ГЛАВА 1.
ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИй И ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Первые строгие доказательства неразрешимости некоторых уравнений в квадратурах и в элементарных функциях были получены в середине девятнадцатого века Лиувиллем (см. [Li1–Li3], [Ri]), Позднее П. Чебышев, Д. Мордухай-Болтовский, А. Островский, Дж. Ритт, Дж. Давенпорт, М. Розенлихт, М. Зингер и многие другие развили результаты Лиувилля. Библиографию по этому вопросу можно найти в [C1].

Согласно теории Лиувилля, "достаточно простые" уравнения либо имеют "достаточно простые" решения, либо вообще не решаются в явном виде. В некоторых случаях результаты доведены до компьюторных алгоритмов, которые либо позволяют доказать неразрешимость уравнения в конечном виде, либо предъявляют его явное решение.

Теория Лиувилля отвечает, например, на следующие вопросы:

1) при каких условиях неопределенный интеграл от элементарной функции является элементарной функцией?

2) при каких условиях представимы в обобщенных квадратурах все решения линейного дифференциального уравнения, коэффициенты которого — рациональные функции?

Чтобы продемонстрировать метод Лиувилля, мы приводим во всех подробностях доказательство его теоремы об интегралах (см. §3). В параграфе 4 мы применяем эту теорему для анализа представимости интегралов от алгебраических дифференциальных форм в элементарных функциях. Кроме теоремы Лиувилля в §4 используется алгебраическая геометрия и топология алгебраических кривых. Параграфы 3 и 4 можно пропустить без ущерба для понимания остального материала книги.

В параграфе 1 приводятся принадлежащие Лиувиллю значительно более простые определения классических классов функций (например, класса элементарных функций). Объясняется, как именно удалось Лиувиллю алгебраизировать вопросы о разрешимости уравнений в элементарных функциях и в других классических классах функций. В параграфе 2 приводится конструкция расширений Лиувилля функциональных дифференциальных полей.

В параграфе 5 мы формулируем некоторые результаты теории Лиувилля, относящиеся к вопросу разрешимости линейных дифференциальных уравнений. Более полно на этот вопрос отвечает дифференциальная теория Галуа (см. главу 3).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

§1. Новые определения классических классов функций

Лиувилль алгебраизировал задачу о разрешимости в элементарных функциях и квадратурах. Главным препятствием на этом пути является абсолютно неалгебраическая операция суперпозиции. Лиувилль обошел это препятствие следующим образом: с каждой функцией g из списка основных функций он связал операцию суперпозиции с этой функцией, переводящую функцию f, к которой применяется эта операция, в функцию $g \circ f$. Лиувилль заметил, что все основные элементарные функции сводятся к логарифму и к экспоненте (см. лемму 2.1 ниже). Суперпозиции $y = \exp f$ и $z = \ln f$ можно рассматривать как решения уравнений $y' = f'y$ и $z' = f'/f$. Таким образом, внутри классических классов функций вместо абсолютно неалгебраической операции суперпозиции достаточно рассматривать операции решения простых дифференциальных уравнений. После этого задача о разрешимости в классических классах функций становится дифференциально-алгебраической и переносится на абстрактные дифференциальные поля. Приступим к реализации этой программы.

Продолжим список классических операций.

Список классических операций (начало списка в п. 2.2 введения).

6) *Операция взятия экспоненты*, сопоставляющая функции f функцию $\exp f$.

7) *Операция взятия логарифма*, сопоставляющая функции f функцию $\ln f$.

Приведем теперь новые определения трансцендентных классических классов функции.

Элементарные функции одной переменной.

Список основных функций: все комплексные константы и независимая переменная x.

Список допустимые операции: взятие экспоненты, взятие логарифма, арифметические операции, дифференцирование.

Функции одной переменной, представимые в квадратурах.

Список основных функций: все комплексные константы.

Список допустимые операции: взятие экспоненты, арифметические операции, дифференцирование, интегрирование.

Обобщенные элементарные функции и функции, представимые в обобщенных квадратурах и k-квадратурах одной переменной определяются так же, как соответствующие необобщенные классы функций, нужно лишь к списку допустимых операций добавить, соответственно, операцию решения алгебраических уравнений или операцию решения алгебраических уравнений степени не выше k.

Лемма 1.1. *Основные элементарные функции выражаются с помощью комплексных констант, арифментических операций суперпозиций через экспоненту и логарифм.*

Доказательство. Для степенной функции x^α нужное выражение доставляет равенство $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. Для тригонометрических функций нужные выражения вытекают из формулы Эйлера $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$. При вещественных значениях x имеем $\sin x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ и $\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. В силу аналитичности эти же формулы справедливы и для комплексных x. Функции тангенс и котангенс выражаются через синус и косинус. Покажем, что для вещественных x справедливо равенство $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2i} \ln z$, где $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Очевидно, что $|z| = 1$, $\arg z = 2 \arg(1+ix)$, $\operatorname{tg}(\arg(1+ix)) = x$, что и доказывает нужное равенство. В силу аналитичности это же равенство справедливо и для комплексных значений x. Остальные обратные тригонометрические функции выражаются через arctg. Именно, $\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. Квадратный корень, участвующий в выражении функции $\arcsin$, выражается через экспоненту и логарифм: $x^{1/2} = \exp(1/2) \ln x$. Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Для каждого из трансцендентных классических классов функций новое и старое определения* (см. настоящий параграф и п. 2.2 введения) *эквивалентны.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна: ясно, что каждая функция, принадлежащая некоторому классическому классу функции, понимаемому в смысле нового определения, принадлежит тому же классу, понимаемому в смысле старого определения.

Докажем теорему в другую сторону. Согласно лемме 1.1, основные элементарные функции лежат в классах элементарных и обобщенных элементарных функций, понимаемых в смысле нового определения. Из этой же леммы вытекает, что классы функций, представимые в квадратурах, обобщенных квадратурах и k-квадратурах, понимаемые в смысле нового определения, тоже содержат основные элементарные функции. Действительно, независимая переменная x принадлежит этим классам, т.к. она получается интегрированием константы 1, ибо $x' = 1$. Вместо операции взятия логарифма, которой нет среди допустимых операций в этих классах, можно использовать операцию интегрирования, т.к. $(\ln f)' = f'/f$.

Нам осталось показать, что классические классы функции, понимаемые в смысле нового определения, замкнуты относительно суперпозиций. Дело здесь в следующем: операция взятия суперпозиции коммутирует со всеми операциями, фигурирующими в новых определениях классов функций, за исключением операций дифференцирования и интегрирования. Так, например, результат применения операции exp к суперпозиции $g \circ f$ совпадает с результатом применения операции взятия суперпозиции к функциям $\exp g$ и f, т.е. $\exp(g \circ f) = (\exp g) \circ f$. Аналогично $\ln(g \circ f) = (\ln g) \circ f$, $(g_1 \pm g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \pm (g_2 \circ f)$, $(g_1 g_2) \circ f = (g_1 \circ f)(g_2 \circ f)$, $(g_1/g_2) \circ f = (g_1 \circ f)/(g_2 \circ f)$. Если функция y удовлетворяет уравнению

$y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n = 0$, то функция $(y \circ f)$ удовлетворяет уравнению

$$(y \circ f)^n + (g_1 \circ f)(y \circ f)^{n-1} + \cdots + (g_n \circ f) = 0.$$

Для операций дифференцирования и интегрирования имеем следующие простые коммутационные соотношения с операцией суперпозиции: $(g)' \circ f = (g \circ f)'(f')^{-1}$ (если функция f — константа, то функция $(g)' \circ f$ — тоже константа), и если y — неопределенный интеграл функции g, то $y \circ f$ — неопределенный интеграл функции $(g \circ f)f'$ (другими словами, интегрированию функции g при суперпозиции с функцией f соответствует интегрирование функции $g \circ f$, домноженной на функцию f').

Отсюда и вытекает замкнутость классических классов, понимаемых в смысле нового определения, относительно суперпозиций. Действительно, если функция g получается из констант (или из констант и независимой переменной) при помощи операций, которые мы обсуждали выше, то функция $g \circ f$ получается применением тех же или почти тех же операций, как в случае интегрирования и дифференцирования, из функции f. Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что операцию дифференцирования тоже можно исключить из списков допустимых операций классических классов функций. Для доказательства достаточно воспользоваться явным вычислением производных экспоненты и логарифма и правилами дифференцирования формул, включающих суперпозиции и арифметические операции. Исключение операции дифференцирования не помогает в задаче о разрешимости уравнений в конечном виде, но иногда дает возможность более инвариантно сформулировать результат (см. вторую формулировку теоремы Лиувилля об абелевых интегралов из §4).

