

ГЕОМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ

А. В. Акопян

Москва
2011

Арсений Акопян. ГЕОМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ.

Эта книга представляет собой сборник теорем классической геометрии, сформулированных в виде картинок. Она предназначена для школьников старших классов, учителей, а также всех, кто интересуется элементарной геометрией.

Оформление обложки: *Мария Жилкина.*

Оглавление

1	Элементарные теоремы	6
2	Замечательные точки треугольника	9
3	Замечательные прямые	15
4	Элементы треугольника	18
4.1	Высоты в треугольнике	18
4.2	Ортоцентр треугольника	21
4.3	Биссектриса в треугольнике	23
4.4	Симедиана и её свойства	27
4.5	Вписанные окружности	29
4.6	Вписанная и описанная окружность треугольника	38
4.7	Касание описанной окружности треугольника	39
4.8	Окружности в треугольнике	42
4.9	Пересечение элементов треугольника в одной точке	50
4.10	Прямоугольные треугольники	55
4.11	Теоремы с участием фиксированных углов	55
4.12	Разные теоремы и задачи	57
5	Четырёхугольники	59
5.1	Параллелограммы	59
5.2	Трапеции	61
5.3	Квадраты	62
5.4	Описанные четырёхугольники	63
5.5	Вписанные четырёхугольники	66
5.6	Четыре точки на окружности	68
5.7	Высоты в четырёхугольнике	71
6	Окружности	73
6.1	Касающиеся окружности	73
6.2	Вокруг теоремы Монжа	75
6.3	Три окружности и общие касательные	79
6.4	Теорема о бабочке	81
6.5	Степень точки и связанные конструкции	82
6.6	Равные окружности	84
6.7	Диаметр окружности	84
6.8	Конструкции из окружностей	86
6.9	Окружности, касающиеся прямой	89
6.10	Разные задачи	90
7	Проективные теоремы	94
8	Правильные многоугольники	96

8.1	Замечательные свойства правильного треугольника	98
9	Надстройки	101
10	Теоремы о замыкании	104
11	Замечательные свойства конических сечений	110
11.1	Проективные свойства конических сечений	113
11.2	Коники, пересекающие треугольник	118
11.3	Замечательные свойства параболы	119
11.4	Замечательные свойства равносторонней гиперболы	121
12	Замечательные кривые	122
13	Комментарии	124

От автора

Эта книга представляет собой сборник теорем (или, скорее, фактов) классической геометрии, сформулированных в виде картинок.

Картинки нарисованы таким образом, что соответствующие им утверждения можно восстановить без помощи дополнительного текста.

Жирными линиям обычно обозначаются основополагающие объекты. Штрихованной линией отмечаются объекты, к которым относится утверждение. Центры окружностей, многоугольников, а также фокусы коник обозначаются дырявой точкой. Жирные линии в разделе про конические сечения обозначают директрисы соответствующих коник.

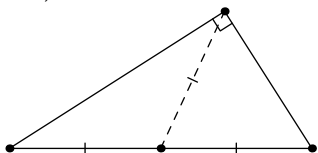
Авторство задач чаще всего установить очень трудно. В конце книги приведены комментарии, большинство из которых указывают на источник задачи. Часть задач была придумана автором при составлении этой подборки, но вполне вероятно, что эти задачи не являются новыми.

Я благодарен Дмитрию Швецову, Фёдору Петрову, Павлу Кожевникову и Илье Богданову за полезные замечания. Особенную признательность хочу выразить Михаилу Вялому за помощь в освоении системы METAPOST, в которой нарисованы все рисунки, кроме обложки — её подготовила замечательная Мария Жилкина.

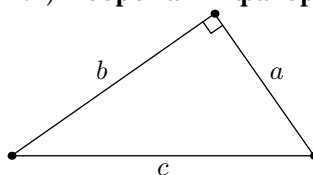
Обо всех ошибках, неточностях, замечаниях и предложениях прошу вас писать на arseny.akopyan@gmail.com.

1 Элементарные теоремы

1.1)



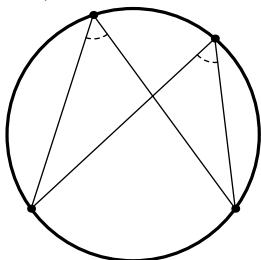
1.2) Теорема Пифагора



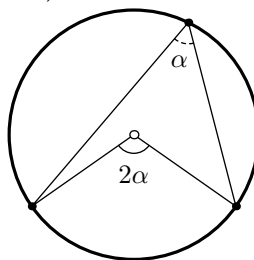
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема о вписанном угле

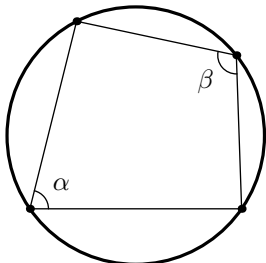
1.3)



1.4)

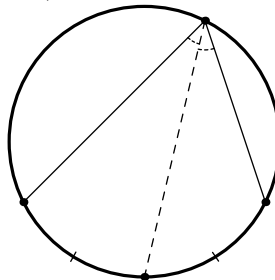


1.5)

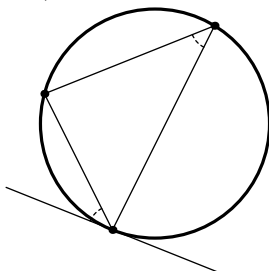


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

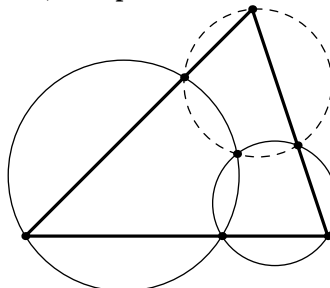
1.6)



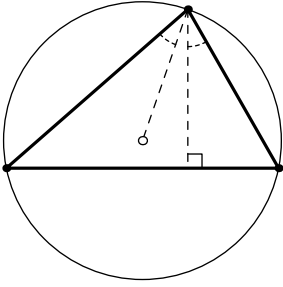
1.7)



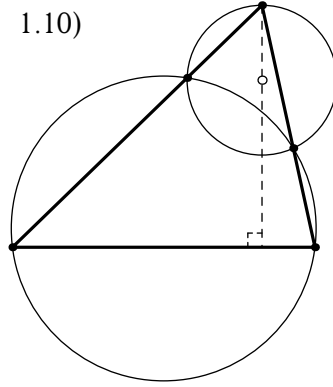
1.8) Теорема Микеля



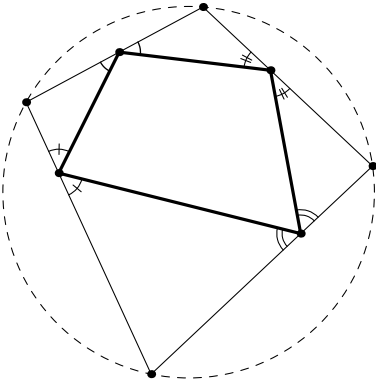
1.9)



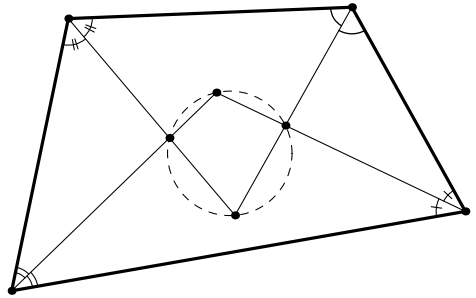
1.10)



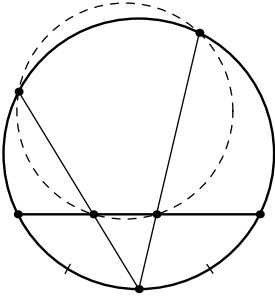
1.11)



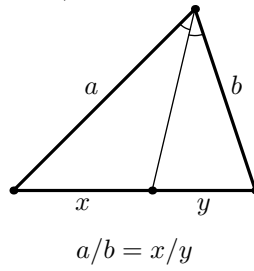
1.12)



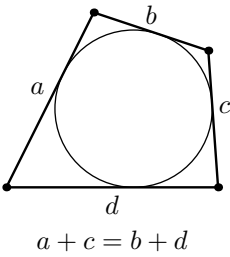
1.13)



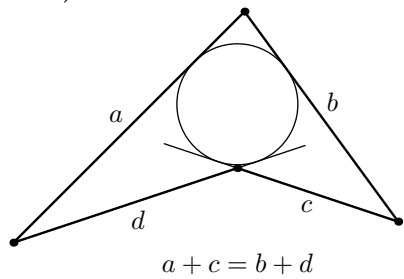
1.14)



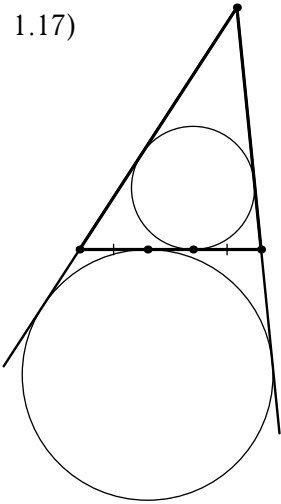
1.15)



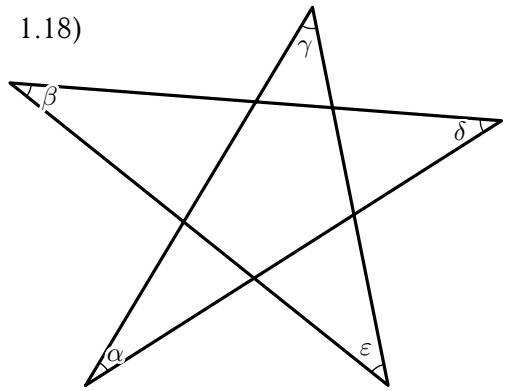
1.16)



1.17)

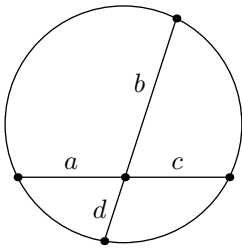


1.18)



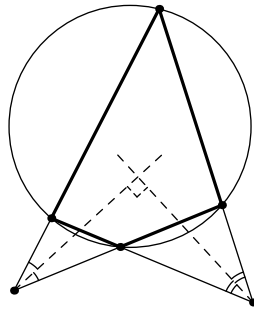
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 180^\circ$$

1.19)

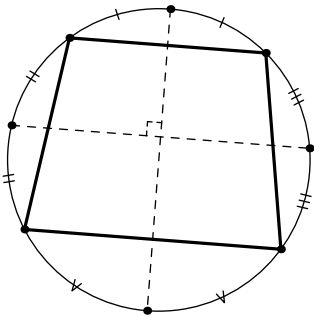


$$a \cdot c = b \cdot d$$

1.20)

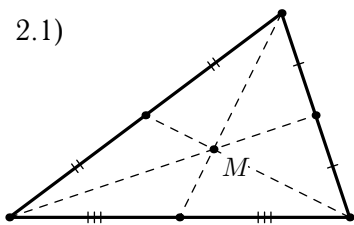


1.21)

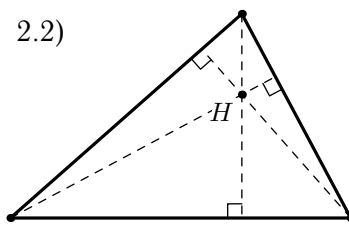


2 Замечательные точки треугольника

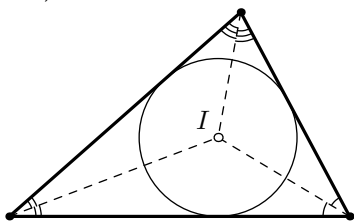
2.1)



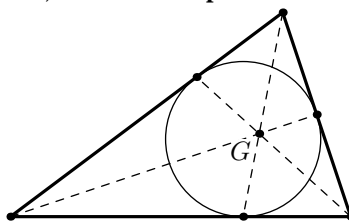
2.2)



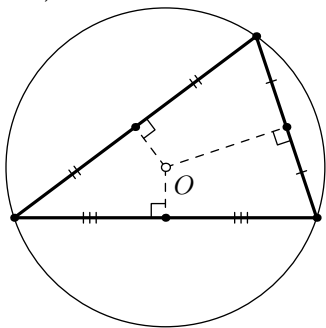
2.3)



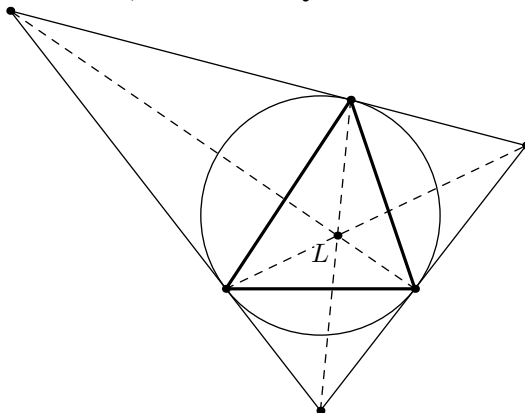
2.4) Точка Жергонна



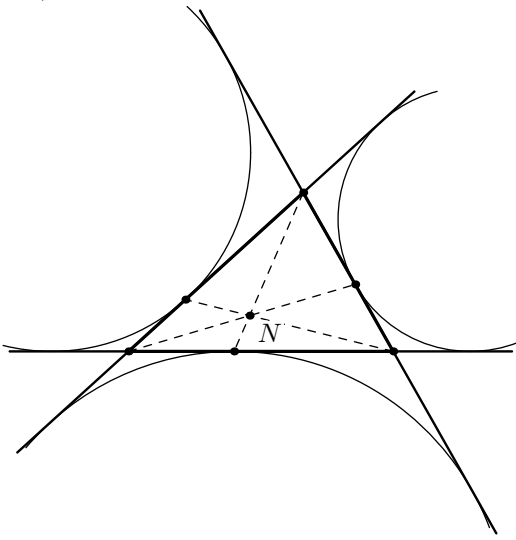
2.5)



