрим эйлеровский цикл γ прямых, проходящих через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и лежащих в плоскости $h : x_1 = x_1^0$. Путь f_0 — ограничение функции f на плоскость h и ψ_0 — ограничение функции $\psi = \mathcal{I} f$ на подмногообразие прямых, лежащих в плоскости h, т.е.

$$f_0(x_2, x_3) = f(x_1^0, x_2, x_3),$$
$$\psi_0(\alpha, \beta) = \psi(0, \alpha; x_1^0, \beta) = \int\limits_{\mathbb{C}} f_0(\alpha x_3 + \beta, x_3)\, dx_3 \wedge d\bar{x}_3.$$

Мы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} \kappa_x \psi = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2 \psi_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta\, \partial \bar{\beta}} \Big|_{\beta = x_2^0 - \alpha x_3^0} \, d\alpha \wedge d\bar{\alpha}.$$

С другой стороны, функция ψ_0 является преобразованием Радона функции f_0 на плоскости h'. Следовательно, по формуле обращения для преобразования Радона на комплексной плоскости (см. формулу (9.11) из § 9 главы I) получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial^2 \psi_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta\, \partial \bar{\beta}} \Big|_{\beta = x_2^0 - \alpha x_3^0} \, d\alpha \wedge d\bar{\alpha} = 2\,\pi^2\, i\, f_0(x_2^0, x_3^0).$$

Таким образом, доказано, что для эйлеровского цикла $\gamma \subset H^{x^0}$ мы имеем:

$$\int\limits_{\gamma} \kappa_{x^0}\varphi = 2\,\pi^2\, i\, f(x^0).$$

Очевидно, что формула обращения (4.7) локальна: для восстановления по этой формуле функции f в произвольной точке $x\in\mathbb{C}^3$ достаточно знать интегралы функции f только по прямым, бесконечно близким к x.

Подчеркнем, что аналога этой формулы обращения для лучевого преобразования в вещественном пространстве не существует: там мы имеем $\int_\gamma \kappa_x\varphi = 0$ для любого одномерного цикла $\gamma \subset H^x$.

4.4. Аналоги оператора κ. В этом пункте будет построено семейство линейных операторов κ из пространства $S(H)$ в пространство $\Omega^{(1,1)}(H)$ дифференциальных (1,1)-форм на H, удовлетворяющих, подобно введенному выше оператору κ, следующему условию:

Условие А. Если $\varphi = \mathcal{I}f, \quad f \in S(\mathbb{C}^3)$, то дифференциальная форма $\kappa\varphi$ замкнута на подмногообразиях прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{C}^3$.

Каждый из этих операторов может быть использован, подобно исходному оператору κ для построения формулы обращения.

Для описания таких операторов κ будем предполагать, что лучевое преобразование задано в локальных координатах формулой (4.4). В локальных координатах условия принадлежности функции ψ образу лучевого преобразования имеют вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_1\,\partial\bar\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_2\,\partial\bar\beta_1}. \tag{4.8}$$

Введем четверку линейных отображений $\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p+1,q)}$, где $\Omega^{(p,q)}$ — пространство дифференциальных (p,q)-форм на H:

$$\begin{aligned}
\kappa^1 &= \frac{\partial}{\partial\beta_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\,d\alpha_2,\\
\kappa^2 &= \frac{\partial}{\partial\beta_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\,d\beta_2,\\
\kappa^3 &= \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,d\alpha_2,\\
\kappa^4 &= \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,d\beta_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,d\beta_2.
\end{aligned}$$

Далее, обозначим через $\bar\kappa^i$, $i = 1,2,3,4$, линейное отображение $\Omega^{(p,q)} \to \Omega^{(p,q+1)}$, получающееся из κ^i заменой $\frac{\partial}{\partial\alpha_j}, \frac{\partial}{\partial\beta_j}, d\alpha_j, d\beta_j$ соответственно на $\frac{\partial}{\partial\bar\alpha_j}, \frac{\partial}{\partial\bar\beta_j}, d\bar\alpha_j, d\bar\beta_j$. Положим:

$$\kappa^{ij} = \kappa^i\,\bar\kappa^j, \quad i,j = 1,2,3,4.$$

В силу этого определения, если ψ — функция на H, то $\kappa^{ij}\psi$ есть дифференциальная (1,1)-форма на H. В частности, $\kappa^{11}\psi$ совпадает с определенной выше формой $\kappa\psi$. Обозначим через $\kappa_x^{ij}\psi$ ограничение формы $\kappa^{ij}\psi$ на подмногообразие $H^x \subset H$ прямых, проходящих через точку $x \in \mathbb{C}^3$.