§2. Расширения Лиувилля абстрактных и функциональных дифференциальных полей

Поле K называется *дифференциальным полем*, если задано аддитивное отображение $a \to a'$, удовлетворяющее соотношению Лейбница $(ab)' = a'b + ab'$. Элемент y дифференциального поля K называется *константой*, если $y' = 0$. Все константы дифференциального поля образуют подполе, которое называется *полем констант*. Во всех интересующих нас случаях полем констант является поле комплексных чисел. *Мы всегда в дальнейшем предполагаем, что дифференциальное поле имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнутое поле констант.* Элемент y дифференциального поля называется: *экспонентой элемента* a, если $y' = a'y$; *экспонентой интеграла элемента* a, если $y' = ay$; *логарифмом элемента* a, если $y' = a'/a$; *интегралом элемента* a, если $y' = a$.

Пусть дифференциальное поле K и множество M лежат в некотором дифференциальном поле F. *Присоединением* к дифференциальному полю K множества M называется минимальное дифференциальное поле $K\langle M\rangle$, содержащее поле K и множество M.

Дифференциальное поле F, содержащее дифференциальное поле K и имеющее то же поле констант, называется *элементарным расширением* поля K, если существует цепочка дифференциальных полей $K = F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F$, таких, что при каждом $i = 1, \ldots, n-1$ поле $F_{i+1} = F_i\langle x_i\rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, причем x_i — экспонента или логарифм некоторого элемента a_i поля F_i. Элемент $a \in F$ называется *элементарным* над K, $K \subset F$, если он содержится в каком-либо элементарном расширении поля K.

Обобщенное элементарное расширение, расширение Лиувилля, обобщенное расширение Лиувилля и *k-расширение Лиувилля* поля K определяются аналогично. При построении обобщенных элементарных расширений допускаеются присоединения экспонент, логарифмов и алгебраические расширения. При построении расширений Лиувилля допускаются присоединения интегралов и экспонент интегралов. В обобщенных расширениях Лиувилля и k-расширениях Лиувилля кроме этого допускаются, соответственно, алгебраические расширения и присоединения решений алгебраических уравнений степени не выше k. Элемент $a \in F$ называется *обобщенно-элементарным* над K, $K \subset F$, (*представимым в квадратурах, в обобщенных квадратурах, в k-квадратурах* над K), если a содержится в каком-либо обобщенно-элементарном расширении (расширении Лиувилля, обобщенном расширении Лиувилля, k-расширении Лиувилля) поля K.

Замечание. Уравнение для экспоненты интеграла проще, чем уравнение для экспоненты. Поэтому при определении расширений Лиувилля и т.д. используются присоединения экспонент интегралов. Вместо этого можно было бы отдельно присоединять экспоненты и отдельно интегралы.

Перейдем к функциональным дифференциальным полям. Именно с такими полями мы будем иметь дело в книге (хотя некоторые результаты без труда переносятся на абстрактные дифференциальные поля).

Всякое подполе K поля всех мероморфных функций в связной области U на сфере Римана, содержащее все комплексные константы и замкнутое относительно дифференцирования (т.е. если $f \in K$, то $f' \in K$), доставляет пример функционального дифференциального поля. Дадим теперь общее определение. Пусть V, v — пара, состоящая из связной римановой поверхности V и мероморфного векторного поля v на ней. Производная Ли L_v вдоль векторного поля v действует на поле F всех мероморфных функций на поверхности V и задает дифференцирование $f' = L_v f$ в этом поле. *Функциональное дифференциальное поле* — это любое дифференциальное подполе поля F, содержащее все комплексные константы.

Иногда удобнее использовать другое определение дифференцирования поля функций, в котором вместо мероморфного векторного поля фигурирует мероморфная 1-форма α. Производную f' функции f можно определить следующей формулой: $f' = \mathrm{d}f/\alpha$ (частное двух мероморфных 1-форм является корректно определенной мероморфной функцией). Описанное дифференцирование — это производная Ли L_v вдоль векторного поля

v, связанного с формой α следующим соотношением: значение формы α на поле v тождественно равно единице.

Для расширения функциональных полей полезна следующая конструкция. Пусть K — некоторое подполе поля мероморфных функций на связной римановой поверхности V, снабженной мероморфной формой α, инвариантное относительно дифференцирования $f' = \mathrm{d}f/\alpha$, (т.е. если $f \in K$, то $f' \in K$). Рассмотрим любую связную риманову поверхность W вместе с аналитическим отображением $\pi\colon W \to V$. Фиксируем на W форму $\beta = \pi^*\alpha$. Дифференциальное поле F всех мероморфных функций на W с дифференцированием $\varphi' = \mathrm{d}\varphi/\beta$ содержит дифференциальное подполе π^*K, состоящее из функций вида π^*f, где $f \in K$. Дифференциальное поле π^*K изоморфно дифференциальному полю K, и оно лежит внутри дифференциального поля F. Если удачно подобрать поверхность W, то расширение поля π^*K, изоморфного полю K, можно произвести внутри поля F.

Пусть требуется расширить поле K, скажем, интегралом y некоторой функции $f \in K$. Это можно сделать следующим образом. Над римановой поверхностью V можно рассмотреть риманову поверхность W неопределенного интеграла y формы $f\alpha$. По самому определению римановой поверхности W существует естественная проекция $\pi\colon W \to V$, и функция y является однозначной мероморфной функцией на поверхности W. Дифференциальное поле F мероморфных функций на W с операцией дифференцирования $f' = \mathrm{d}f/\pi^*\alpha$ содержит как элемент y, так и поле π^*K, изоморфное полю K. Поэтому расширение $\pi^*K\langle y\rangle$ определено и является подполем дифференциального поля F. Именно эту конструкцию расширения мы имеем в виду, когда говорим о расширениях функциональных дифференциальных полей. Эта же конструкция позволяет присоединить к функциональному дифференциальному полю K логарифм, экспоненту, интеграл или экспоненту интеграла от любой функции f из поля K. Для любых функций $f_1, \ldots, f_n \in K$ можно таким способом присоединить к K решение y алгебраического уравнения $y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_n = 0$ или все решения $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения (присоединение всех решений $y_1, \ldots, y_n$ можно осуществить на римановой поверхности вектор-функции $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$). Таким же способом для любых функций $f_1, \ldots, f_{n+1} \in K$ можно присоединить к K n-мерное аффинное пространство над $\mathbb{C}$ всех решений линейного дифференциального уравнения $y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdots + f_n y + f_{n+1} = 0$. (Напомним, что росток любого решения линейного дифференциального уравнения аналитически продолжается вдоль кривой на поверхности V, не проходящей через полюса функций $f_1, \ldots, f_{n+1}$.)

Итак, *все упомянутые выше расширения функциональных дифференциальных полей можно осуществить, не выходя из класса функциональных дифференциальных полей.* Говоря о расширениях функциональных дифференциальных полей, мы всегда имеем в виду именно эту процедуру.

Дифференциальное поле, состоящее из всех комплексных констант, и дифференциальное поле, состоящее из всех рациональных функций от од-

ной переменной, можно рассматривать как дифференциальные поля функций, определенных на сфере Римана.

Сформулируем снова теорему 1.2, используя определения из абстрактной дифференциальной алгебры и конструкцию расширения функциональных дифференциальных полей.

Теорема 2.1. *Функция одной комплексной переменной (возможно, многозначная) принадлежит:*

1) классу элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому элементарному расширению поля всех рациональных функций одной переменной;

2) классу обобщенных элементарных функций, если и только если она принадлежит некоторому обобщенному элементарному расширению поля рациональных функций;

3) классу функций, представимых в квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;

4) классу функций, представимых в k-квадратурах, если и только если она принадлежит некоторому k-расширению Лиувилля поля всех комплексных констант;

5) классу функций, представимых в обобщенных квадратурах, если и только если она принадлежит обобщенному расширению Лиувилля поля всех комплексных констант.