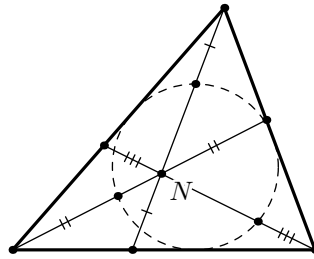
2.6) Точка Лемуана



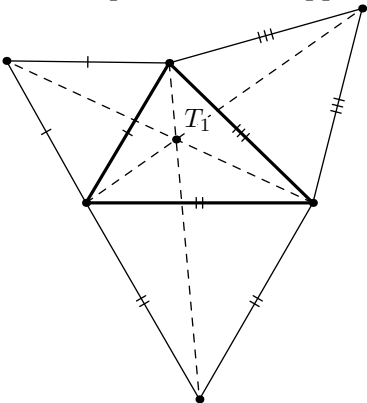
2.7) Точка Нагеля



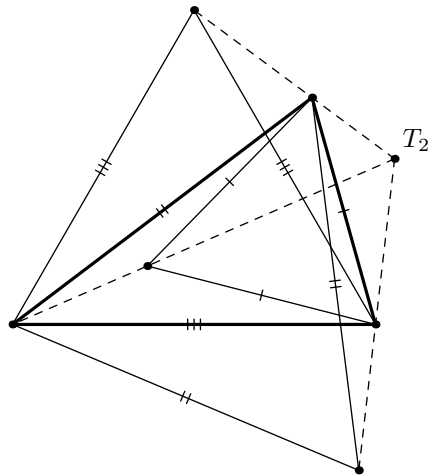
2.8)



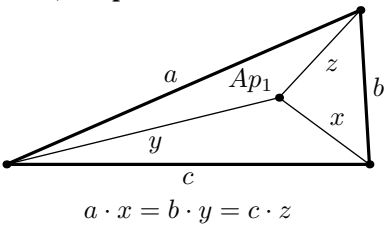
2.9) Первая точка Торричелли



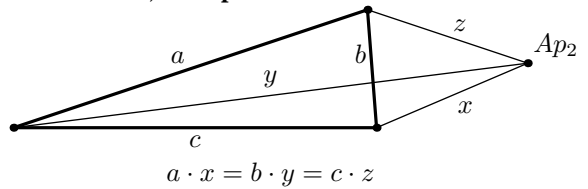
2.10) Вторая точка Торричелли



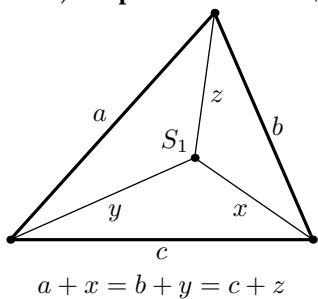
2.11) Первая точка Аполлония



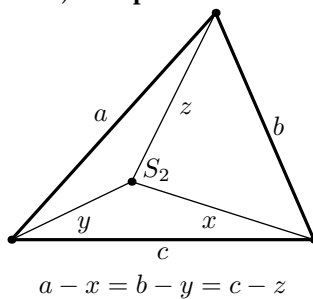
2.12) Вторая точка Аполлония



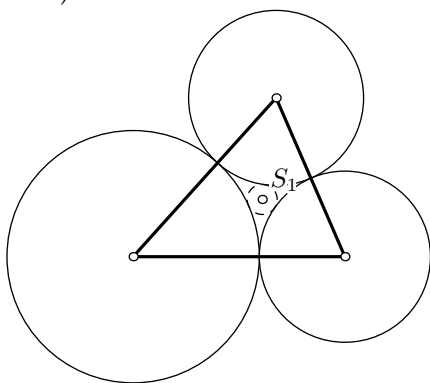
2.13) Первая точка Содди



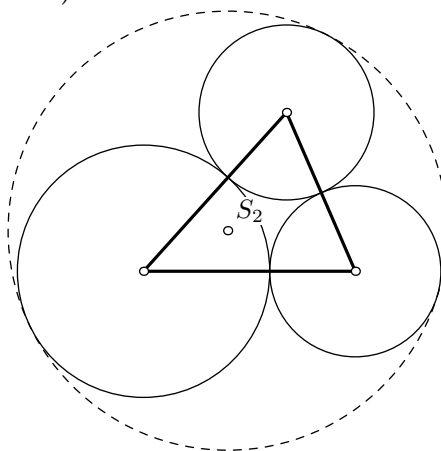
2.14) Вторая точка Содди



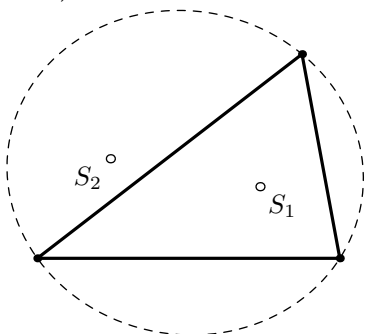
2.15)



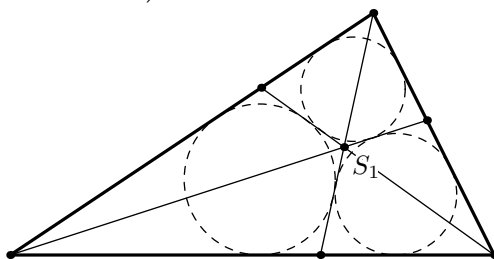
2.16)



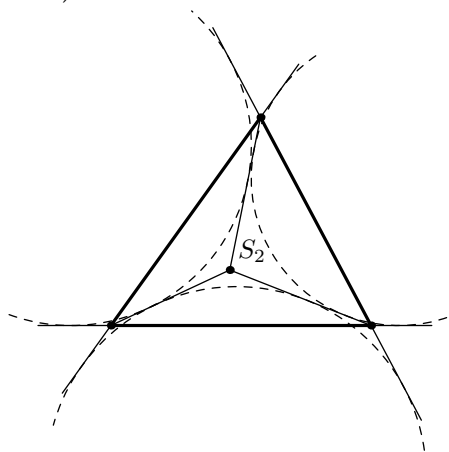
2.17)



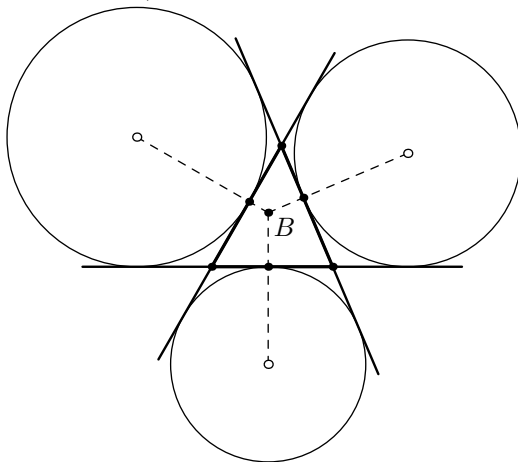
2.18)



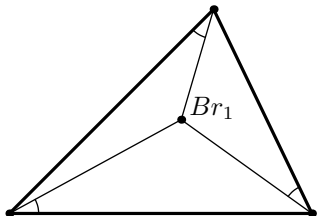
2.19)



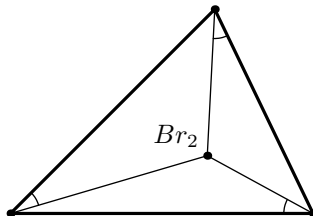
2.20) Точка Бевэна



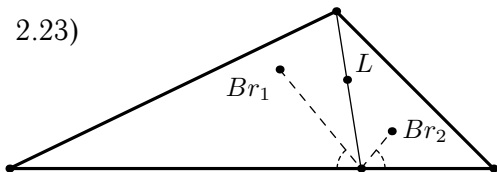
2.21) Первая точка Брокара



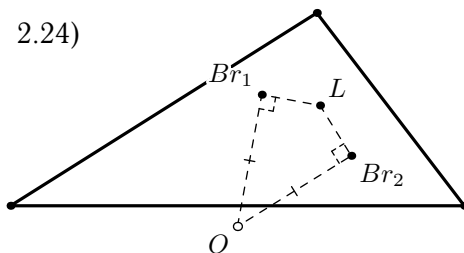
2.22) Вторая точка Брокара



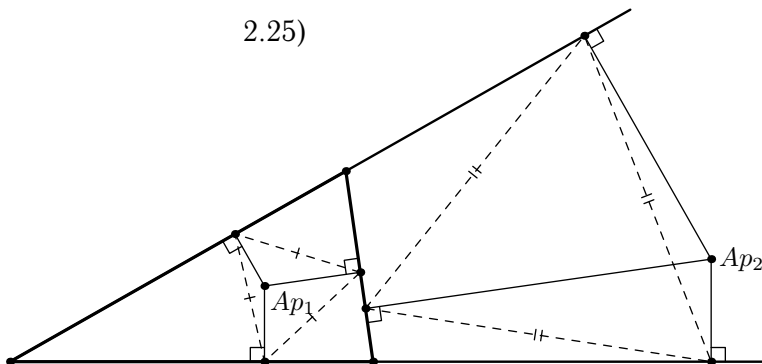
2.23)



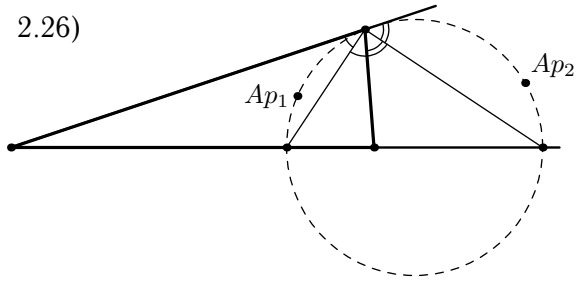
2.24)



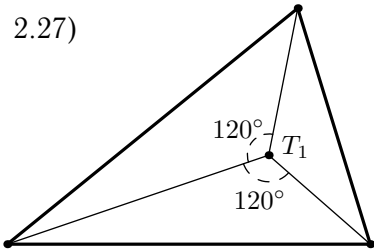
2.25)



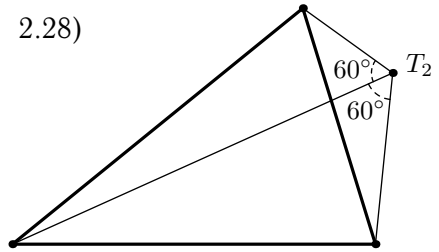
2.26)



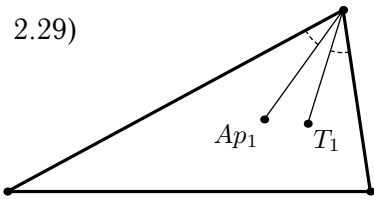
2.27)



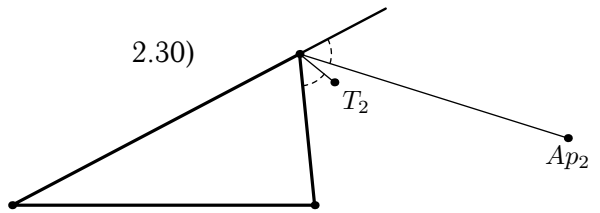
2.28)



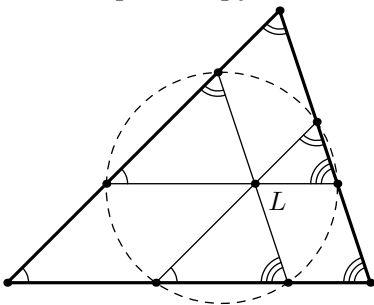
2.29)



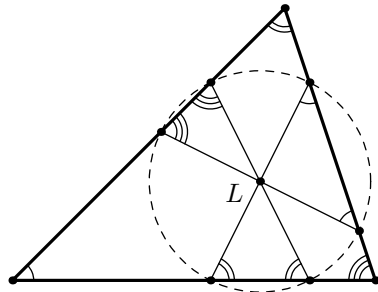
2.30)