Предложение 4.1. *Для любой функции $\psi = \mathcal{I}f$ и любой точки $x \in \mathbb{C}^3$ дифференциальные формы $\kappa_x^{ij}\psi$ связаны следующими соотношениями*:

$$\begin{aligned}
\kappa_x^{11}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{21}\psi = -\bar x_3^{-1}\,\kappa_x^{12}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{22}\psi,\\
\kappa_x^{13}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{23}\psi = -\bar x_3^{-1}\,\kappa_x^{14}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{24}\psi,\\
\kappa_x^{31}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{41}\psi = -\bar x_3^{-1}\,\kappa_x^{32}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{42}\psi,\\
\kappa_x^{33}\psi &= -x_3^{-1}\,\kappa_x^{43}\psi = -\bar x_3^{-1}\,\kappa_x^{34}\psi = |x_3|^{-2}\,\kappa_x^{44}\psi,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\kappa_x^{2i}\psi + \kappa_x^{3i}\psi = d(\bar\kappa^i\psi), \quad \kappa_x^{i2}\psi + \kappa_x^{i3}\psi = -d(\bar\kappa^i\psi), \quad i = 1,2,3,4. \tag{4.10}$$

Доказательство. Соотношения (4.9) следуют непосредственно из того факта, что $d\beta_i = -x_3\,d\alpha_i, \quad d\bar\beta_i = -\bar x_3\,d\bar\alpha_i, \quad i = 1,2$ на H^x.

Равенства (4.10) следуют из уравнений (4.8).

Следствие. 1. *Все дифференциальные формы $\kappa_x^{ij}\varphi$, с точностью до множителей, попарно когомологичны.*

Следствие. 2. *Если $\psi = \mathcal{I}f$, то все дифференциальные формы $\kappa^{ij}\varphi$ удовлетворяют условию A.*

В силу Предложения 4.1 для формулы обращения можно использовать не только исходный оператор $\kappa = \kappa^{11}$, но и любой другой из операторов κ^{ij} (а также любую линейную комбинацию этих операторов). Например, для случая операторов κ^{44} и κ^{33} формулы обращения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \kappa_x^{44}\psi &= c(\gamma)\,|x_3|^4 f(x),\\
\int_\gamma \kappa_x^{33}\psi &= c(\gamma)\,|x_3|^2 f(x).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

§ 5. Задачи интегральной геометрии для комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$

Уже отмечалось, что задача о восстановлении функции f на $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{C}^3$ по ее лучевому преобразованию $\varphi = \mathcal{I}f$ является переопределенной; для восстановления f достаточно знать функцию φ не на всем многообразии прямых H, а лишь на некотором его трехмерном подмногообразии K. Условимся называть трехмерные алгебраические подмногообразия прямых $K \subset H$ комплексами прямых.

Приведем пример комплексов, для которых задача о восстановлении функции f решается элементарно. Это комплексы прямых, обладающие следующим свойством: для почти каждой точки $x \in \mathbb{C}^3$ существует содержащая ее плоскость h_x такая, что почти все прямые на этой плоскости принадлежат комплексу. Этим свойством обладают, в частности, комплекс прямых, пересекающих фиксированную прямую, и комплекс прямых, параллельных фиксированной плоскости (последний можно трактовать как комплекс прямых, пересекающих бесконечно удаленную прямую). Ясно, что задача о восстановлении функции в точке x через ее интегралы по прямым такого комплекса сводится к формуле обращения для преобразования Радона на плоскости h_x.