§3. Интегрирование элементарных функций

Когда мы начинаем учить анализ, нас учат интегрировать элементарные функции, и это оказывается далеко не простым занятием. Как доказал Лиувилль, неопределенный интеграл от элементарной функции обычно не является элементарной функцией.

Теорема 3.1 (Лиувилля об интегралах). *Неопределенный интеграл y функции f, лежащей в функциональном дифференциальном поле K, принадлежит некоторому обобщенно элементарному расширению этого поля, если и только если этот интеграл представим в виде*

$$y(x) = \int^x f(t)\mathrm{d}t = A_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(x), \tag{1}$$

где A_i при $i = 0, \ldots, n$ — некоторые функции из поля K.

Следствие 3.2. *Неопределенный интеграл y от обобщенно элементарной функции f является обобщенно элементарной функцией, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = A_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где A_i при $i = 0, \ldots, n$ — рациональные функции с комплексными коэффициентами от функции f и ее производных.

Априори, интеграл от элементарной функции f мог бы быть очень сложной элементарной функцией. Теорема Лиувилля показывает, что ничего такого случиться не может. Или интеграл от элементарной функции неэлементарен, или он имеет описанный в следствии простой вид.

Условие (1) из теоремы Лиувилля в дифференциальной форме означает, что элемент $f \in K$ представим в виде

$$f = A_0' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}, \tag{2}$$

где A_i при $i = 0, \ldots, n$ — некоторые элементы поля K. В абстрактной дифференциальной алгебре справедлив аналог теоремы Лиувилля. В формулировке абстрактной теоремы в качестве K нужно взять абстрактное диференциальное поле и воспользоваться условием (1) в дифференциальной форме (2).

Теорема Лиувилля — яркий результат о разрешимости и о неразрешимости уравнений в явном виде, не связанный с теорией групп. Ее доказательство мы приводим полностью, но ограничиваемся лишь формулировками некоторых других результатов теории Лиувилля. Все-таки эта теория лежит в стороне от основного содержания книги.

Рассужения Лиувилля (см. [Ri]) были значительно упрощены в [R1], [R2]. При продумывании доказательства я пользовался статьей [Пр]. Доказательство с небольшими изменениями проходит для абстрактных дифференциальных полей. Правда, так как абстрактные дифференциальные поля для нас неинтересны, мы не обсуждаем существование нужных нам по ходу дела расширений полей (скажем, существование дифференциального поля, содержащего интеграл некоторого элемента заданного дифференциального поля). Для функциональных дифференциальных полей вопросы такого рода очевидны и уже рассмотрены выше (см. §2).

Берется ли интеграл от алгебраической функции в явном виде? Пионерские работы Абеля, заложившие основы теории алгебраических кривых и абелевых интегралов, были посвящены этому вопросу для специального класса алгебраических функций.

Согласно Чеботареву, до появления его книги [Чеб] кроме теоремы Лиувилля не было результатов общего характера, относящихся к этой задаче. Чеботарев по-своему формулирует и доказывает результаты Абеля, Лиувилля и Чебышева: у классиков “они сформулированы иначе и для нас не всегда убедительно, поскольку в их эпоху еще не было вполне уточнено понятие многозначной функции” (см. [Чеб]). Теорема Лиувилля у Чеботарева приводится в очень ослабленном виде и решает значительно более легкую задачу, чем исходная теорема Лиувилля: она дает критерий представимости абелева интеграла в виде алгебраической функтсии от логарифмов алгебраических функций от независимой переменной

и от независимой переменной. Теорема Лиувилля в этой форме вполне прозрачна и приводит к тому же критерию интегрируемости, что и исходная теорема. Поэтому анализ справедливости условий критерия, проведенный Чеботаревым ([Чеб]), без изменения применим к теореме Лиувилля в исходной форме.

Использование теории алгебраических кривых и топологии позволяет довольно полно объяснить причины неэлементарности абелевых интегралов (см. §4). Но что бы довести эти результы до алгоритмов, нужна еще большая работа (см. книгу [Дэв]).

В заключение приведем без доказательства формулировку критерия Лиувилля интегрируемости в явном виде функций экспоненциального типа и дадим примеры неберущихся интегралов. Доказательства можно найти в [P1], [P2] и в [Пр].

Критерий Лиувилля. *Рассмотрим неопределенный интеграл вида*

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)e^{g(t)}\mathrm{d}t,$$

где f и g — рациональные функции, причем функция g непостоянная, а f не обращается в тождественный нуль. Если существует рациональная функция a, такая, что $a'+ag' = f$, то $I = ae^g+c$, где c — комплексная константа. Если же уравнение $a' + ag' = f$ неразрешимо в рациональных функциях, то интеграл I не является обобщенно элементарной функцией.

Примеры неберущихся интегралов. *Неопределенные интегралы* $\int e^{x^2}\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, $\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ *не являются обобщенно элементарными функциями.*

3.1. План доказательства теоремы Лиувилля. Нам надо доказать, что *если производная обобщенно элеметарной функции y над полем K лежит в поле K, т.е. если $y' \in K$, то функция y представим в виде (1).* Введем в обобщенно элементарных функциях над функциональным дифференциальным полем K понятие сложности. Скажем, что функция y является *обобщенно элементарной функцией сложности $\le k$ над K*, если существует последовательность $K = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k$ функциональных дифференциальных полей F_i, таких, что при $i = 1, \ldots, k$ поле F_i яляется расширением поля F_{i-1} при помоши добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}.

Теорема 3.1 доказывается по индукции. Индукционное утверждение $I(m)$: *теорема Лиувилля верна для любого обобщенно элеметарного интеграла y сложности $\le m$ над любым функциональным дифференциальным полем K.* Утверждение $I(0)$ очевидно: если интеграл y лежит в поле K, то y представим в виде (1): $y = A_0$, где $A_0 \in K$.

Пусть y — обобщенно элементарный интеграл над K сложности $\le k$, т.е. $y' \in K$, $y \in F_k$ и $K = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k$ — последовательность

полей, в которой каждое поле F_i получается из предыдущего поля F_{i-1} при помощи добавления экспоненты, логарифма или алгебраической функции над полем F_{i-1}. Так как $y' \in F_1$, то по индукционному утверждению $I(k-1)$ можно считать, что

$$y = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \ln R_i + R_0, \tag{3}$$

где $R_1, \ldots, R_q,\ R_0 \in F_1$.

Поле F_1 получено из поля K присоединением или алгебраического элемента, или логарифма, или экспоненты над полем K. Эти три случая ниже рассматриваются отдельно (см. п. 3.2). Мы покажем, что если F_1 — алгебраическое расширение поля K, то элемент y представляется через элементы поля K формулой, аналогичной (3) и содержащей то же число q логарифмических слагаемых. Если F_1 получено из K при помощи логарифмического расширения, то функция R_0 могла бы содержать аддитивный логарифмический член, однако функции $R_1, \ldots, R_q$ логарифма содержать не могут. Поэтому представление y через элементы поля K имеет вид, аналогичный (3), но может содержать $(q+1)$ логарифмическое слагаемое. Если же поле F_1 получено из K при помощи экспоненциального расширения, то экспонента не может входить в функцию R_0 и могла бы входить в функции R_i при $i > 0$ только в качестве сомножителя. Поэтому после логарифмирования экспонента пропадает и соответствующие сомножители становятся слагаемыми, которые прибляются к R_0.

Прежде чем переходить к реализации этого индукционного доказательства, докажем 6 элементарных лемм.

3.2. Леммы к теореме Лиувилля. Покажем сначала, что *в формулировке теоремы Лиувилля можно добавить требование линейной независимости коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ над полем рациональных чисел* (см. "торическую" лемму 3.4 ниже). Начнем с очевидной леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Если $g = f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n}$, где k_i — целые числа и $f_1, \ldots, f_n$ — ненулевые элементы некоторого дифференциального поля, то $\dfrac{g'}{g} = \sum k_i \dfrac{f_i'}{f_i}$.*

Доказательство вытекает из тождества Лейбница (или из равенства логарифма произведения сумме логарифмов сомножителей).