2.31) Первая окружность Лемуана

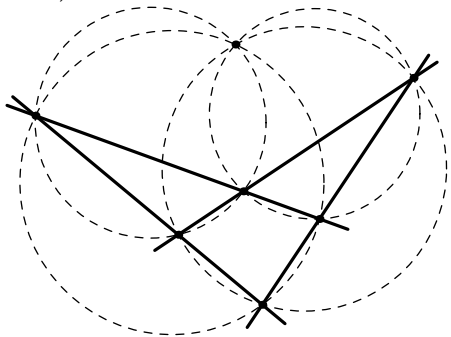


2.32) Вторая окружность Лемуана

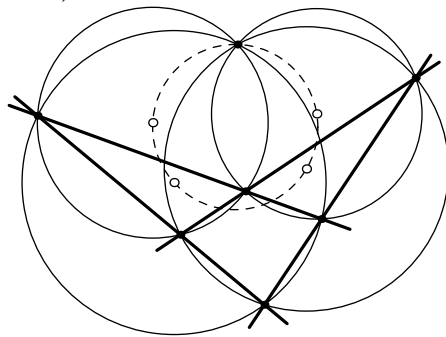


Точка Микеля и её свойства

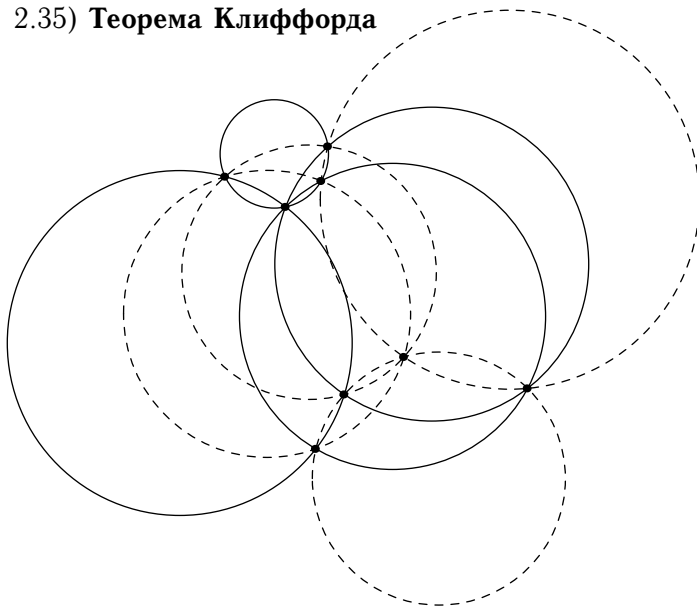
2.33) Точка Микеля



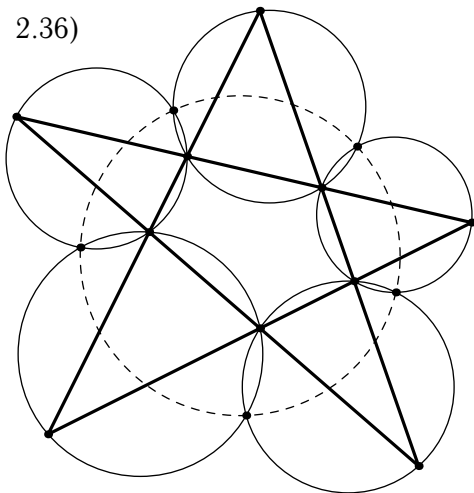
2.34)



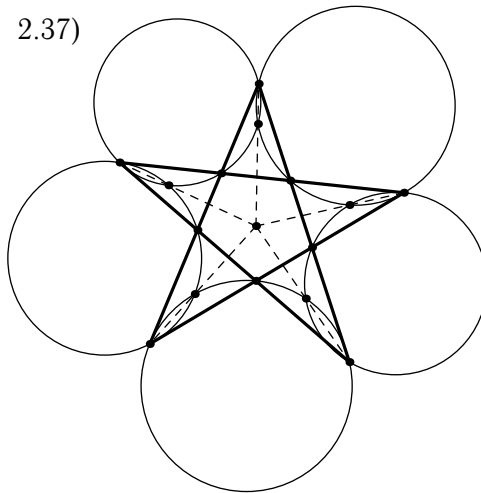
2.35) Теорема Клиффорда



2.36)

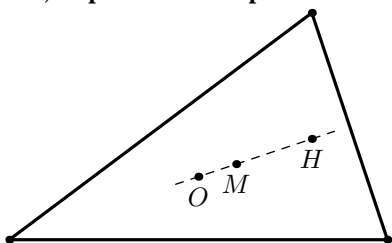


2.37)

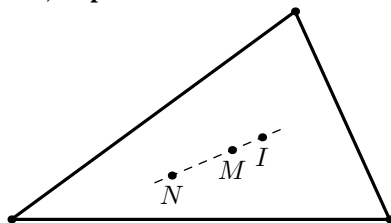


3 Замечательные прямые

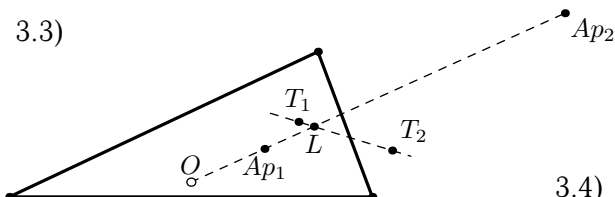
3.1) Прямая Эйлера



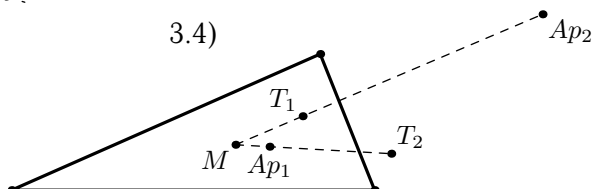
3.2) Прямая Нагеля



3.3)

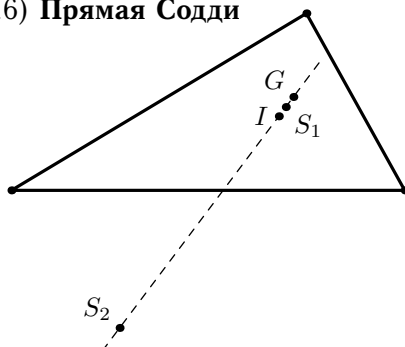
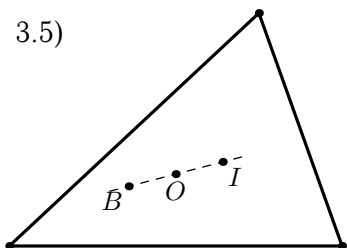


3.4)

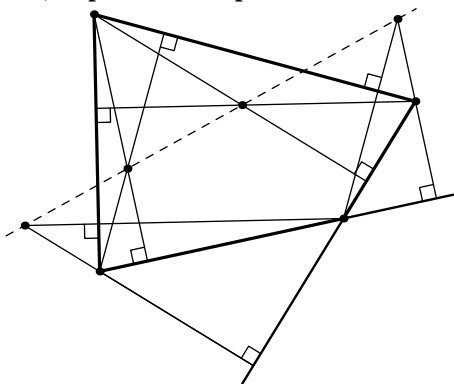


3.6) Прямая Соуди

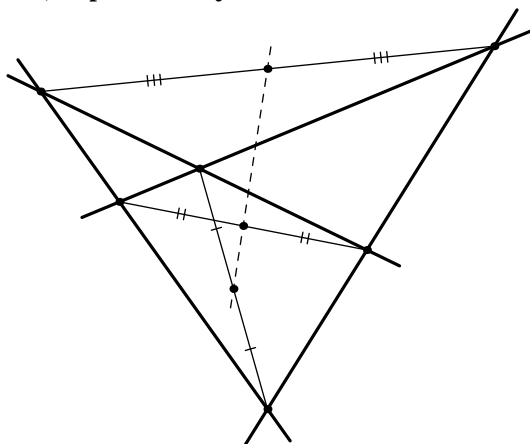
3.5)



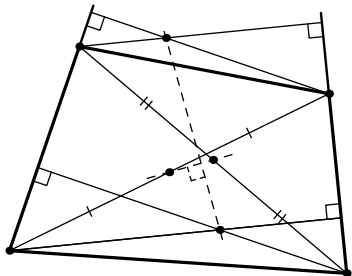
3.7) Прямая Обера



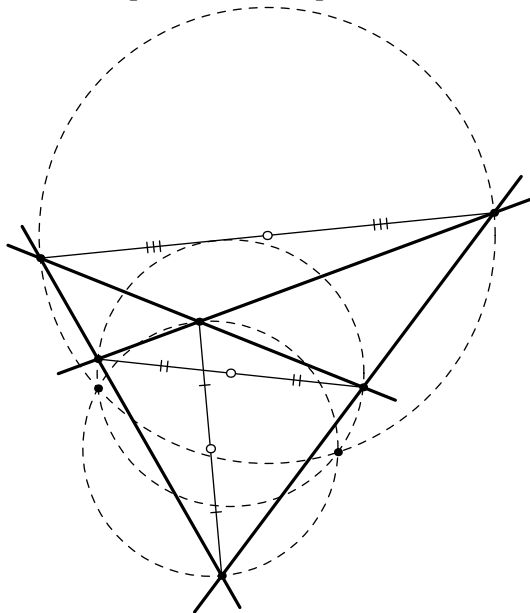
3.8) Прямая Гаусса



3.9)

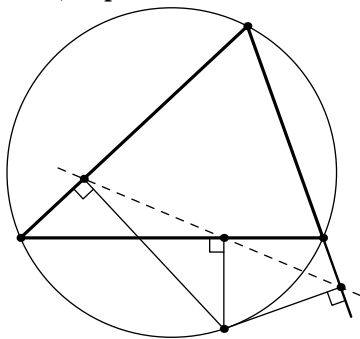


3.10) Теорема Плюккера

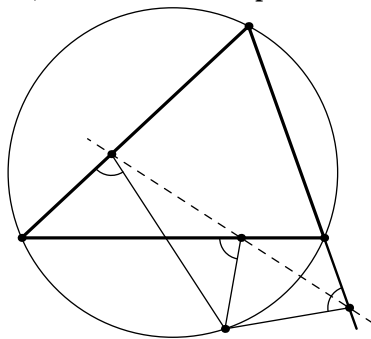


Прямая Симсона и её свойства

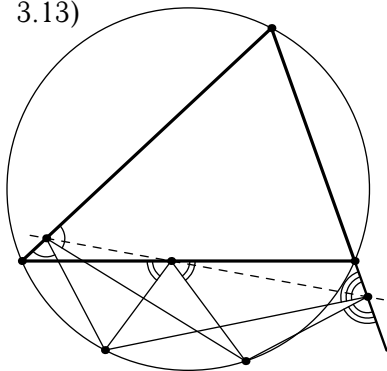
3.11) Прямая Симсона



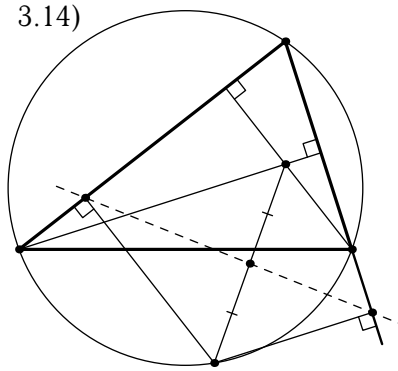
3.12) Обобщённая прямая Симсона



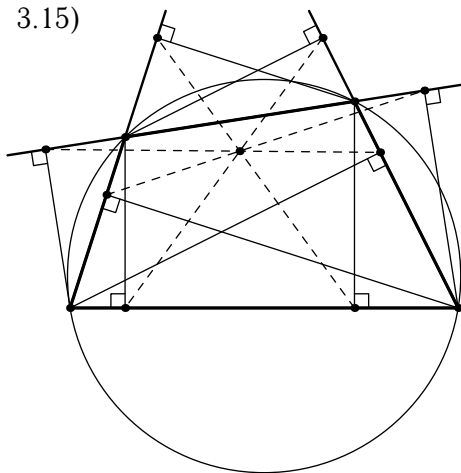
3.13)



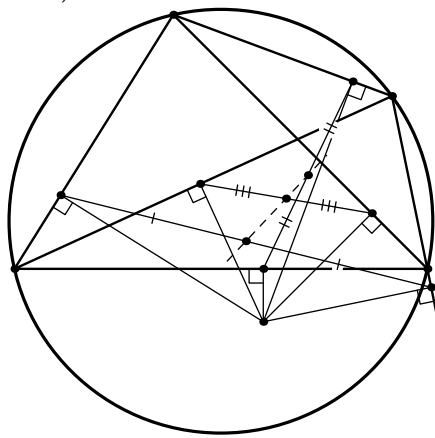
3.14)



3.15)



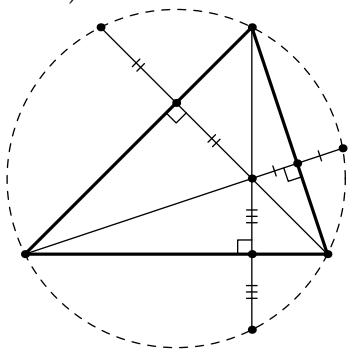
3.16)



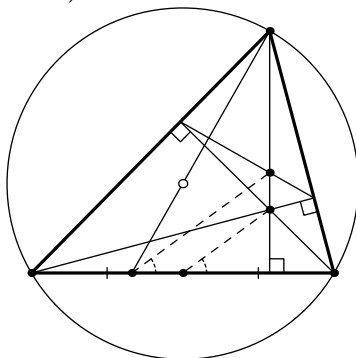
4 Элементы треугольника

4.1 Высоты в треугольнике

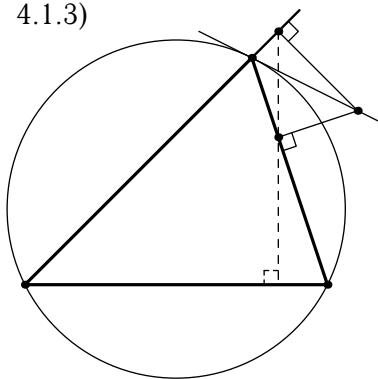
4.1.1)



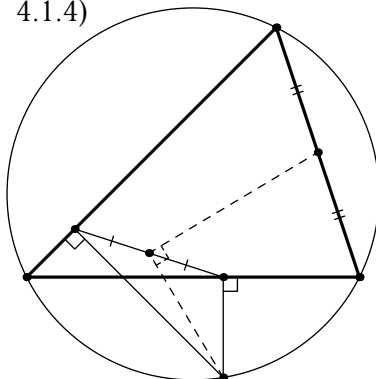
4.1.2)