В этом параграфе задача о восстановлении функции f будет решаться для различных комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$. Существенная особенность получаемых формул обращения — их локальность, т.е. функция в точке $x \in \mathbb{C}^3$ восстанавливается через ее интегралы только по прямым комплекса, бесконечно близким к x.

Начнем с комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую. Будет показано, что формула обращения для этого комплекса есть простое следствие из формулы обращения для лучевого преобразования, полученной в § 4. Затем будет рассмотрен более широкий класс комплексов прямых (допустимые комплексы), для которых существует явная локальная формула обращения.

5.1. Задача интегральной геометрии для комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих кривую. Рассмотрим комплекс K прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset \mathbb{C}^3$. Поставим задачу: восстановить функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым комплекса, т.е. по функции

$$\Phi(\alpha, \lambda) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} f(\alpha t + \lambda)\, dt\, d\bar{t}, \quad (\alpha, \lambda) \in (\mathbb{C}^3 \setminus 0) \times \Lambda. \tag{5.1}$$

Аналогичная задача для вещественного пространства $\mathbb{R}^3$ уже решалась в § 1, и там была получена явная, заведомо нелокальная формула обращения. То же построение можно было бы повторить и в комплексном случае. Однако в комплексном случае имеется и другой, существенно более простой путь. Именно, мы увидим, что формула обращения для этого комплекса представляет собой простое следствие из формулы обращения (4.2) для лучевого преобразования, полученной в § 4.

Обозначим через ∂_Λ и $\bar\partial_\Lambda$ соответственно (1,0) и (0,1) составляющие оператора d внешнего дифференцирования на многообразии Λ.

Пусть $\Phi(\alpha,\lambda)$ — интегральное преобразование функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$, заданное формулой (5.1). Поставим в соответствие каждой точке $x^0 \in \mathbb{C}^3$ следующую дифференциальную (1,1)-форму на Λ :

$$\partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda\, \Phi(\alpha,\lambda)\,|_{\alpha=x^0-\lambda}\,.$$

Теорема 5.1. *Для почти каждой точки $x^0 \in \mathbb{C}^3$ имеет место следующая формула обращения интегрального преобразования* (5.1):

$$f(x^0) = (2\,k\,\pi^2\,i)^{-1}\int\limits_\Lambda \partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda\, \Phi(\alpha,\lambda)\,|_{\alpha=x^0-\lambda}, \tag{5.2}$$

где k — степень алгебраической кривой Λ.

Доказательство. Воспользуемся формулой обращения (4.2) для лучевого преобразования $\varphi = \mathcal{I}f$ из § 4, где в качестве γ^{x^0} взято подмногообразие прямых, проходящих через точку x^0 и пересекающих кривую Λ, т.е. многообразие прямых

$$x = (x^0-\lambda)\,t + \lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Из определения оператора κ следует, что

$$\kappa\varphi\,\Big|_{\gamma^{x^0}} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi(\alpha,\beta)}{\partial\beta_i\,\partial\bar\beta_j}\,\Big|_{\substack{\alpha=x^0-\lambda\\ \beta=\lambda}}\; d\,\lambda_i \wedge d\,\bar\lambda_j\,. \tag{5.3}$$

Поскольку ограничение $\varphi(\alpha,\beta)\,\big|_{\beta=\lambda}$ равно $\Phi(\alpha,\lambda)$, то правая часть в (5.3) равна $\partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda\, \Phi(\alpha,\lambda)\,|_{\alpha=x^0-\lambda}$. Следовательно, по формуле обращения (4.2) для лучевого преобразования имеем:

$$\int\limits_\Lambda \partial_\Lambda \wedge \bar\partial_\Lambda\, \Phi(\alpha,\lambda)\,\big|_{\alpha=x^0-\lambda} = c(\gamma^{x^0})\,f(x^0).$$

Найдем коэффициент $c(\gamma^{x^0})$. Если порядок алгебраической кривой Λ равен k, то цикл γ^{x^0} гомологичен $k\,\gamma$, где γ — эйлеровский цикл. Так как, согласно § 4, $c(\gamma) = 2\,\pi^2\,i$, то имеем: $c(\gamma^{x^0}) = 2\,k\,\pi^2\,i$.