Рассмотрим набор $A_1, \ldots, A_n$ ненулевых элементов дифференциального поля K и линейную комбинацию $S = \lambda_1 \dfrac{A_1'}{A_1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{A_n'}{A_n}$ их логарифмических производных с постоянными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Лемма 3.4. *Если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ зависимы над полем Q, то в мультипликативной группе G, порожденной элементами $A_1, \ldots, A_n$, можно выбрать меньше чем n элементов, некоторая линейная комбинация с постоянными коэффициентами логарифмических производных которых равна S.*

Доказательство. Можно считать, что ни один из элементов A_i не равен константе: в противном случае $\frac{A_i'}{A_i} = 0$ и число слагаемых в S можно сократить. Можно считать, что группа G, свободна и не содержит констант, отличных от единицы. Действительно, нетривиальное тождество $A_1^{k_1} \dots A_n^{k_n} = c$, где c — константа, по лемме 3.3 влечет за собой нетривиальное линейное соотношение $\sum k_i \frac{A_i'}{A_i} = 0$, которое позволяет сократить число слагаемых в S. Если группа G свободна, то в ней можно выбрать новые образующие $B_1, \dots, B_n$, такие, что $A_1 = B_1^{m_{1,1}} \dots B_n^{m_{1,n}}, \dots,$ $A_n = B_1^{m_{n,1}} \dots B_n^{m_{n,n}}$, где $M = \{m_{ij}\}$ — произвольная целочисленная $(n \times n)$-матрица с определителем 1. По лемме 3.3 имеем $\frac{A_i'}{A_i} = m_{i,1}\frac{B_1'}{B_1} + \dots + m_{i,n}\frac{B_n'}{B_n}$. Поэтому S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов B_i. Логарифмическая производная функции B_1 входит в эту комбинацию с коэффициентом $\lambda_1 m_{1,1} + \dots + \lambda_n m_{n,1}$. Пусть $p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n = 0$ — соотношение между коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, где $p_1, \dots, p_n$ — целые числа, не имеющие общего делителя. Выберем целочисленную матрицу M с единичным определителем так, чтобы $m_{1,1} = p_1, \dots, m_{n,1} = p_n$. Это можно сделать, так как несократимый целочисленный вектор $p = p_1, \dots, p_n$ можно дополнить до базиса решетки $\mathbb{Z}^n$. Такому выбору матрицы соответствует некоторый набор образующих $B_1, \dots, B_n$. Элемент S является линейной комбинацией логарифмических производных элементов $B_2, \dots, B_n$. Лемма доказана.

Ниже мы будем иметь дело с парами вложеных дифференциальных полей $K \subset F$, таких, что поле F как поле (а не как дифференциальное поле!) порождено над K одним элементом $t \in F$ и элемент t трансцендентен над полем K. В этом случае поле F можно рассматривать как снабженное новой операцией дифференцирования поле мероморных функций над полем K. Действительно, каждый элемент поля F представляется как значение на элементе $x = t$ единственной рациональной функции $G(x)$ над полем K: две различные рациональные функции не могут совпадать на элементе t, т.к. t трансцендентен над K. В частности, производная t' элемента t равняется $R(t)$, где $R(x)$ — рациональная функция над полем K. В этой ситуации дифференциальное поле F изоморфно полю рациональных функций над полем K с новой операцией дифференцирования D, определеной формулой $D\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}R(x)$, где $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ — обычная операция дифференцирования в поле рациональную функцию.

Если в уравнении $t' = R(t)$ функция R является полиномом над K, то дифференцирование D переводит кольцо полиномов над полем K в себя. Именно так обстоит дело, если трансцендентный над K элемент t является интегралом некоторого элемента $f \in K$, т.е. $t' = f$, или экспонентой интеграла, т.е. $t' = ft$. *Ниже мы отождествяем поле F с полем рациональных функций над полем K, снабженных дифференцированием D.*

Лемма 3.5. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, и $P \in K[x]$ — неприводимый полином над полем K. Тогда*

1) если t — интеграл над полем K, т.е. $t' = f$, $f \in K$, то полиномы DP и P не имеют общего множителя;

2) Если t — экспонента интеграла над полем K, т.е. $t' = ft$, $f \in K$, то полиномы DP и P имеют общий множитель, если и только если $P \equiv x$.

Доказательство. Прежде всего наличие или отсутствие общего множителя у полиномов P и DP не зависит от умножения полинома P на элемент $a \in K$, $a \neq 0$. Это видно из тождества Лейбница $D(aP) = a'P + aD(P)$. Если t — интеграл над K, $t' = f$, то домножив, если надо, полином P на элемент поля K, можно считать, что старший коэффициент полинома P равен единице, $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. В этом случае полином $DP = (nf + a_1)x^{n-1} + \ldots$ имеет меньшую степень чем полином P и никак не может делиться на неприводимый полином P.

Если t — экспонента интеграла над K, $t' = ft$, и неприводимый полином P не совпадает с полиномом $P \equiv x$, то домножив P, если надо, на элемент поля K, можно считать, что свободный член полинома P равен единице, $P(x) = a_nx^n + \cdots + 1$ (неприводимый полином имеет нулевой свободный член, только если $P \equiv x$). В этом случае полином $DP = (a'_n + na_nf)x^n + \ldots$ имеет ту же степень, что и полином P, но свободный член полинома DP равен нулю. Поэтому он не может делиться на полином P.

Замечание. Используя теорему Ролля и вычисления из леммы 3.5, легко показать, что каждая *вещественная функция Лиувилля* (см. [X*]) *имеет лишь конечное число вещественных корней, причем это число корней можно явно оценить сверху.* Теория малочленов (см. [X**]) содержит далекие многомерные обобщения оценок такого рода.

Лемма 3.6. *Пусть $t \in F$ — трансцентентный элемент над полем K, являющийся интегралом над K, т.е. $t' = f$, где $f \in K$. Тогда значение $P(t)$ полинома $P \in K[x]$ на элементе t является интегралом над K, если и только если $P = cx + b$, где c — константа и $b \in K$.*

Доказательство. Пусть $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$. Тогда $DP = a'_nx^n + (a'_{n-1} + na_nf)x^{n-1} + \ldots$. Многочлен DP имеет степень, меньшую чем n, если и только если элемент a_n является константой, т.е. $a_n = c_1 \in \mathbb{C}$. Этот полином не может иметь степень, меньшую чем $(n-1)$. Действительно, если $a'_{n-1} + na_nf = 0$, то $\left(\dfrac{-a_{n-1}}{nc_1}\right)' = f$. Так как $t' = f$, то $t = \dfrac{-a_{n-1}}{nc_1} + c_2$, где $c_2 \in \mathbb{C}$, и, следовательно, $t \in K$. Включение $t \in K$ противоречит трансцендентности элемента t над полем K. Полином DP имеет нулевую степень, если и только если $P \equiv cx + b$.

Лемма 3.7. *Пусть $t \in F$ — трансцендентный элемент над полем K, являющийся экспонентой интеграла над K, т.е. $t' = ft$, где $f \in K$. Тогда значение $P(t)$ полинома Лорана $P \in K[x, x^{-1}]$ на элементе t является интегралом над K, если и только если полином Лорана не зависит от x и x^{-1} и совпадает со своим свободным членом.*

Доказательство. Действительно, если $P(x) = \sum\limits_{-m\le k\le n} a_k x^k$, то

$$DP = \sum_{-m\le k\le n} (a_k' + k a_k f) x^k.$$

Если $k \neq 0$ и $a_k \neq 0$, то коэффициент $a_k' + k a_k f$ не может обращаться в нуль. Действительно, в противном случае элементы a_k и t^{-k} удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению: $a_k' = -kfa_k$ и $(t^{-k})' = -kt^{-k-1}ft = -kft^{-k}$. Откуда $t^{-k} = ca_k$, где c — константа. Значит, элемент t алгебраичен над полем K, что противоречит предположению о его трансцендентности. Поэтому полином Лорана DP не зависит от x и x^{-1}, если и только если полином P совпадает со своим свободным членом.

Замечание. Используя вычисления из лемм 3.5–3.7, легко показать (см. леммы 4.2 и 4.4 из главы 3), что 1) *элемент t, не лежащий в поле K и являющийся интегралом над K, не может быть алгебраическим элементом над K, 2) элемент t, не лежащий в поле K и являющийся экспонентой интеграла над K, алгебраичен над K, если и только если неприводимое над K полиномиальное уравнение, которому удовлетворяет t, имеет вид $t^k - a = 0$ при некотором $k > 0$ и $a \in K$.* Эти два утверждения мы используем в главе 3.