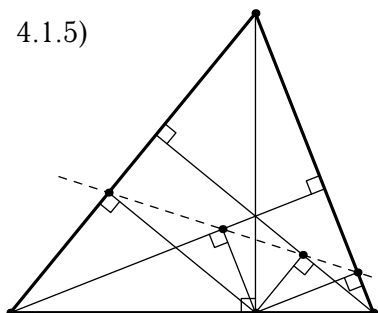
4.1.3)



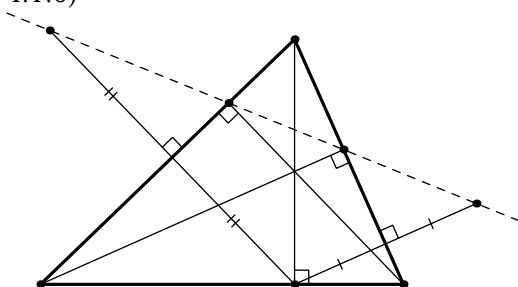
4.1.4)



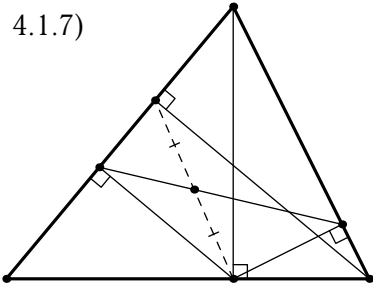
4.1.5)



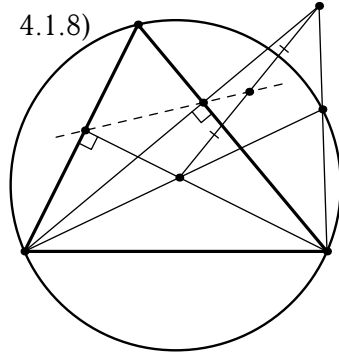
4.1.6)



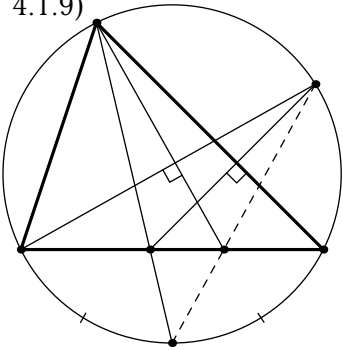
4.1.7)



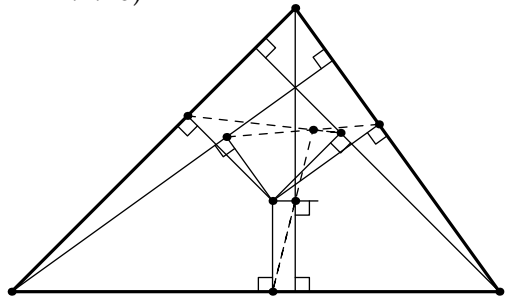
4.1.8)



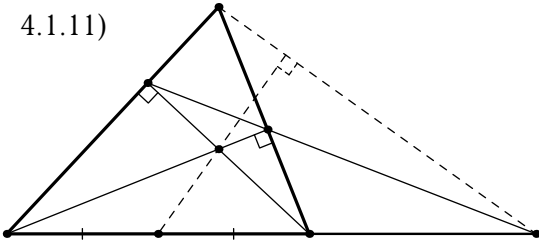
4.1.9)



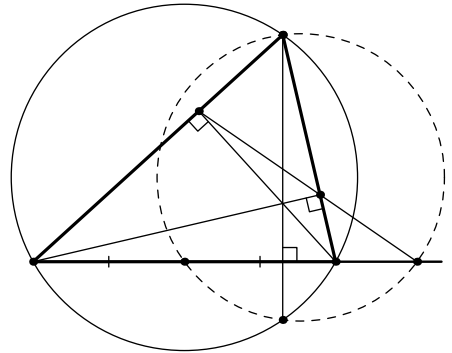
4.1.10)



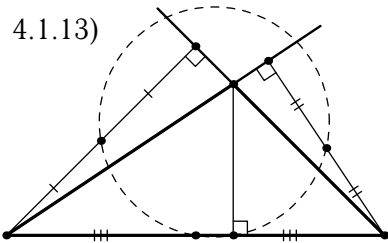
4.1.11)



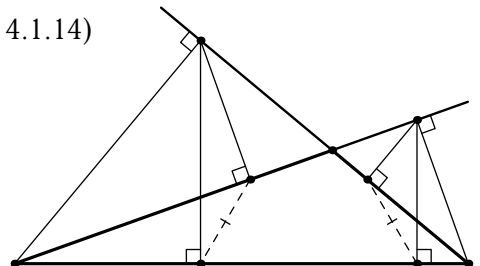
4.1.12)



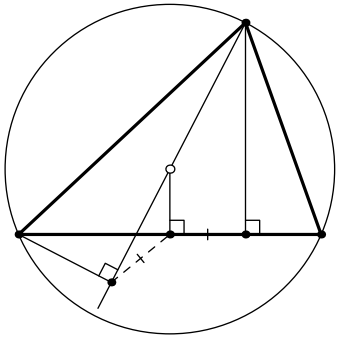
4.1.13)



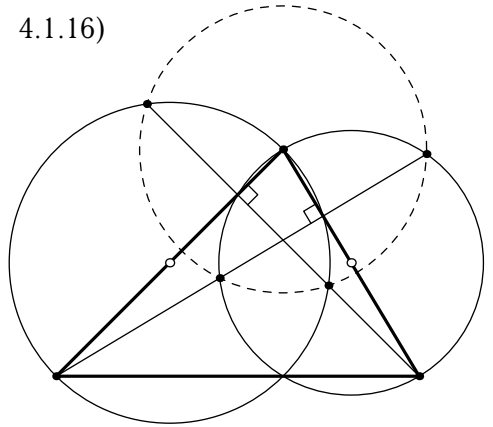
4.1.14)



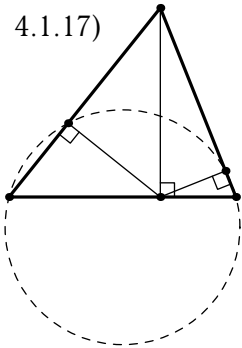
4.1.15)



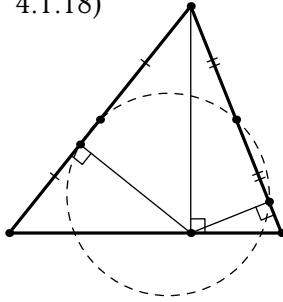
4.1.16)



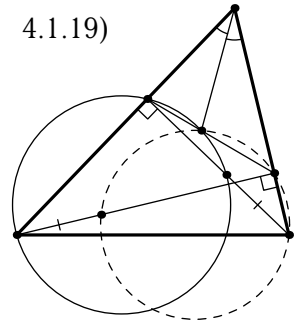
4.1.17)



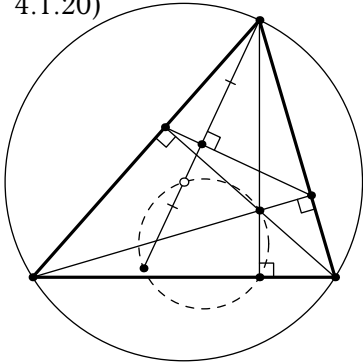
4.1.18)



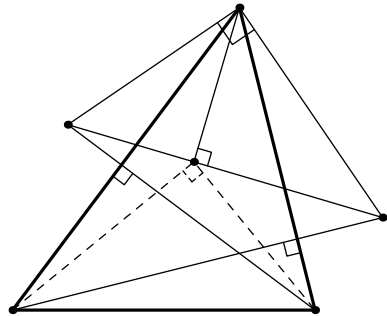
4.1.19)



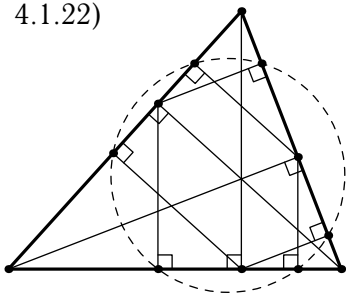
4.1.20)



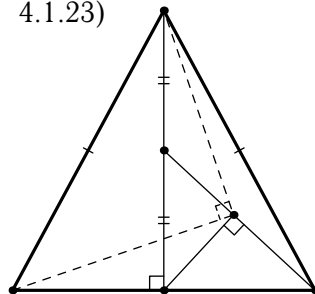
4.1.21)



4.1.22)

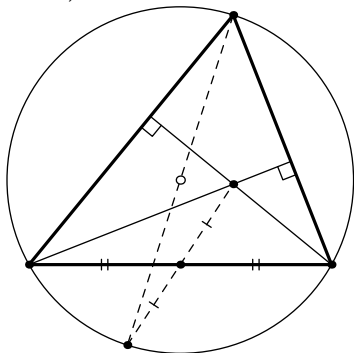


4.1.23)

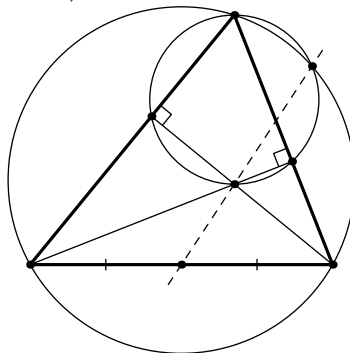


4.2 Ортоцентр треугольника

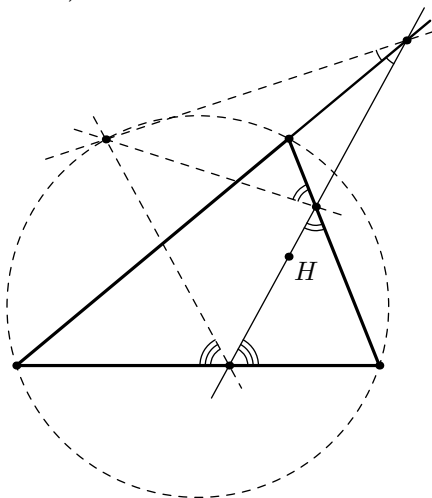
4.2.1)



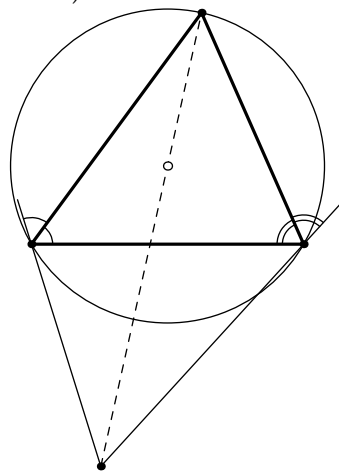
4.2.2)



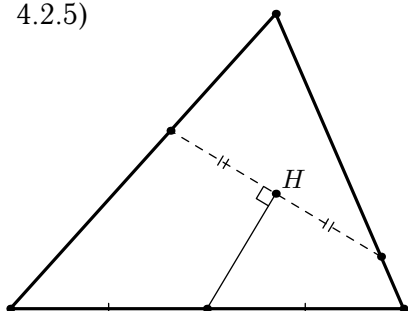
4.2.3)



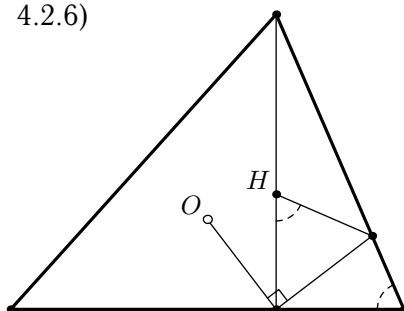
4.2.4)



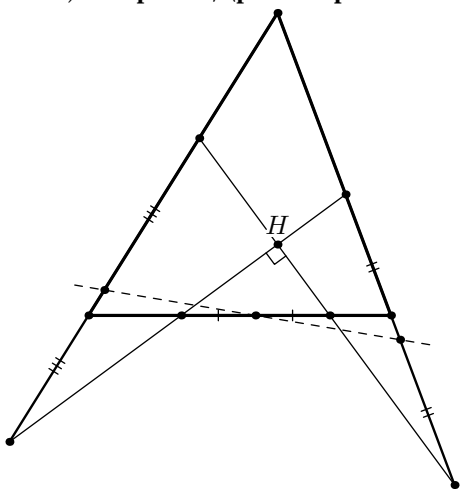
4.2.5)



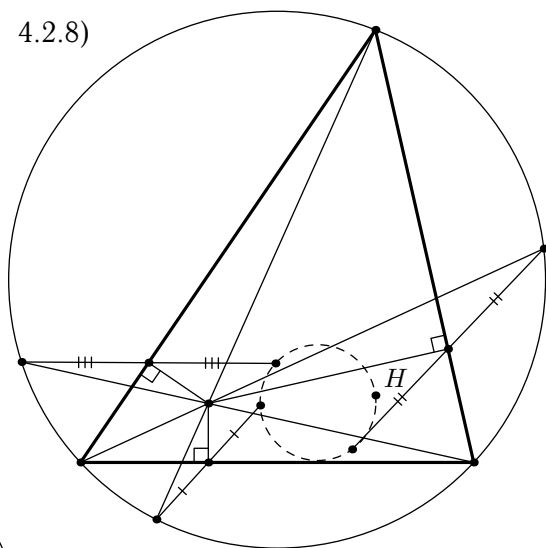
4.2.6)