Замечание. Если кривая Λ задана параметрически $\lambda = u(s)$, то положим

$$\Psi(\alpha, s) = \Phi(\alpha, u(s)).$$

Тогда формулу обращения можно представить в следующем виде:

$$f(x) = (2\,k\,\pi^2\,i)^{-1} \int\limits_{\mathbb{C}} \Psi''_{s,\bar{s}}(x - u(s), s)\,ds \wedge d\bar{s}.$$

5.2. Определение допустимых комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим произвольный комплекс K прямых в $\mathbb{C}^3$. Задача по-прежнему состоит в том, чтобы восстановить функцию $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым комплекса. Спрашивается, при каких условиях на K эту задачу можно решить, подобно комплексу прямых, пересекающих кривую, исходя из формулы обращения для лучевого преобразования, полученной в § 4.

Пусть $H^x \subset H$ — подмногообразие прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку $x \in \mathbb{C}^3$ и $\gamma^x = K \cap H^x$. Для почти каждой точки x многообразие γ^x является циклом вещественной размерности 2. Поэтому для лучевого преобразования $\mathcal{I}$ имеет место следующая формула обращения: если $\varphi = \mathcal{I}f$, то

$$\int\limits_{\gamma^x} \kappa\varphi = c\,f(x), \tag{5.4}$$

где κ — оператор, введенный в § 4.

По условию задачи нам задано только ограничение $\Phi = \varphi\,|_K$ функции φ на многообразие прямых комплекса K. Таким образом, формула (5.4) дает решение задачи интегральной геометрии для комплекса K тогда и только тогда, когда дифференциальная форма $\kappa\varphi\,\Big|_{\gamma^x}$ может быть выражена только через функцию Φ и ее производные. Алгебраические 3-мерные подмногообразия прямых, для которых это условие выполняется, будем называть допустимыми комплексами прямых. Можно доказать, что это определение не зависит от конкретного выбора формы $\kappa\varphi$. Пример допустимого комплекса — рассмотренный в п. 5.1 комплекс прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$.

Если комплекс K допустим, то, подставив в (5.4) явное выражение $\kappa\psi\,\Big|_{\gamma^x}$ через функцию Φ, мы получим формулу обращения для интегрального преобразования, связанного с этим комплексом.

Следующие три пункта мы посвятим изучению аналитической и геометрической структуры допустимых комплексов. В частности будет доказано, что любой допустимый комплекс есть либо многообразие прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$, либо комплекс прямых, касательных к некоторой алгебраической поверхности в $\mathbb{C}^3$.

5.3. Необходимые и достаточные условия допустимости комплекса $\boldsymbol{K}$. Будем задавать лучевое преобразование $\mathcal{I}$ в локальных координатах $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ на многообразии прямых H, см. п. 4.1.

Если $\psi = \mathcal{I}f$ — лучевое преобразование функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$, то, согласно § 4, имеет место следующая форма обращения:

$$\int\limits_{\gamma^x} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_i \bar{\alpha}_j} \, d\alpha_i \wedge d\bar{\alpha}_j = c\,|x_3|^2 f(x), \tag{5.5}$$

где $\gamma^x \subset H^x$ — произвольный цикл вещественной размерности 2.

Пусть K — произвольный комплекс. Примем $\gamma^x = H^x \cap K$ и обозначим для любого $h \in \gamma^x$ через $T_h H$, $T_h K$, $T_h \gamma^x$ касательные пространства в точке h соответственно к многообразию прямых H, комплексу $K \subset H$ и циклу γ^x.