Пусть $K \subset F$ — функциональные дифференциальные поля и $P \in K[x]$ — неприводимый полином степени n над полем K. Пусть поле F содержит все n корней $x_1, \ldots, x_n$ полинома P. При $i = 1, \ldots, n$ обозначим через K_i поле, полученное алгебраическим присоединением к полю K корня x_i (т.е. каждый элемент поля K_i является значением в корне x_i некоторого полинома степени $< n$ над полем K).

Лемма 3.8. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ поле K_i замкнуто относительно дифференцирования. Для каждой пары индексов $1 \le i, j \le n$ отображение, оставляющее поле K неподвижным и переводящее элемент x_i в x_j, продолжается до дифференциального изоморфизма полей K_i и K_j.*

Доказательство. Для полинома $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ над полем K обозначим через $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial t}$, соответственно, полиномы $nx^{n-1} + \ldots a_{n-1}$ и $a_1' x^{n-1} + \cdots + a_n'$. Так как полином P неприводим над K, то полином $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ не может иметь с полиномом P общий корень. Для каждого корня x_i, продифференцировав в поле F тождество $P(x_i) = 0$, получаем равенство

$$x_i' = -\frac{\partial P}{\partial t}(x_i) \Big/ \frac{\partial P}{\partial x}(x_i)$$

(являющееся вариантом формулы для производной неявной функции).

Итак, производная элемента x_i является значением в точке x_i рациональной функции $-\dfrac{\partial P}{\partial t} \Big/ \dfrac{\partial P}{\partial x}$. Причем эта рациональная функция одна и та же для всех корней $x_1, \ldots, x_n$ полинома P. Отсюда вытекают оба утверждения леммы.

3.3. Доказательство теоремы Лиувилля. Вернемся к доказательству теоремы Лиувилля.

1) Случай алгебраического расширения.

Пусть $F_1 = K\langle x_1\rangle$ получено из K присоединением корня $x_1 = t$ неприводимого над K полинома P. По индукционному предположению существуют полиномы $P_1, \dots, P_q$ и P_0 степени $< n$, такие, что

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(P_i(x_1))'}{P_i(x_1)} + (P_0(x_1))'.$$

Пусть F — дифференциальное поле, полученное из K присоединением всех корней $x_1, \dots, x_n$ полинома P и $K\langle x_i\rangle$ — подполе в F, полученное присоединением к K элемента x_i. В силу изоморфизма полей $K\langle x_1\rangle, \dots, K\langle x_n\rangle$ для каждого $k = 1, \dots, n$ (см. лемму 3.8) имеем

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{(P_i(x_k))'}{P_i(x_k)} + (P_0(x_k))'.$$

Возьмем в поле F среднее арифметическое полученных n тождеств. Согласно лемме 3.3, для каждого i имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(P_i(x_k))'}{P_i(x_k)} = \frac{Q_i'}{Q_i},$$

где $Q_i = P_i(x_1) \dots P_i(x_n)$. Элементы Q_i и $Q_0 = \dfrac{1}{n}(P_0(x_1) + \dots + P_0(x_n))$ симметрично зависят от корней полинома P и поэтому лежат в поле K. Итак, $f = \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{n} \dfrac{Q_i'}{Q_i} + Q_0'$, где $Q_1, \dots, Q_q, Q_0 \in K$. В случае алгебраического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

2) Присоединение логарифмов и экспонент.

Пусть F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося или логарифмом или экспонентой (т.е. или $t' = a'/a$, или $t' = a't$, где $a \in K$). Согласно индукционному предположению в этих случаях имеем

$$f = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{DR_i(t)}{R_i(t)} + DR_0(t),$$

где $R_1, \dots, R_q$, R_0 — рациональные функции над полем K, а D — дифференцирование поля рациональных функций, соответствующее либо соотношению $t' = a'/a$, либо соотношению $t' = a't$.

Сделаем общие для этих случаев приготовления. Представим каждую из рациональных функций R_i при $i = 1, \dots, q$ в виде $R_i = A_i P_{i_1}^{k_{i_1}} \dots P_{i_l}^{k_{i_l}}$, где P_{i_j} — неприводимые над K полиномы со старшим коэффициентом равным

единице, k_{i_j} — целые числа и A_i — элемент поля K. Множество полиномов $\{P_{i_j}\}$ обозначим через M. Воспользовавшись леммой 3.3, сумму $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \dfrac{DR_i}{R_i}$ представим в виде $\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \dfrac{A_i'}{A_i} + \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k \dfrac{DP_k}{P_k}$, где полиномы P_k принадлежат множеству M, функции $\dfrac{DP_k}{P_k}$ линейно независимы над полем $\mathbb{C}$ и μ_k — комплексные константы.

Далее рациональную функцию R_0 представим в виде суммы полинома Q и слагаемых вида $\dfrac{Q_{jm}}{L_j^m}$, где m — целое натуральное число, L_j — неприводимый полином и Q_{jm} — полином степени меньшей, чем степень полинома L_j. Полином Q представим в виде свободного члена $A \in K$ и полинома Q_0, не имеющего свободного члена. Окончательно,

$$f = \left(\sum \lambda_i \frac{A_i'}{A_i} + A'\right) + \sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k} + \sum D\left(\frac{Q_{jm}}{L_j^m}\right) + DQ_0.$$

3) Случай присоединения логарифма t.

Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося логарифмом над K (т.е. $t' = a'/a$, где $a \in K$). Покажем, что в этом случае слагаемые видов $D\left(\dfrac{Q_{im}}{L_i^m}\right)$ и $\mu_k \dfrac{DP_k}{P_k}$ обращаются в нуль, а многочлен Q_0 является мономом ct, где $c \in \mathbb{C}$.

Все слагаемые вида $D\left(\dfrac{Q_{jm}}{L_j^m}\right)$ должны быть равными нулю. Действительно, если хотя бы для одного полинома L_j это не так, то выберем член $\dfrac{Q_{jM}}{L_j^M}$, содержащий в знаменателе наибольшую степень $M \geq 1$ полинома L_j. Тогда слагаемое $\dfrac{(-M)Q_{jM}DL_j}{L_j^{M+1}}$, входящее в производную $D\left(\dfrac{Q_{jM}}{L_j^M}\right)$ этого члена, ни с чем сократиться не может: по лемме 3.5 полином DL_j не имеет общего множетеля с полиномом L_j, а слагаемые вида $\mu_k \dfrac{DP_k}{P_k}$ имеют в знаменателе неприводимый полином в первой степени.

По той же причине члены вида $\mu_k \dfrac{DP_k}{P_k}$ тоже должны отсутствовать: полином DP_k не имеет общего множителя с полиномом P_k, сумма $\sum D\left(\dfrac{Q_{jm}}{L_j^m}\right)$, как показано выше, равна нулю, и слагаемому $\mu_k \dfrac{DP_k}{P_k}$ не с чем сократиться. Далее производная полинома без свободного члена Q_0 должна лежать в поле K, следовательно, по лемме 3.6 $Q_0(t) = ct$, где c — комплексная константа. По условию $t = \dfrac{a'}{a}$. Имеем

$$f = \sum \lambda_m \frac{A_m'}{A_m} + c\frac{a'}{a} + A'.$$

В случае логарифмического расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

4) Случай присоединения экспоненты t.

Пусть поле F_1 получается из K присоединением трансцендентного над K элемента t, являющегося экспонентой над K, (т.е. $t' = a't$, где $a \in K$). Покажем, что в этом случае слагаемые видов $D\left(\frac{Q_{jm}}{L_j^m}\right)$ и $D(Q_0)$ обращаются в нуль, а сумма $\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$ может содержать лишь единственный ненулевой член $\mu\frac{Dx}{x}$, соответствующий полиному $P_k \equiv x$.

Действительно, воспользуемся теми же рассуждениями, как и в случае логарифмического расширения. В случае экспоненциального расширения полином DL_j имеет общий множитель с полиномом L_j, только если $L_j = x$ (см. лемму 3.5). Поэтому от суммы $\sum D\left(\frac{Q_{jm}}{L_j^m}\right)$ могли бы остаться лишь члены $\sum D\left(\frac{a_m}{x^m}\right)$, где $a_m \in K$, а от суммы $\sum \mu_k \frac{DP_k}{P_k}$ лишь член $\mu\frac{Dx}{x}$. Однако, по определению, значение рациональной функции $\mu\frac{Dx}{x}$ на элементе t равно $\mu a' \in K$. Поэтому производная $D(Q_0 + \sum \frac{a_m}{x^m})$ лежит в поле K. По лемме 3.7 это возможно, лишь если не имеющий свободного члена полином Лорана $Q_0 + \sum \frac{a_m}{t^m}$ тождественно равен нулю. Имеем

$$f = \sum \lambda_m \frac{A'_m}{A_m} + (\mu a + A)'.$$

В случае экспоненциального расширения $K \subset F_1$ индукционный шаг сделан.