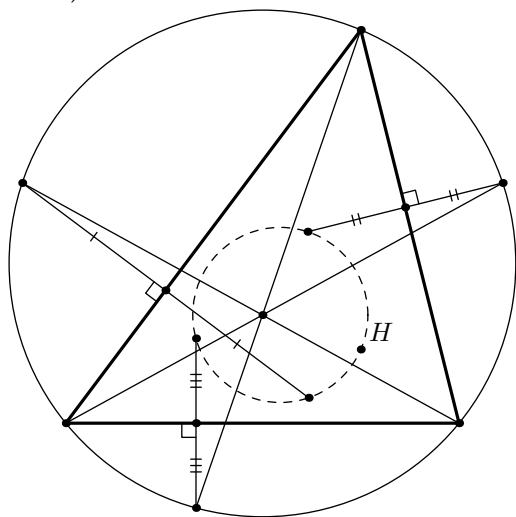
4.2.7) Теорема Дроз-Фарни



4.2.8)

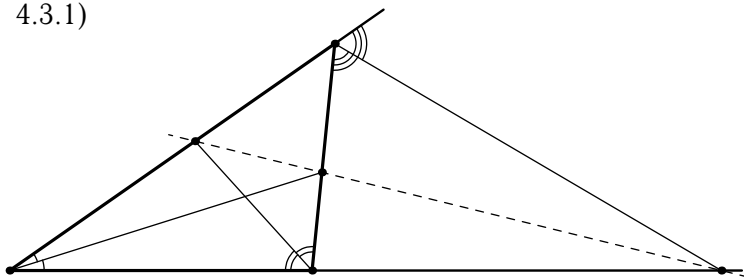


4.2.9)

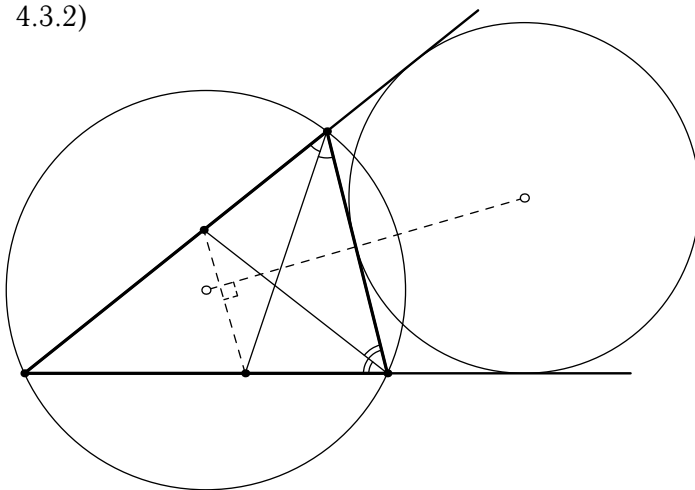


4.3 Биссектриса в треугольнике

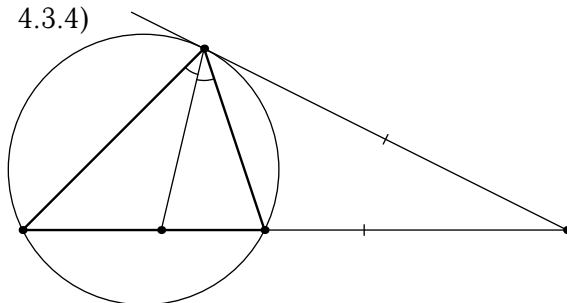
4.3.1)



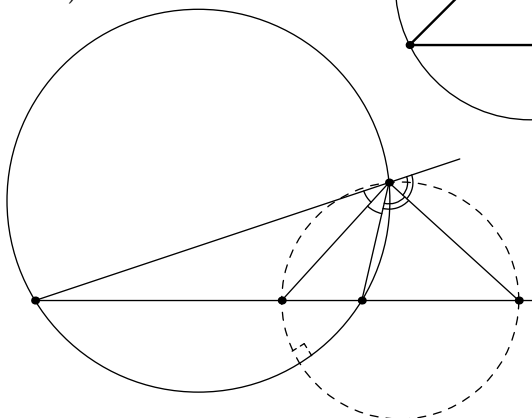
4.3.2)



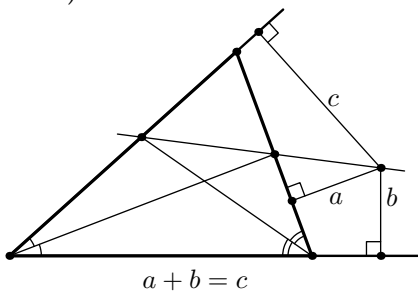
4.3.4)



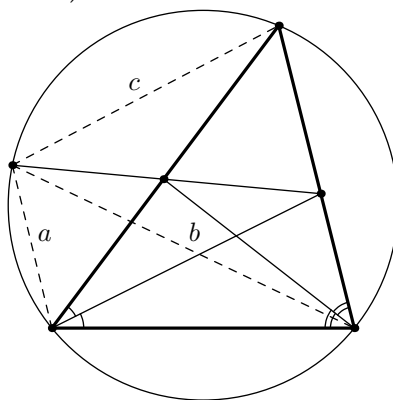
4.3.3)



4.3.5)

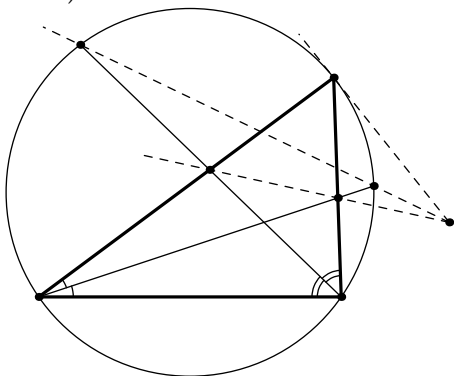


4.3.6)

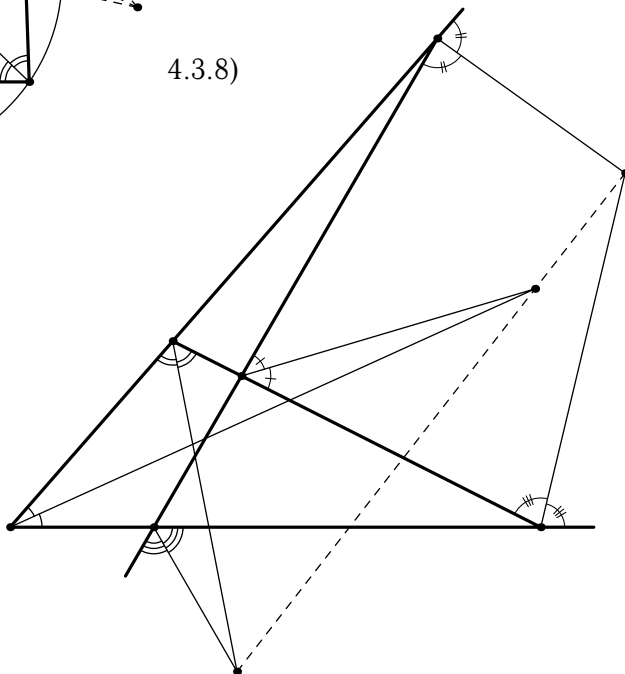


$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

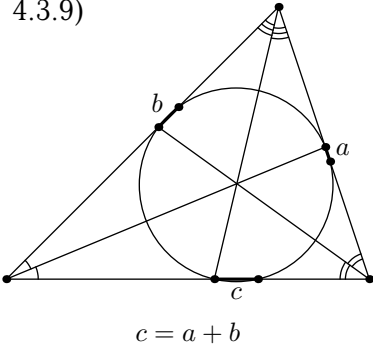
4.3.7)



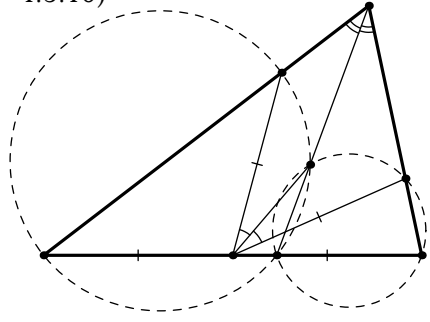
4.3.8)



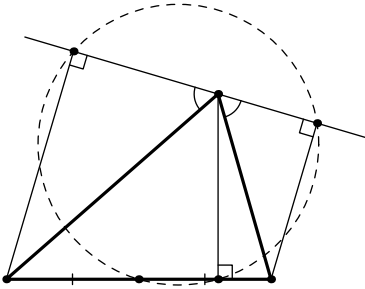
4.3.9)



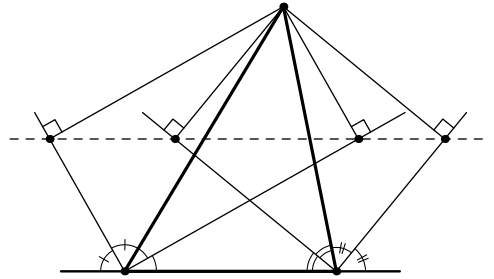
4.3.10)



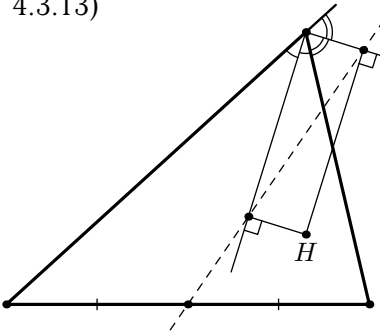
4.3.11)



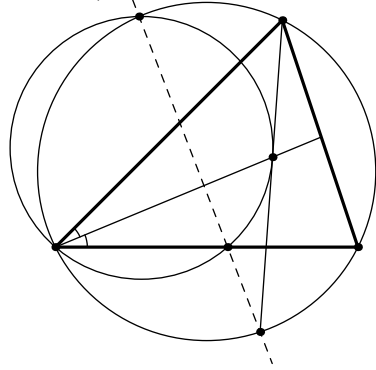
4.3.12)



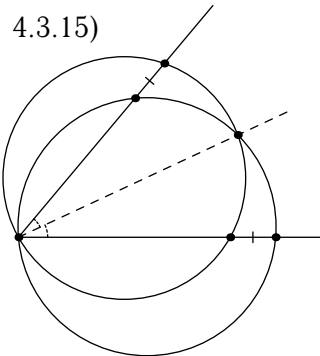
4.3.13)



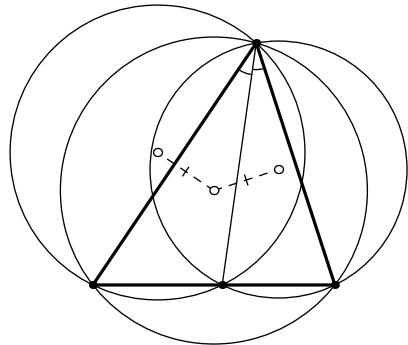
4.3.14)



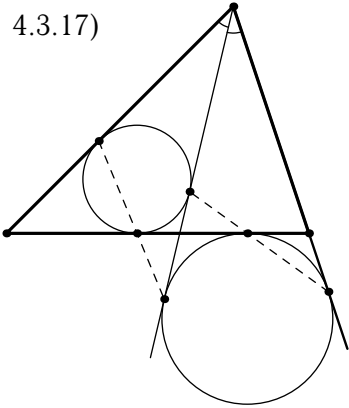
4.3.15)



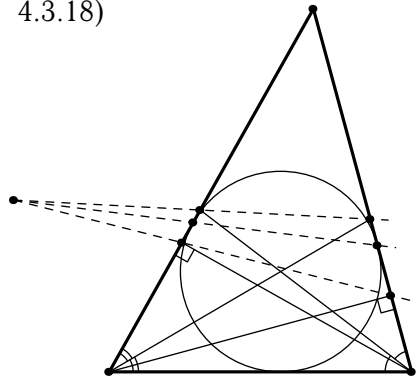
4.3.16)



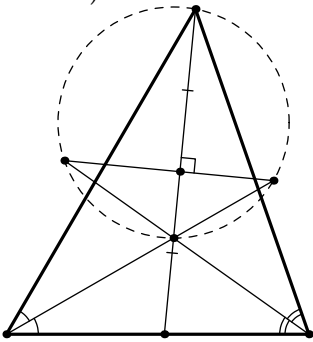
4.3.17)



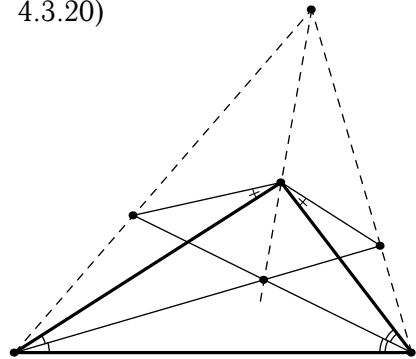
4.3.18)



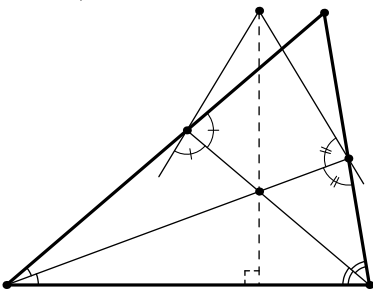
4.3.19)