Определение. Введем эндоморфизм $A_h : T_h H \to T_h H$, положив

$$A_h(d\alpha_1, d\alpha_2, d\beta_1, d\beta_2) = (d\alpha_1, d\alpha_2, 0, 0).$$

Лемма. *Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда для почти каждой точки $x \in \mathbb{C}^3$ и почти каждой прямой $h \in \gamma^x$ имеем*:

$$A_h\big(T_h \gamma^x\big) \subset T_h K.$$

В самом деле, в (5.5) интегрируется производная функции ψ, взятая для каждого $h \in \gamma^x$ в комплексном направлении $A_h\big(T_h\gamma^x\big)$. Следовательно, подынтегральная форма в (5.5) выражается через $\Phi = \psi\,|_K$ тогда и только тогда, когда это направление лежит в подпространстве $T_h K$.

Пусть комплекс K, задан в локальных координатах (α, β) уравнением

$$F(\alpha, \beta) = 0.$$

Предложение 5.1. *Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда в любой его точке $h = (\alpha, \beta)$ выполняется соотношение*:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \frac{\partial F}{\partial \beta_2} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = 0. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $\xi = (d\alpha_1, d\alpha_2, d\beta_1, d\beta_2)$ — вектор из $T_h H$. Тогда условие, что $\xi \in T_h K$, имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial F}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial F}{\partial \beta_2} d\beta_2 = 0,$$

а условие, что $\xi \in T_h H^x$, имеет вид:

$$x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1 = 0, \quad x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2 = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\xi \in T_h \gamma^x = T_h(H^x \cap K)$ имеет вид

$$\xi = (a_1, a_2, -x_3 a_1, -x_3 a_2),$$

где $a_1 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} - x_3 \frac{\partial F}{\partial \beta_2}$, $\quad a_2 = -\big(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - x_3 \frac{\partial F}{\partial \beta_1}\big)$. Значит, $A_h(\xi) = (a_1, a_2, 0, 0)$. В силу леммы необходимое и достаточное условие допустимости комплекса имеет вид $a_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0$, что эквивалентно соотношению (5.6).

Приведем другое доказательство Предложения 5.1, основанное на непосредственных вычислениях. Предположим сначала, что комплекс K задан уравнением, разрешенным относительно β_2:

$$\beta_2 = u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1).$$

Введем на многообразии прямых H вместо координат $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ новые координаты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и $s = \beta_2 - u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ и обозначим через $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, s)$ функцию ψ в этих новых координатах, т.е.

$$\chi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)) = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2).$$

Отметим, что в новых координатах комплекс K задается уравнением $s = 0$.

Представим форму $\kappa\psi$ в новой системе координат. Имеем: $\dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i} - \dfrac{\partial \chi}{\partial s}\dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i}$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\sum \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \sum \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i - \dfrac{\partial \chi}{\partial s} \sum \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$. Для допустимости комплекса K необходимо и достаточно, чтобы ограничение этой формы на γ^x не содержало члена с $\partial\chi/\partial s$, т.е. чтобы было

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \,\Big|_{\gamma^x} = 0. \tag{5.7}$$

С другой стороны, на γ^x мы имеем: $x_3\, d\alpha_1 + d\beta_1 = 0$, $\quad x_3\, d\alpha_2 + d\beta_2 = 0$, откуда

$$\left(-x_3 \frac{\partial u}{\partial \beta_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right) d\alpha_1 + \left(x_3 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right) d\alpha_2 = 0. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) следует, что функция $u(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\frac{\partial u}{\partial \beta_1} = 0. \tag{5.9}$$

Если теперь комплекс K задан уравнением $F(\alpha, \beta) = 0$, то имеем: $\partial u/\partial \alpha_i = -F'_{\alpha_i}/F'_{\beta_2}$, $i = 1, 2$, $\quad \partial u/\partial \beta_1 = -F'_{\beta_1}/F'_{\beta_2}$. Подставив эти выражения в (5.9), получаем (5.6).

5.4. Геометрическая структура допустимых комплексов. Полученное в п. 5.4 условие допустимости комплекса прямых в $\mathbb{C}^3$ имеет красивую геометрическую интерпретацию. Предварительно изложим некоторые геометрические понятия и факты, связанные с многообразием прямых H.

Свяжем с каждой прямой $h \in H$ трехмерное многообразие H_h всех прямых, пересекающих h. Совокупность одномерных подпространств в $T_h H$, касательных к H_h, порождает трехмерный конус $\Gamma_h \subset T_h H$.