Теорема Лиувилля об интегралах доказана.

§4. Неэлементарность абелевых интегралов

Если риманова поверхность алгебраической функции имеет нулевой род, то ее интеграл всегда берется в обобщенных элементарных функциях. Если же род римановой поверхности положителен, то интеграл, как правило, не элементарен и берется в обобщенных элементарных функциях в исключительных случаях. Эти исключительные случаи обсуждаются в настоящем параграфе.

Теорема 4.1 (Лиувилля об абелевых интегралах). *Неопределенный интеграл y от алгебраической функции A комплексной переменной x берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он представим в виде*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} A(x)\mathrm{d}x = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln A_i(x),$$

где A_i при $i = 0, 1 \ldots, k$ — алгебраические функции, однозначные на римановой поверхности W подынтегральной функции A.

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы Лиувилля об интегралах элементарных функций, примененной к полю F всех мероморфных функций на поверхности W, снабженному следующим дифференцированием: $f' = \mathrm{d}f/\alpha$, где $\alpha = \pi^*\mathrm{d}x$ и $\pi\colon W \to \overline{C}$ — естественная проекция римановой поверхности функции A на сферу Римана $\overline{C}$ комплексного переменного x.

Определим класс *обобщенно элементарных функций на римановой поверхности W* как класс многозначных функций, которые получаются из мероморфных функций на W при помощи арифметических операций, решения алгебраических уравнений и суперпозиций с функциями ln и exp. Пусть $\pi\colon W \to \overline{C}$ — любое непостоянное мероморфное отображение поверхности W на сферу Римана $\overline{C}$ переменной x. Как видно из определений, *обобщенно элементарная функция на римановой поверности W — это функция вида $\pi^* f$, где f — обобщенно элементарная функция переменной x.* Переформулируем теорему 4.1 в более инвариантном виде.

Теорема Лиувилля об абелевых интегралах. *Неопределенный интеграл от мероморфной формы α на компактной римановой поверхности W является обобщенно элементарной функцией на W, если и только если форма α представима в виде: $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta = \mathrm{d}A_0$; $\gamma = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$; $A_0, \ldots, A_k$ — мероморфные функции и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — комплексные числа.*

В связи с теоремой Лиувилля об абелевых интегралах естественно рассмотреть формулируемые ниже задачи 1 и 2, первая из которых связана с теоремой Римана–Роха, а вторая — с теоремой Абеля.

Задача 1. Представить мероморфную форму α на W в виде $\alpha = \beta + \alpha_1$, где $\beta = \mathrm{d}A_0$ — точная мероморфная форма, а форма α_1 имеет полюса не выше первого порядка.

Лемма 4.2. *Если мероморфная форма β на поверхности W имеет полюса не выше первого порядка и задает нулевой класс когомологий на $W \setminus P$, где P — конечное множество, содержащее полюса формы β, то форма β тождественно равна нулю.*

Доказательство. Форма β имеет лишь нулевые вычеты, иначе она не может быть точной. Поэтому она вообще не имеет полюсов, и ее интеграл A_0 является голоморфной функцией на W. Голоморфная функция на компактной поверхности постоянна. Поэтому $\beta = \mathrm{d}A_0 = 0$.

Следствие 4.3. *Если задача 1 для формы α разрешима, то она имеет не более одного решения.*

Пусть $O \subset W$ — множество полюсов формы α. Около каждого полюса $x \in O$ фиксируем локальную координату z, такую, что $z(x) = 0$. Пусть форма α около точки x записывается в виде

$$\alpha = \left(\frac{c_k}{z^k} + \cdots + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_1}{z} + \varphi\right)\mathrm{d}z,$$

где φ — росток голоморфной функции в точке x. Росток $\left(\frac{c_k}{z^k}+\dots+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_1}{z}\right)\mathrm{d}z$ называется *главной частью* формы α около точки x (главная часть зависит от выбора локальной координаты z). По теореме Римана–Роха существуют формы α с произвольно заданными главными частями.

Росток мероморфной функции в полюсе x формы α

$$A_{0x}=\left(\frac{(-k+1)c_k}{z^{k-1}}+\dots+\frac{(-1)c_2}{z}\right)$$

назовем *главной частью мероморфной составляющей интеграла формы* α в точке x. Росток A_{0x} обладает следующим свойством: форма $\alpha-\mathrm{d}A_{0x}$ в точке x имеет полюс не выше первого порядка. Это свойство определяет росток A_{0x} с точностью до прибавления ростка голоморфной функции.

Условие разрешимости задачи 1. *Задача 1 для формы α разрешима, если и только если для набора A_{0x} главных частей мероморфных составляющих интеграла формы α в ее полюсах $x\in O$ и для всякой голоморфной формы ω на W выполнено соотношение $\sum\operatorname{res}_x(A_{0x}\omega)=0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha=\beta+\alpha_1$ и $\beta=\mathrm{d}A_0$. Для всякой голоморфной формы ω сумма вычетов формы $A_0\omega$ равна нулю, так как W — компактная риманова поверхность. Отсюда и вытекает нужное равенство. Обратно, если $\sum\operatorname{res}_x(A_{0x}\omega)=0$ для любой голоморфной формы ω, то по теореме Римана–Роха существует мероморфная функция A_0, имеющая полюса лишь в точках $x\in O$ и такая, что для каждой точки $x\in O$ росток A_0-A_{0x} голоморфен. Очевидно, что форма $\alpha-\mathrm{d}A_0$ имеет лишь полюса не выше первого порядка.

На кривой рода нуль не существует ненулевых голоморфных форм, и задача 1 всегда разрешима. На кривой положительного рода задача 1, как правило, не разрешима.

Задача 2. 1) Для заданной мероморфной формы α на поверхности W найти форму γ, имеющую те же вычеты, что и форма α, и являющуюся линейной комбинацией дифференциалов логарифмов мероморфных функций. 2) Если искомая форма γ существует, преставить ее в виде суммы $\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции на W, содержащей наименьшее возможное число слагаемых n.

Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x\alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha: P\to\mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x\in P$ вычет $\operatorname{res}_x\alpha$. С функцией $\operatorname{res}\alpha$ свяжем векторное пространство $V(\operatorname{res}\alpha)\subset\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{Q}$, порожденное значениями функции $\operatorname{res}\alpha$.

Лемма 4.4. *Пусть сумма $\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ является решением пункта 2) задачи 2 для формы α. Тогда: 1) числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ лежат в пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$ и*

образуют его базис, 2) носители дивизоров (A_i) функции A_i при $i = 1, \dots, n$ лежат в множестве P.

Доказательство. Согласно лемме 3.4, если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ зависимы над Q, то число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить (выбрав другой набор мероморфных функций), что противоречит условию. Если x — нуль или полюс одной из функций $A_1, \dots, A_n$, то вычет формы $\sum \lambda_i \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ в точке x не равен нулю, т.к. он является нетривиальной целочисленной линейной комбинацией чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Поэтому $x \in P$.

Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$. Покажем, что функции φ_i на множестве P линейно независимы. Действительно, из существования линейного соотношения $\sum \mu_i \varphi_i = 0$ вытекает, что форма $\omega = \sum \mu_i \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ голоморфна на W. Покажем, что форма ω равна нулю. Представим ω как линейную комбинацию минимально возможного числа дифференциалов логарифмов мероморфных функции. Как мы только что показали, носители дивизоров этих мероморфных функций должны содержаться в множестве полюсов формы ω, т.е. дивизоры этих функций равны нулю и, поэтому $\omega \equiv 0$. Следовательно, формы $\dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ линейно зависимы и число слагаемых в представлении формы γ можно уменьшить, что противоречит предположению. Мы доказали, что функции φ_i независимы.