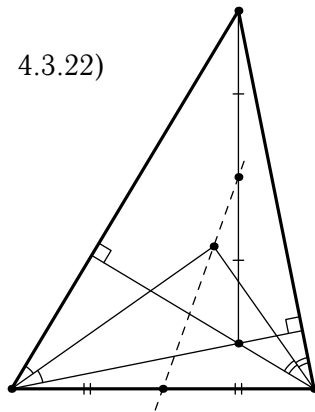
4.3.20)



4.3.21)

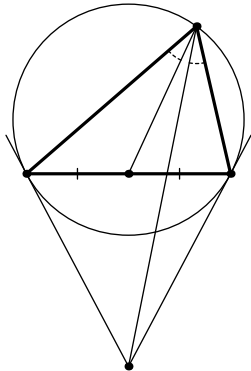


4.3.22)

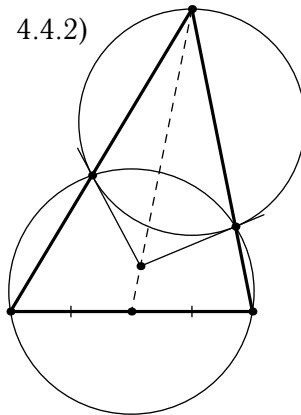


4.4 Симедиана и её свойства

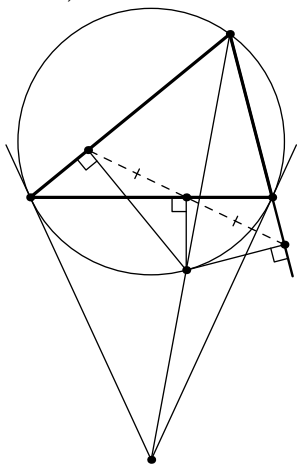
4.4.1) Теорема о симедиане



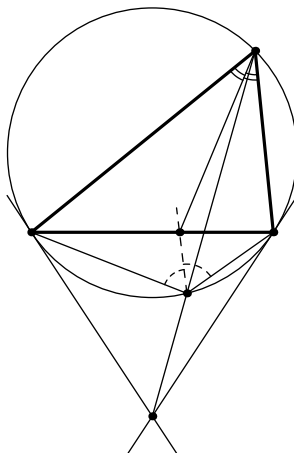
4.4.2)



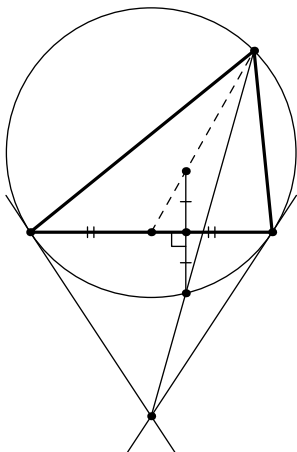
4.4.3)



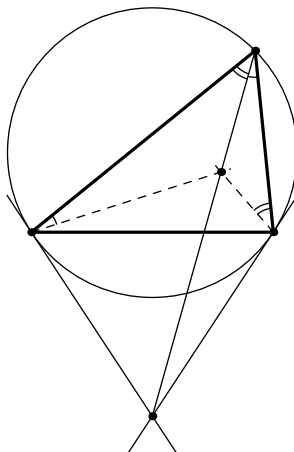
4.4.4)



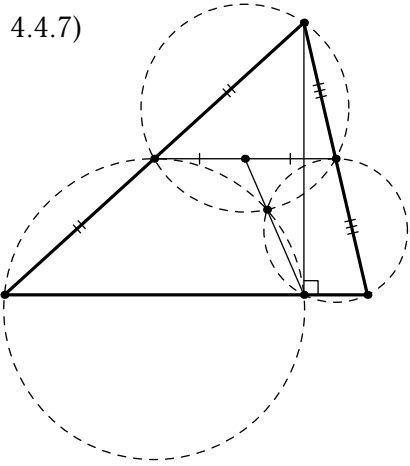
4.4.5)



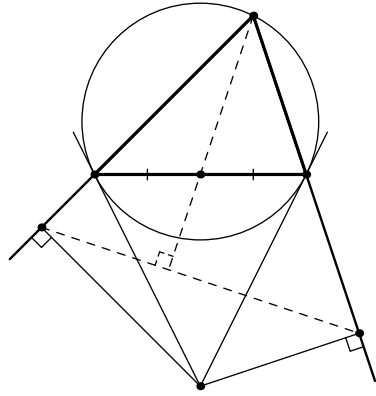
4.4.6)



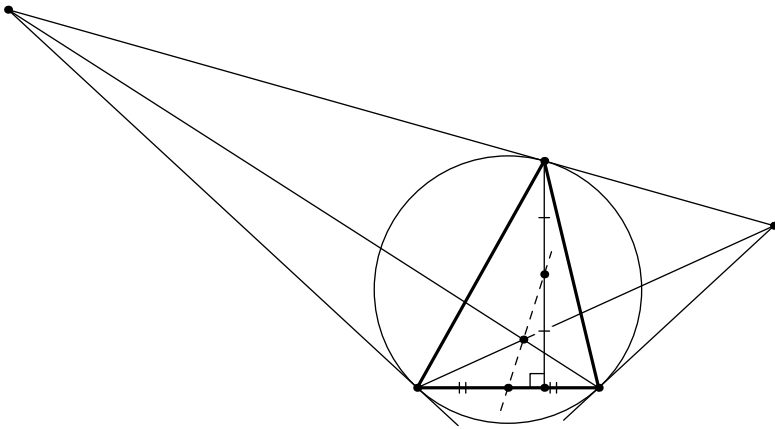
4.4.7)



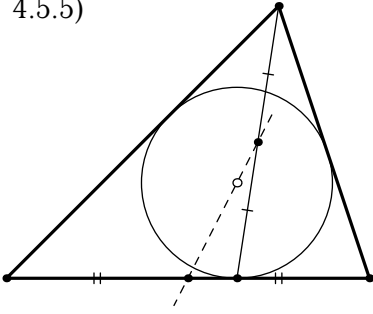
4.4.8)



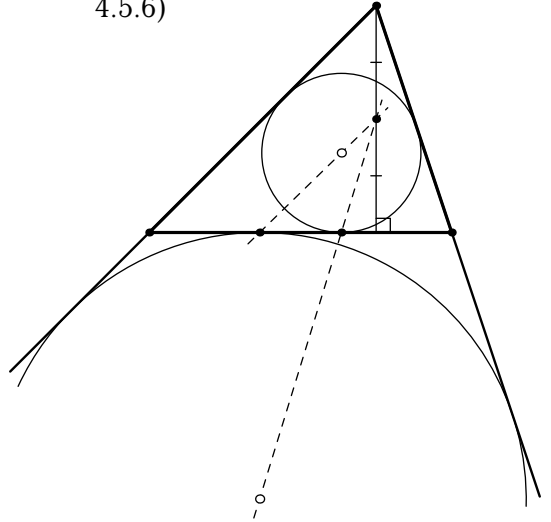
4.4.9)



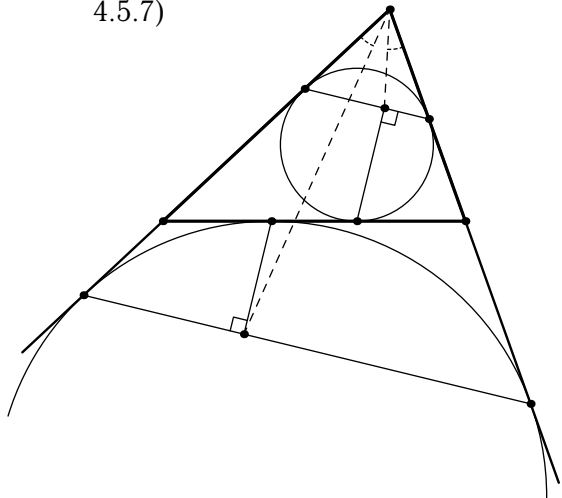
4.5.5)



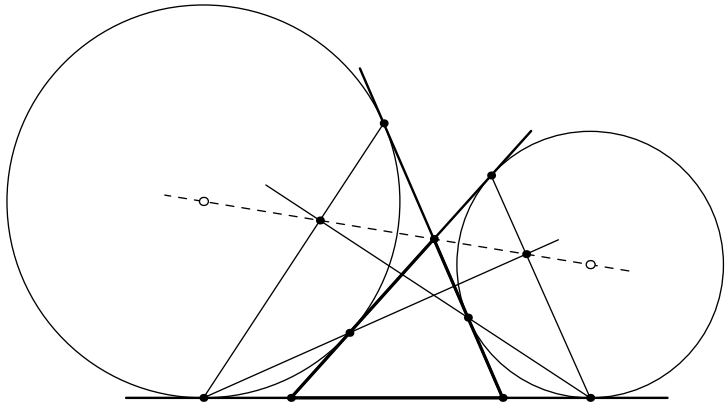
4.5.6)



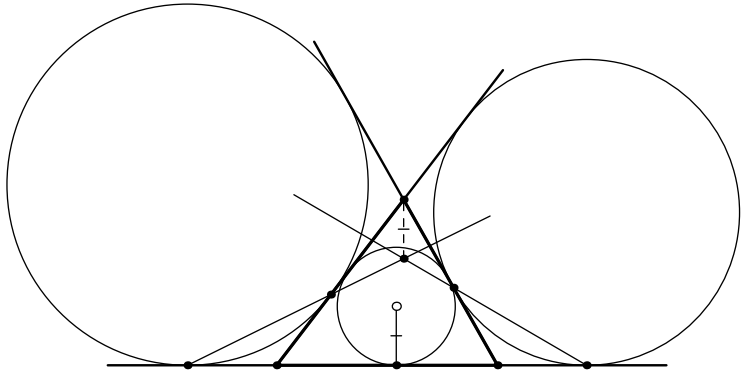
4.5.7)



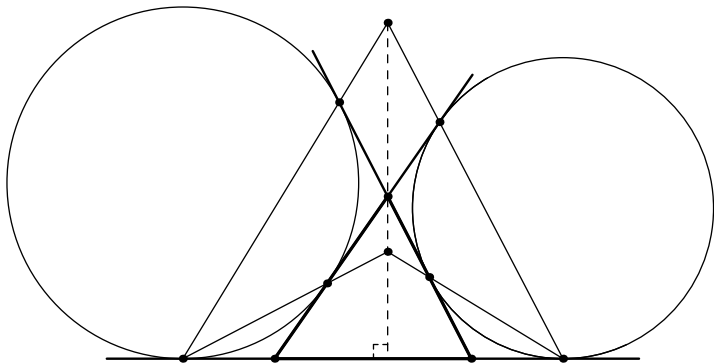
4.5.8)



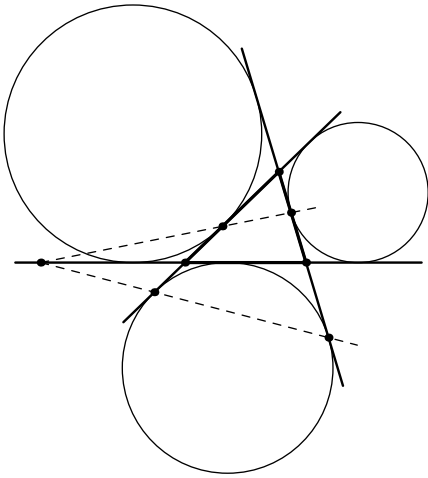
4.5.9)



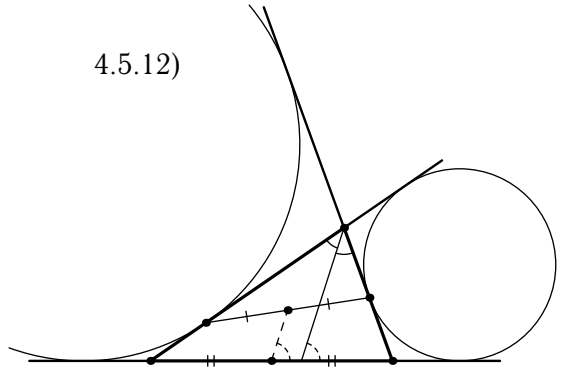
4.5.10)



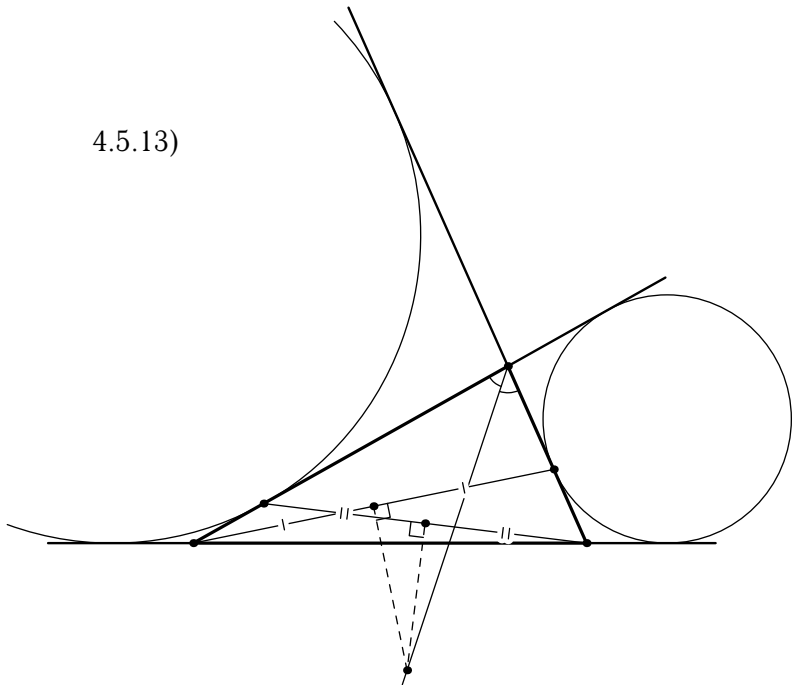
4.5.11)