Нетрудно убедиться, что в локальных координатах (α, β) многообразие H_h, где $h = (\alpha^0, \beta^0)$, задается уравнением:

$$(\alpha_1 - \alpha_1^0)(\beta_2 - \beta_2^0) - (\alpha_2 - \alpha_2^0)(\beta_1 - \beta_1^0) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение конуса Γ_h имеет вид:

$$d\alpha_1\, d\beta_2 - d\alpha_2\, d\beta_1 = 0.$$

Прямолинейные образующие конуса Γ_h можно интерпретировать как изотропные направления относительно голоморфной метрики

$$ds^2 = d\alpha_1\, d\beta_2 - d\alpha_2\, d\beta_1.$$

По этой причине естественно называть $\Gamma_h \subset T_h H$ изотропным конусом в точке h.

Сформулируем несколько простых фактов об изотропном конусе Γ_h.

Заметим, прежде всего, что плоскости, касательные к конусу Γ_h, задаются уравнениями

$$a_1\, d\alpha_1 + a_2\, d\alpha_2 + b_1\, d\beta_1 + b_2\, d\beta_2 = 0,$$

коэффициенты которых связаны соотношением $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Далее, из уравнения конуса Γ_h ясно, что на нем имеется два одномерных семейства Π_1, Π_2 двумерных плоскостей:

$$\Pi_1 : d\beta_1 = \lambda\, d\alpha_1, \quad d\beta_2 = \lambda\, d\alpha_2;$$

$$\Pi_2 : d\alpha_2 = \lambda\, d\alpha_1, \quad d\beta_2 = \beta\, d\alpha_1.$$

При этом через каждую точку конуса, отличную от вершины, проходит в точности одна плоскость каждого семейства. Назовем эти плоскости соответственно α-плоскостями и β-плоскостями.

Эти семейства плоскостей в $T_h H$ имеют простой геометрический смысл: α-плоскости касаются подмногообразий прямых, пересекающих h в одной точке, а β-плоскости касаются подмногообразий прямых, лежащих в одной плоскости пространства $\mathbb{R}^3$, проходящей через h.

Любые две плоскости одного семейства имеют нулевое пересечение, а любые две плоскости из разных семейств пересекаются по прямой. Обратно, каждая прямолинейная образующая изотопного конуса Γ_h принадлежит одной из плоскостей каждого из этих семейств.

Если трехмерное подпространство в $T_h H$ касается изотропного конуса Γ_h, то его пересечение с Γ_h является объединением одной α-плоскости и одной β-плоскости. Обратно, если трехмерное подпространство в $T_h H$ содержит какую-нибудь плоскость изотропного конуса Γ_h, то оно касается этого конуса.

Предложение 5.2. *Допустимые комплексы прямых в $\mathbb{C}^3$ суть те и только те комплексы K, которые в каждой своей гладкой точке $h \in K$ касаются соответствующего изотропного конуса Γ_h.*

В самом деле, условие допустимости, сформулированное в Предложении 5.1, эквивалентно условию, что касательное подпространство $T_h K$ к комплексу K в точке $h \in K$ касается изотропного конуса Γ_h.

Пусть, как и раньше, γ^x — многообразие прямых комплекса K, проходящих через точку x, т.е. $\gamma^x = H^x \cap K$.

Предложение 5.3. *Комплекс прямых K допустим тогда и только тогда, когда для любой гладкой точки $h \in K$ все подпространства $T_h\gamma^x \subset T_h K \cap \Gamma_h, \quad x \in h$ принадлежат одной β-плоскости.*

В самом деле, если комплекс допустим, то для любой его гладкой точки $h \in K$ подпространство $T_h K$ касается конуса Γ_h, а потому $T_h K \cap \Gamma_h$ является объединением α-плоскости и β-плоскости. Но тогда все подпространства $T_h\gamma^x$, где x пробегает прямую h, принадлежат одной β-плоскости.