Покажем, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Действительно, форма $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т.е. $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$ при $x \in P$. Так как φ_i — независимые целочисленные функции, то числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются линейными комбинациями с рациональными коэффициентами значений функции $\operatorname{res}\alpha$, т.е. они лежат в векторном пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ независимы над $\mathbb{Q}$. Они порождают пространство $V(\operatorname{res}\alpha)$, так как $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$.

Следствие 4.5. *Если для формы α задача 2 разрешима, то существует единственная форма γ, удовлетворяюшая пункту 1) этой задачи.*

Доказательство. Если есть две формы, удовлетворяющие пункту 1) задачи 2, то все вычеты разности этих форм равны нулю. Повторяя рассуждение из доказательства леммы 4.4, получим что разность форм равна нулю.

Следствие 4.6. *Если для формы α задача 2 разрешима, то число слагаемых в решении пункта 2) задачи 2 для формы γ равно размерности простанства $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$.*

Скажем, что дивизор $D = \sum r_i x_i$, $x_i \in W$, с рациональными коэффициентами $r_i = \dfrac{p_i}{g_i}$, имеющий степень нуль $\sum r_i = 0$, *почти главный*, если существует натуральное число N, такое, что дивизор ND — главный,

т.е. $ND = (A)$, где (A) — дивизор некоторой мероморфной функции A. Перефразируем это определение. Пусть k — наименьшее общее кратное знаменателей q_i коэффициентов r_i дивизора D. Дивизор $D = \sum r_i x_i$ с рациональными коэффициентами почти главный, если дивизор kD с целыми коэффициентами имеет конечный порядок в якобиане кривой W.

Утверждение 4.7. *1) Сумма почти главных дивизоров — почти главный дивизор. 2) Произведение почти главного дивизора на рациональное число — почти главный дивизор.*

Доказательство. 1) Если $N_1 D_1 = (A_1)$ и $N_2 D_2 = (A_2)$, то $(N_1 N_2)(D_1 + D_2) = (A_1^{N_2} A_2^{N_1})$. 2) Если $ND = (A)$ и $r = p/q$, то $Nq(rD) = (A^p)$.

Для конечного множества P точек компактной римановой поверхности обозначим через $J_0(P)$ множество функций $\psi : P \to \mathbb{Q}$, принимающих рациональные значения и таких, что дивизор $D_\psi = \sum\limits_{x \in P} \psi(x) x$ почти главный. По только что доказанному утверждению функции множества $J_0(P)$ образуют векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Простанство $J_0(P)$ содержит решетку $\bar{J}_0(P)$ функций, соответствующих главным дивизорам. Пространство $J_0(P)$ порождается решеткой $\bar{J}_0(P)$ над рациональными числами.

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимоети задачи 2. Пусть P — множество точек x, в которых вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ формы α не равен нулю. На множестве P определена функция $\operatorname{res}\alpha : P \to \mathbb{C}^*$, сопоставляющая точке $x \in P$ вычет $\operatorname{res}_x \alpha$. Выше мы связали с функцией $\operatorname{res}\alpha$ пространство $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на значения функции $\operatorname{res}\alpha$. Определим теперь еще одно простанство $F(\operatorname{res}\alpha)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — базис простанства $V(\operatorname{res}\alpha)$ над полем $\mathbb{Q}$. Рассмотрим координатные функции $\phi_i : P \to \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$, определенные тождеством $\operatorname{res}_x \alpha = \sum \phi_i(x) \lambda_i$. *Пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ — это векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, натянутое на функции $\phi_1, \ldots, \phi_n$.* Определение пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ корректно. Действительно, если $u_1, \ldots, u_n$ — другой базис простанства $V(\operatorname{res}\alpha)$ и $\lambda_i = \sum a_{i,j} u_j$, где $\{a_{i,j}\}$ — обратимая $n \times n$ матрица с рациональными компонентами. Тогда $\operatorname{res}\alpha \equiv \sum \rho_j u_j$, где $\rho_j = \sum a_{i,j} \phi_i$. Поэтому пространство над полем $\mathbb{Q}$, натятутое на функции ρ_j, содержится в пространстве над полем $\mathbb{Q}$, натянутом на функции ϕ_j. Обратное включение доказывается так же.

Утверждение 4.8. *Для каждой функции $\phi : P \to \mathbb{Q}$ из пространства $F(\operatorname{res}\alpha)$ справедливо равенство* $\sum\limits_{x \in P} \phi(x) = 0$.

Доказательво. Сумма вычетов формы α равна нулю. Вычет $\operatorname{res}_x \alpha$ можно рассматривать как вектор из пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. Если сумма векторов равна нулю, то при любом выборе базиса $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для всякого $1 \le i \le n$ сумма i-х координат этих векторов тоже равна нулю.

Условие разрешимости задачи 2. *Задача 2 для формы α разрешима, если и только если простанство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в простанстве $J_0(P)$.*

Доказательство. Пусть задача 2 разрешима и сумма $\sum \lambda_i \frac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$, имеющая те же вычеты, что и форма α, содержит минимально возможное число членов. Рассмотрим целочисленные функции φ_i на множестве P, сопоставляющие точке $x \in P$ порядок функции A_i в этой точке, $\varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \frac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$. Форма $\gamma = \sum \lambda_i \frac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α, т.е. $\sum \lambda_i \varphi_i(x) = \operatorname{res}_x \alpha$. По лемме 3.4 числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ образуют базис векторного пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Поэтому пространство $F(\operatorname{res}\alpha)$ порождено функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Эти фунции лежат в пространстве $J_0(P)$, т.к. дивизоры $D_i = \sum \varphi_i(x)x$ являются дивизорами функций A_i.

Пусть простанство $F(\operatorname{res}\alpha)$ содержится в простанстве $J_0(P)$. Выберем базис $\mu_1, \ldots, \mu_n$ пространства $V(\operatorname{res}\alpha)$. По условию функция $\operatorname{res}\alpha$ представима в виде $\operatorname{res}\alpha = \sum \mu_i \rho_i$, где функции ρ_i лежат в пространстве $J_0(P)$. Это означает что для каждого i существует натуральное число N_i и мероморфная фукция B_i, такие, что значение функции $N_i\rho_i$ в точке $x \in P$ равно вычету в этой точке функции $\frac{\mathrm{d}B_i}{B_i}$. Откуда следует, что форма $\sum \frac{\mu_i}{N_i} \frac{\mathrm{d}B_i}{B_i}$ имеет те же вычеты, что и форма α.

Итак, согласно доказанному условию, задача 2 разрешима, если и только если любой дивизор из конечного числа явно построенных дивизоров степени нуль после умножения на подходящее целое число становится главным. Теорема Абеля доставляет описание главных дивизоров. Поэтому вопрос о разрешимости задачи 2 в принципе сводится к теореме Абеля.

Замечание. Является ли заданный дивизор на алгебраической кривой главным или почти главным? Этот вопрос может оказаться очень сложным, так как теорема Абеля неконструктивна (см. [Дав]). Абель столкнулся с этой проблемой в своей работе об интегрируемости в элементарных функциях псевдогиперэллиптических интегралов. Работа Абеля была закончена Золотаревым (см. [Чеб]).

Пример 1. Пусть W — кривая рода один. Фиксируем структуру алгебраической абелевой группы на W, задав точку $* \in W$, являющуюся нулевым элементом группы. Рассмотрим всюду плотное множество F на кривой W, состоящее из элементов конечного порядка группы W. Задача 2 разрешима для любой формы α, для которой множество P содержится в F.

Обсудим противоположную ситуацию. Скажем, что конечное множество F на кривой положительного рода является *общим подмножеством*, если не существует ни одного ненулевого главного дивизора D, носитель которого лежит в множестве F. Из теоремы Абеля видно, что среди подмножеств с фиксированным числом точек на кривой положительного рода, множество общих подмножеств имеет полную меру.

Пример 2. Пусть W — кривая положительного рода и F — общее подмножество на ней. Задача 2 неразрешима для любой формы α, для которой

множество P непусто и содержится в F.

Теорема 4.9. *Первообразная мероморфной формы α обобщенно элементарна, если и только если для формы α разрешимы задачи 1 и 2 и форма α равна сумме решений этих задач, т.е. $\alpha = \beta + \gamma$, где β — решение задачи 1 для формы α и γ — решение задачи 2 для формы α.*

Доказательство. Если неопределенный интеграл от формы α является обобщенно элементарной функцией, то по теореме Лиувилля для формы α разрешимы задачи 1 и 2 и форма α равна сумме решений этих задач. В обратную сторону теорема очевидна.