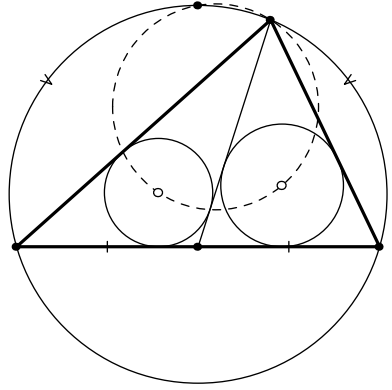
4.5.12)



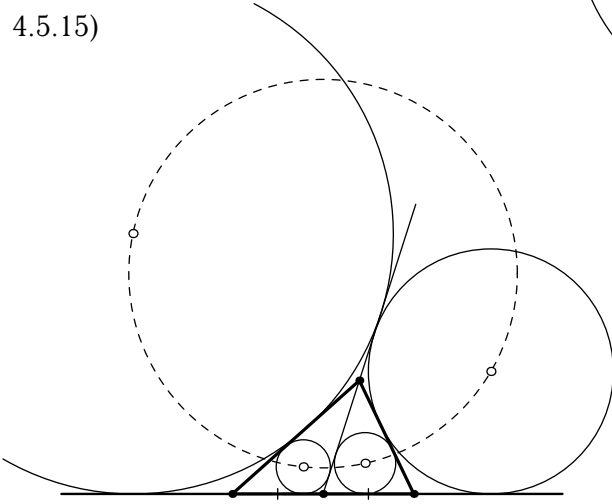
4.5.13)



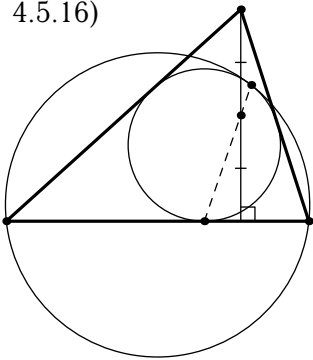
4.5.14)



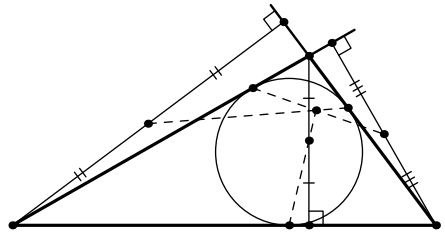
4.5.15)



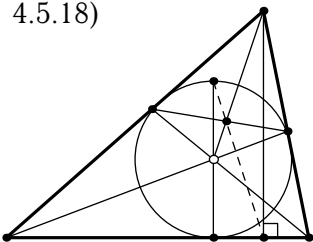
4.5.16)



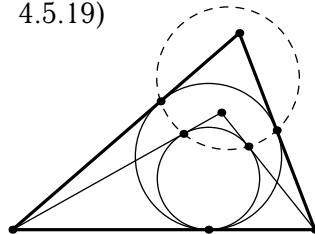
4.5.17)



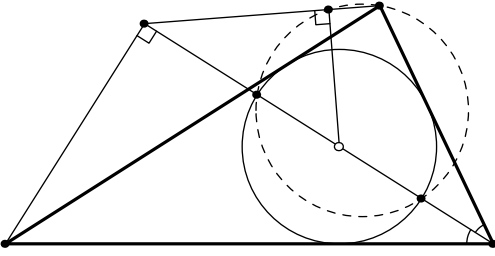
4.5.18)



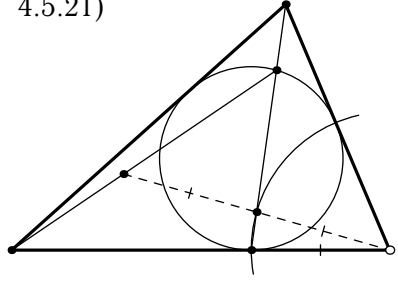
4.5.19)



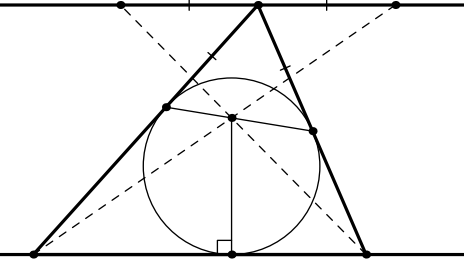
4.5.20)



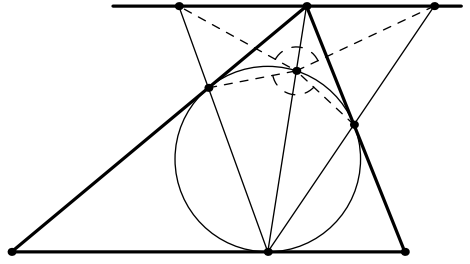
4.5.21)



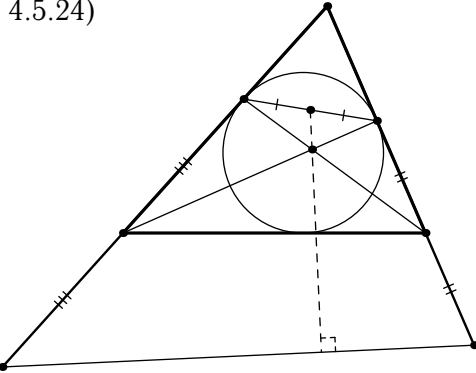
4.5.22)



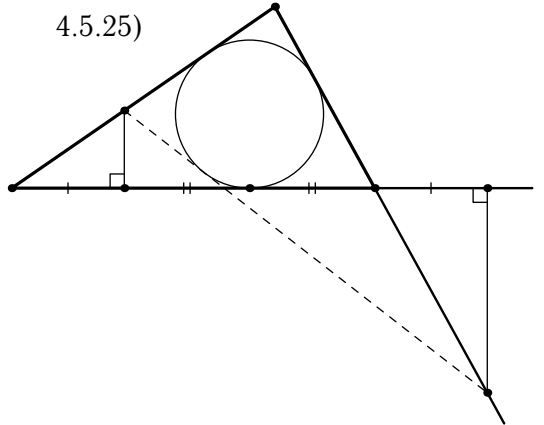
4.5.23)



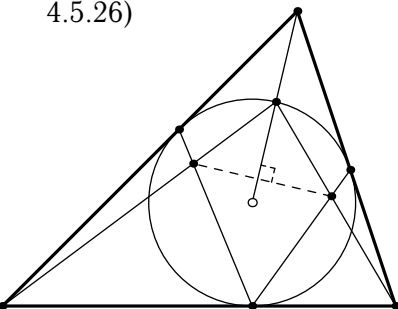
4.5.24)



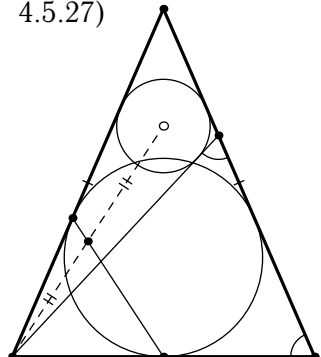
4.5.25)



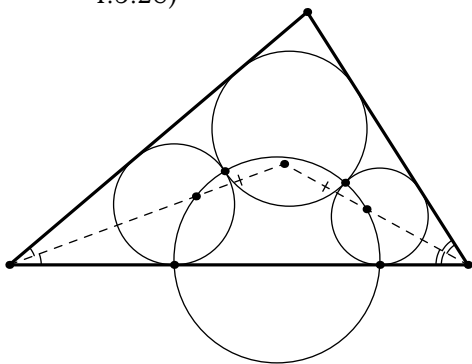
4.5.26)



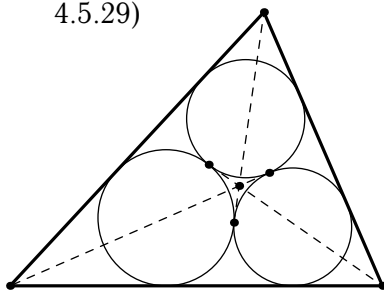
4.5.27)



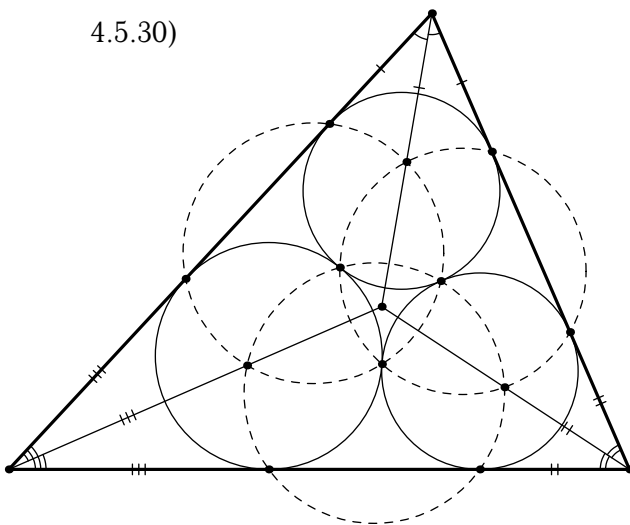
4.5.28)



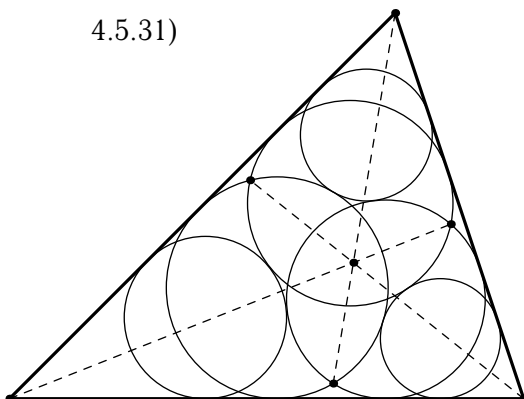
4.5.29)



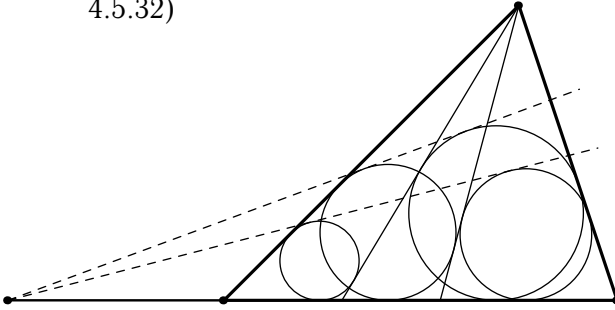
4.5.30)



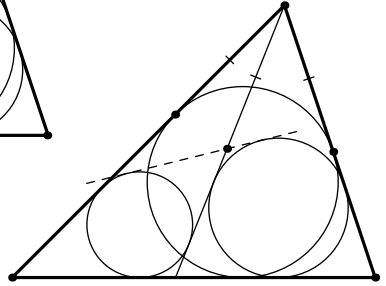
4.5.31)



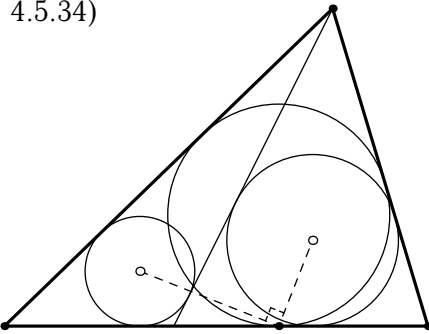
4.5.32)



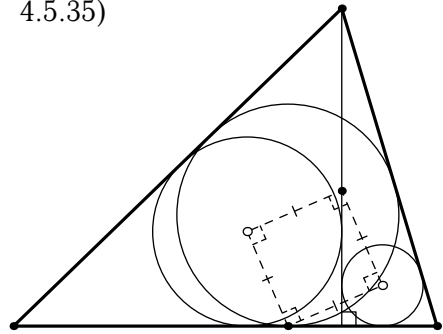
4.5.33)



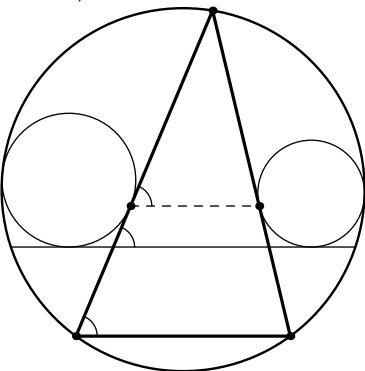
4.5.34)



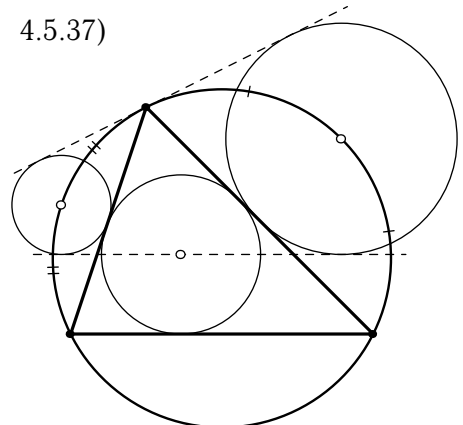
4.5.35)