Обратно, пусть комплекс K таков, что для любой его гладкой точки $h \in K$ все подпространства $T_h\gamma^x$, где x пробегает прямую h, порождают двумерную плоскость. Тогда $T_h K \cap \Gamma_h$ содержит эту двумерную плоскость, а потому $T_h K$ касается изотропного конуса Γ_h. Следовательно, в силу Предложения 5.2, комплекс K допустим.

Предложение 5.3 допускает другую эквивалентную формулировку. Обозначим для любого комплекса прямых K через $\Gamma^x \subset \mathbb{C}^3$ конус, образованный прямыми комплекса, проходящими через точку $x \in \mathbb{C}^3$. Далее, если $h \in K$ — гладкая точка комплекса K, то обозначим для любой точки x прямой h через $\pi_{h,x}$ плоскость в $\mathbb{C}^3$, касательную к Γ^x вдоль образующей h.

Предложение 5.4. *Комплекс прямых K допустим тогда и только тогда, когда для любой его гладкой точки $h \in K$ плоскости $\pi_{h,x}$, где x пробегает прямую h, совпадают.*

5.5. Описание допустимых комплексов. Из Предложения 5.4 следует, что кроме комплексов прямых в $\mathbb{C}^3$, пересекающих фиксированную кривую, допустимыми являются также комплексы прямых, касательных к фиксированной (алгебраической) поверхности в $\mathbb{C}^3$. В самом деле, пусть K — комплекс прямых, касательных к поверхности P. Обозначим для любой гладкой точки $h \in K$ через π_h плоскость в $\mathbb{C}^3$, касательную к поверхности P в точке касания h с P. Очевидно, что если x — произвольная точка прямой h и Γ^x — конус, образованный прямыми комплекса K, проходящими через x, то плоскость $\pi_{h,x}$, касательная к Γ^x вдоль его образующей h, совпадает с π_h. Таким образом, комплекс K удовлетворяет условиям Предложения 5.4 и, значит, он допустим.

Теорема 5.2. *Допустимые комплексы прямых в $\mathbb{C}^3$ это те и только те комплексные трехмерные подмногообразия в многообразии прямых H, которые состоят либо из прямых, касающихся некоторой комплексной поверхности в $\mathbb{C}^3$, либо из прямых, пересекающих некоторую комплексную кривую в $\mathbb{C}^3$, возможно, бесконечно удаленную.*

Для доказательства теоремы введем понятие критической точки на прямой произвольного комплекса прямых K. Рассмотрим произвольную гладкую точку h комплекса K (т.е. прямую в $\mathbb{C}^3$). Назовем точку $x \in h$ критической, если отвечающая ей α-плоскость изотропного конуса Γ^x принадлежит $T_h K$. Аналогично назовем двумерную плоскость $\pi \supset h$ в $\mathbb{C}^3$ критической, если отвечающая ей β-плоскость принадлежит $T_h K$.

Предложение 5.5. *Если K — допустимый комплекс прямых в $\mathbb{C}^3$, то для каждой его гладкой точки $h \in K$ существуют единственные критическая точка $x \in h$, возможно, бесконечно удаленная, и критическая плоскость $\pi \supset h$.*

В самом деле, если комплекс K допустим, то $T_h K \cap \Gamma_h$, где Γ_h — изотропный конус, является объединением одной α-плоскости и одной β-плоскости. Этим плоскостям отвечают соответственно критическая точка $x \in h$ и критическая плоскость $\pi \supset h$.

Следствие. *Существует стандартное вложение многообразия K' гладких точек комплекса K в многообразие полных флагов на $\mathbb{C}P^3$.*

Именно, каждому $h \in K'$ сопоставляется тройка — флаг (x, h, π), где x критическая точка, а π — критическая плоскость для h.

Пусть K — допустимый комплекс прямых, заданный уравнением $F(\alpha, \beta) = 0$. Найдем координаты критической точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ прямой $(\alpha, \beta) \in K$ в предположении, что эта точка не является бесконечно удаленной.