Следствие 4.10. *Пусть для мероморфной формы α на кривой положительного рода множество точек P, в которых вычет формы α не равен нулю, является общим подмножеством кривой. Тогда неопределенный интеграл от формы α не может быть обобщенно элементарной функцией.*

Пусть P — фиксированное конечное подмножество на компактой кривой W. Обозначим через $\bar{\Omega}_P$ пространство мероморфных 1-форм на кривой W, вычеты которых в каждой точке множества $W \setminus P$ равны нулю. *Каждая форма $\alpha \in \bar{\Omega}_P$ задает* следующий *класс одномерных когомологий $[\alpha]$ множества $W \setminus P$*: значение $[\alpha](\gamma)$ класса $[\alpha]$ на 1-цикле γ равняется $\int\limits_{\bar{\gamma}} \alpha$, где $\bar{\gamma}$ — 1-цикл, не проходящий через полюса формы α, гомологичный циклу γ в области $W \setminus P$. От выбора 1-цикла $\bar{\gamma}$ интеграл не зависит, т.к. по условию, вычет формы α в каждом полюсе, лежащем в $W \setminus P$, равен нулю.

Пусть $D = (f)$ — главный дивизор на кривой W, носитель которого содержится в множестве P. С дивизором D связан целочисленный класс когомологий $[D]$ пространства $W \setminus P$, заданный 1-формой $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\mathrm{d}f}{f}$ (функция f определяется дивизором D с точностью до константы, от выбора которой 1-форма не зависит). Обозначим через $L(P)$ комплексно-линейное подпространство в одномерных когомологиях дополнения $W \setminus P$ множества P, порожденное целочисленными классами $[D]$ главных дивизоров D, носители которых лежат в множестве P (такие дивизоры соответствуют точкам решетки $\bar{J}_0(P)$).

Теорема 4.11. *Первообразная мероморфной формы α на кривой W, принадлежащей пространству $\bar{\Omega}_P$, является обобщенно элементарной функцией, если и только если класс когомологий $[\alpha] \in H^1(W \setminus P)$ лежит в пространстве $L(P)$.*

Доказательство. Если класс $[\alpha]$ лежит в пространстве $L(D)$, то форма α на множестве $W \setminus P$ задает тот же класс когомологий, что и некоторая форма $\gamma = \sum \lambda_i \dfrac{\mathrm{d}A_i}{A_i}$, где A_i — мероморфные функции, носители дивизоров которых лежит в множестве P. Форма $\beta = \alpha - \gamma$ задает нулевой класс когомологий на $W \setminus P$. Поэтому неопределенный интеграл формы β является однозначной функцией на $W \setminus P$. Этот интеграл имеет полиномиальный рост около полюсов формы β и является, следовательно, мероморфной

функцией на кривой W. Обратное утверждение вытекает из теоремы Лиувилля.

Приведем несколько следствий доказанных теорем. Прежде всего отметим следующее топологическое препятствие к элементарности интеграла алгебраической 1-формы.

Следствие 4.12. *Если на кривой W первообразная мероморфной формы α, принадлежащей пространству $\bar{\Omega}_P$, является обобщенно элементарной функцией, то умноженное на $\dfrac{1}{2\pi i}$ значение класса когомологий $[\alpha]$ на любом 1-цикле $\gamma \in H_1(W \setminus P, \mathbb{Z})$ лежит в пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$.*

Доказательство. Действительно, если интеграл формы α элементарен, то $\alpha = dA_0 + \sum \lambda_i \dfrac{dA_i}{A_i}$ и числа λ_i лежат в пространстве $V(\operatorname{res}\alpha)$. Периоды формы dA_0 равны нулю, а периоды форм $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dA_i}{A_i}$ целочислены.

Следствие 4.13 (ср. [Чеб]). *Если все вычеты мероморфной формы α на компактной римановой поверхности W равны нулю, то неопределенный интеграл от α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если он однозначен на W.*

Доказательство. Интеграл мероморфной формы имеет полиномиальный рост около полюсов формы. Поэтому если интеграл однозначен, он является мероморфной функцией. В другую сторону утверждение вытекает из предыдущего следствия.

Следствие 4.14 (ср. [Чеб]). *Интеграл от ненулевой голоморфной формы никогда не берется в обобщенных элементарных функциях. Например, эллиптический интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{P(t)}}$, где P — кубический полином без кратных корней, не элементарен.*

Доказательство. Интеграл от голоморфной формы однозначен если и только если она равна нулю.

Утверждение 4.15. *Пусть форма α имеет полюса не выше первого порядка и все ее вычеты рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если все периоды формы $\dfrac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Необходимость условия рациональности периодов вытекает из следствия 4.12 настоящего пункта. Проверим их достаточность. По условию, для некоторого натурального числа N все периоды формы $\dfrac{N\alpha}{2\pi i}$ являются целыми числами. Поэтому функция F, определенная равенством $F(x) = \exp \int\limits_{x_0}^{x} N\alpha$, является однозначной функцией на W. Функция F

мероморфна, т.к. форма α имеет лишь полюса первого порядка. Равенство $\int\limits_{x_0}^{x} \alpha = \frac{1}{N} \ln F(x) + c$ доказывает нужное утверждение.

Следствие 4.16. *Пусть все вычеты мероморфной формы α рациональны. Тогда неопределенный интеграл формы α берется в обобщенных элементарных функциях, если и только если для формы α разрешима задача 1 и все периоды формы $\frac{1}{2\pi i}\alpha$ рациональны.*

Доказательство. Так как задача 1 для формы α разрешима, существует мероморфная функция A_0, такая, что форма $(\alpha - \mathrm{d}A_0)$ имеет лишь полюсы 1-го порядка. Форма $(\alpha - \mathrm{d}A_0)$ имеет те же периоды, что и форма α, и к ней применимо утверждение 4.15.

§5. Критерий Лиувилля–Мордухай-Болтовского

Лиувиллю принадлежит первый результат о неразрешимости линейных дифференциальных уравнений в явном виде (см. [Ri], [Li3]).

Теорема 5.1 (Лиувилля). *Уравнение $y'' + py' + qy = 0$ с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно имеет решение вида $y_1(x) = \exp \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, где f — функция, удовлетворяющая алгебраическому уравнению с коэффициентами в поле K.*

В одну сторону теорема очевидна. Если известно одно решение y_1 линейного дифференциального уравнения второго порядка, то его можно решить, понизив порядок уравнения. Доказать теорему в другую сторону достаточно трудно.

Потребовалось более полувека, чтобы обобщить теорему Лиувилля на уравнения n-го порядка. Мордухай-Болтовский доказал в 1910 году методом Лиувилля следующий критерий, позволяющий сводить вопрос о разрешимости уравнения к вопросу о разрешимости другого уравнения меньшего порядка.

Критерий Лиувилля–Мордухай-Болтовского. *Уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

с коэффициентами из функционального дифференциального поля K, все элементы которого представимы в обобщенных квадратурах, решается в обобщенных квадратурах, если и только если оно, во-первых, имеет решение вида $y_1(x) = \exp \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, где f — функция, лежащая в некотором алгебраическом расширении K_1 поля K, и, во-вторых, если дифференциальное уравнение $(n-1)$ порядка на функцию $z = y' - \frac{y_1'}{y_1} y$ с коэффициентами из

поля K_1, полученное из исходного уравнения процедурой понижения порядка (см. п. 1.2 из главы 3), *решается в обобщенных квадратурах над полем K_1.*

В этом же 1910 году появилась теорема Пикара–Вессио, в которой вопрос о разрешимости линейных дифференциальных уравнений решается абсолютно по-другому, с точки зрения дифференциальной теории Галуа.

В третьей главе мы обсудим основные положения этой теории. Критерий Лиувилля–Мордухай-Болтовского, по существу, эквивалентен теореме Пикара–Вессио. Теория Пикара–Вессио не только объясняет этот критерий, но и дает возможность довести его до явного алгоритма, позволяющего для уравнения с коэффициентами из поля рациональных функций (имеющих рациональные коэффициенты) определить, разрешимо уравнение в обобщенных квадратурах или нет (см. [S2] и §7 главы 3).