Уравнения α-плоскости в Γ_h, отвечающей x, таковы:

$$x_3\, d\alpha_i + d\beta_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Условия, что эта плоскость принадлежит гиперплоскости $F'_{\alpha_1} d\alpha_1 + F'_{\alpha_2} d\alpha_2 + F'_{\beta_1} d\beta_1 + F'_{\beta_2} d\beta_2 = 0$, касательной к K, имеют следующий вид:

$$F'_{\alpha_1} - x_3 F'_{\beta_1} = F'_{\alpha_2} - x_3 F'_{\beta_2} = 0.$$

Отсюда заключаем:

Предложение 5.6. *Координаты критической точки допустимого комплекса K на прямой $(\alpha, \beta) \in K$ задаются равенствами*:

$$x_3 = \frac{F'_{\alpha_1}}{F'_{\beta_1}} = \frac{F'_{\alpha_2}}{F'_{\beta_2}}, \quad x_1 = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2.$$

Предложение 5.7. *Многообразие критических точек на прямых допустимого комплекса K имеет размерность не выше чем 2.*

Доказательство. Пусть $K'' \subset K$ — подмножество гладких точек $h \in K$, критические точки x которых конечны. Для доказательства утверждения достаточно убедиться, что отображение $K'' \to \mathbb{C}^3$, относящее каждой прямой $(\alpha, \beta) \in K''$ ее критическую точку $x = (x_1, x_2, x_3)$, всюду вырождено.

Из уравнений прямых следует, что

$$dx_i - \alpha_i\, dx_3 = x_3\, d\alpha_i + d\beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, поскольку $x_3 = \frac{F'_{\alpha_1}}{F'_{\beta_1}} = \frac{F'_{\alpha_2}}{F'_{\beta_2}}$ и $F'_{\alpha_1} d\alpha_1 + F'_{\alpha_2} d\alpha_2 + F'_{\beta_1} d\beta_1 + F'_{\beta_2} d\beta_2 = 0$, получаем, что дифференциалы координат критических точек связаны соотношением:

$$F'_{\beta_1}(dx_1 - \alpha_1\, dx_3) + F'_{\beta_2}(dx_2 - \alpha_2\, dx_3) = 0. \tag{5.10}$$

Утверждение доказано.

Из Предложения 5.6 следует, что многообразие критических точек в случае допустимого комплекса K является либо комплексной кривой Λ, либо комплексной поверхностью S в $\mathbb{C}^3$. В первом случае комплекс K состоит из прямых, пересекающих кривую Λ. Во втором случае из (5.10) следует, что прямые (α,β) комплекса K касаются поверхности в своих критических точках. Тем самым, теорема доказана.

Примечание. Существует простая связь между задачей о восстановлении функции $f \in S(\mathbb{C}^3)$ через ее интегралы по прямым допустимого комплекса K прямых в $\mathbb{C}^3$ и следующей задачей для функций $\psi(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ на $\mathbb{C}^4$. Найти решение ψ системы уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_1\,\partial\beta_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_2\,\partial\beta_1}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_1\,\partial\bar\beta_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar\alpha_2\,\partial\bar\beta_1}, \tag{5.11}$$

удовлетворяющее краевому условию $\psi\,|_K = \Phi$. Здесь K — комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^4$, заданное уравнением $F(\alpha,\beta)=0$. Предполагается, что F удовлетворяет условиям (5.6), т.е. что K — характеристическое подмногообразие системы (5.6).

Из уравнений (5.11) следует, что ψ является лучевым преобразованием некоторой функции f на $\mathbb{C}^3$, т. е. $\psi = \mathcal{I}f$. Поэтому решение краевой задачи сводится к применению формулы обращения для допустимых комплексов. Именно, на основании этой формулы мы находим сначала функцию f по функции $\Phi = \psi\,|_K$. Тогда искомая функция ψ получается лучевым преобразованием функции f, т.е. $\psi = \mathcal{I}f$.

Обратно, задача интегральной геометрии о восстановлении функции f по функции $\Phi = \psi\,|_K$ сводится к решению краевой задачи. Именно, если решена краевая задача для системы уравнений (5.11), т.е. по функции $\Phi = \psi\,|_K$ восстановлена функция ψ, то искомая функция f определяется по формуле обращения для лучевого преобразования.