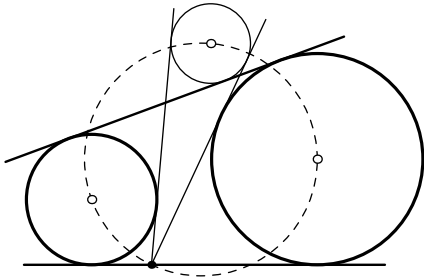
4.5.36)



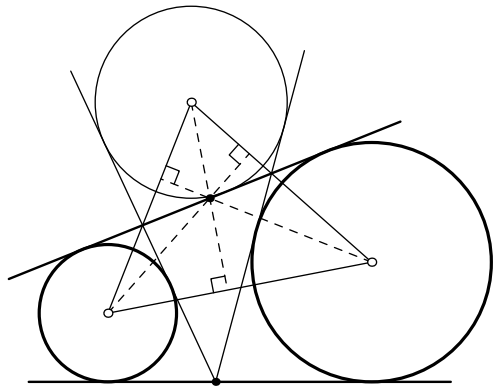
4.5.37)



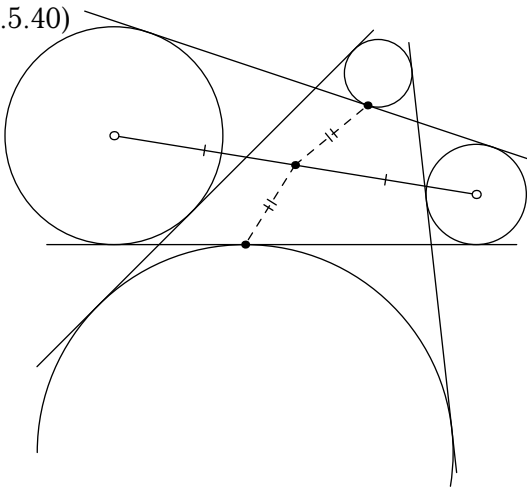
4.5.38)



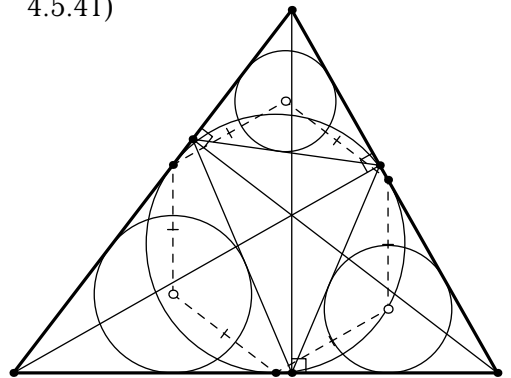
4.5.39)



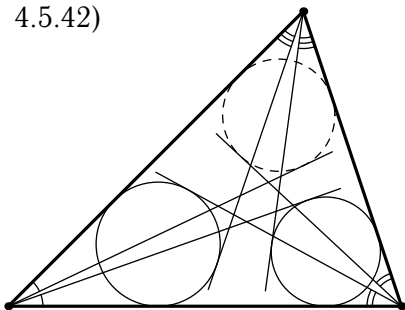
4.5.40)



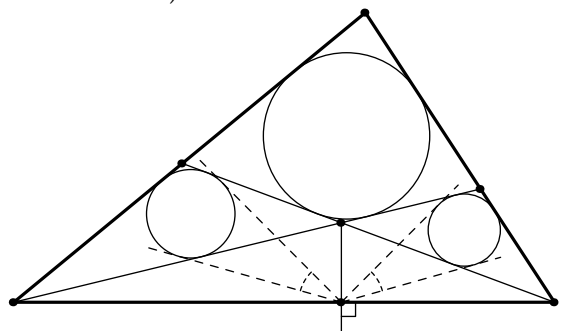
4.5.41)



4.5.42)

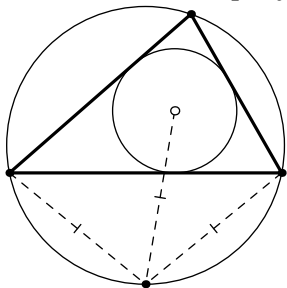


4.5.43)

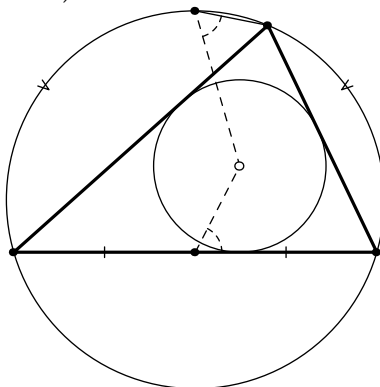


4.6 Вписанная и описанная окружность треугольника

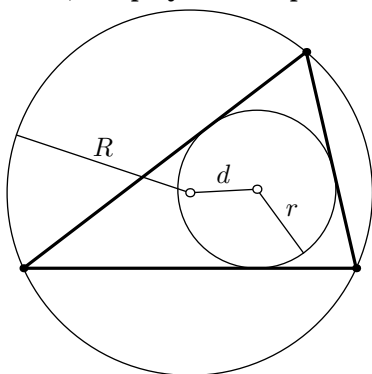
4.6.1) Лемма о трезубце



4.6.2)

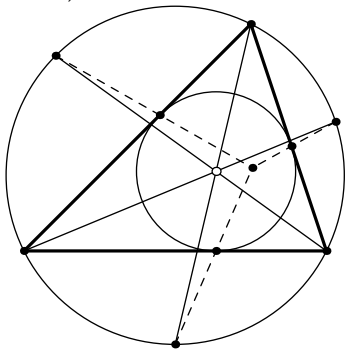


4.6.3) Формула Эйлера

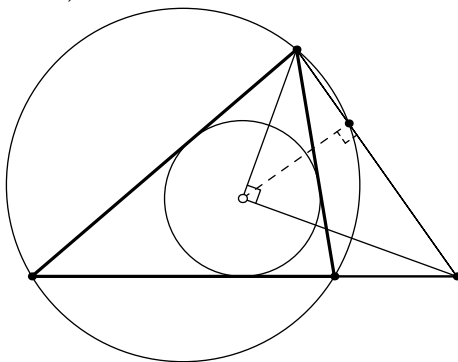


$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

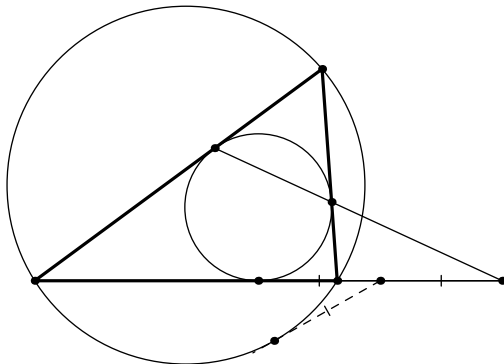
4.6.5)



4.6.4)



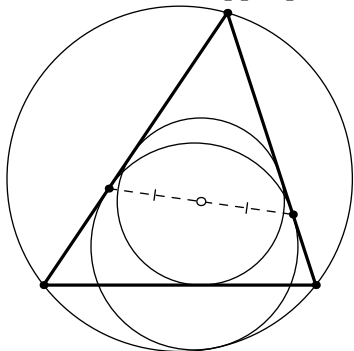
4.6.6)



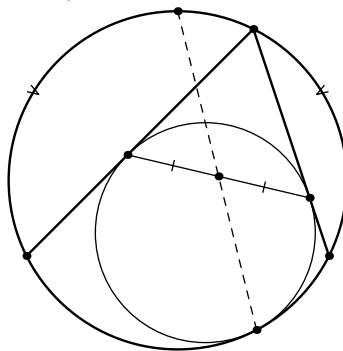
4.7 Касание описанной окружности треугольника

Полувписанные окружности

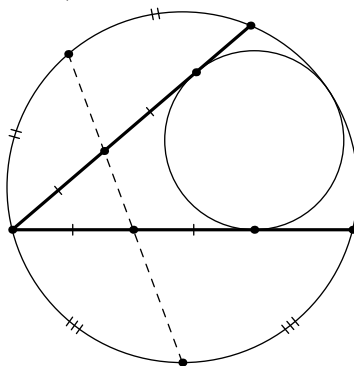
4.7.1) Лемма Веррьера



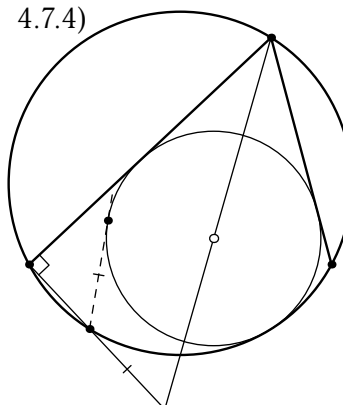
4.7.2)



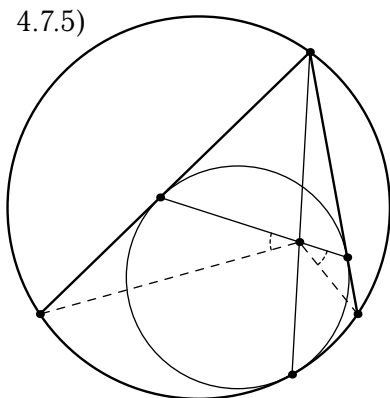
4.7.3)



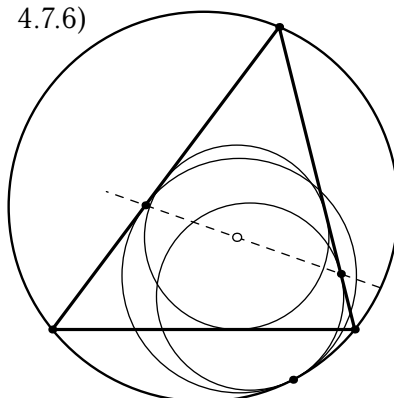
4.7.4)



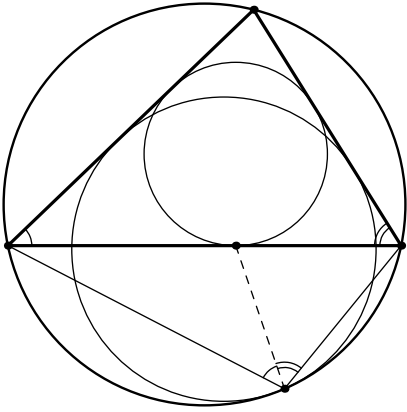
4.7.5)



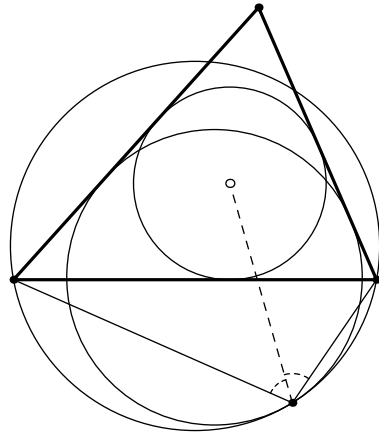
4.7.6)



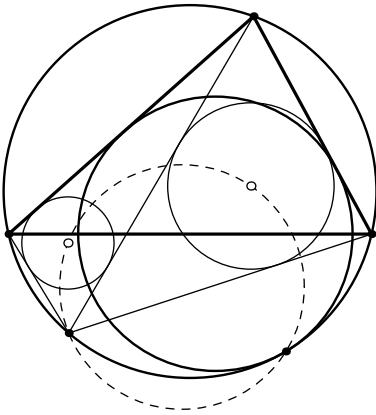
4.7.7)



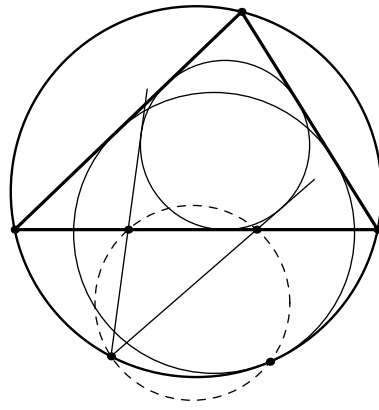
4.7.8)



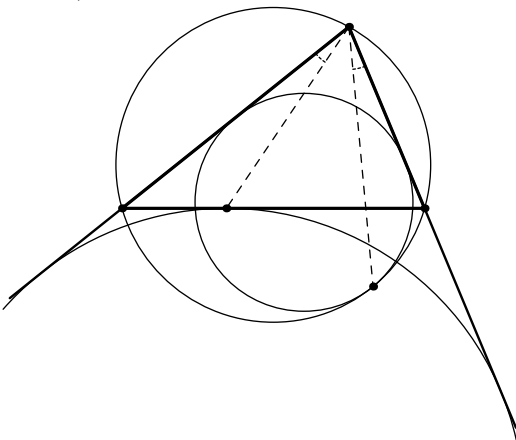
4.7.9)



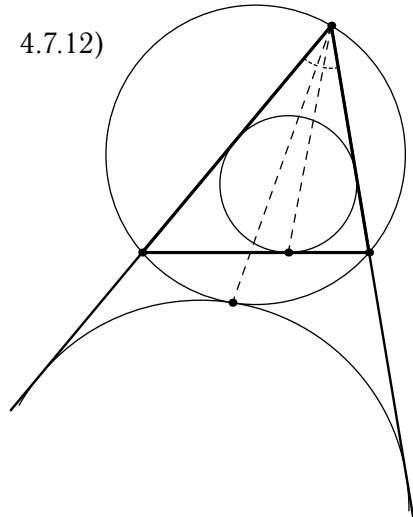
4.7.10)



4.7.11)

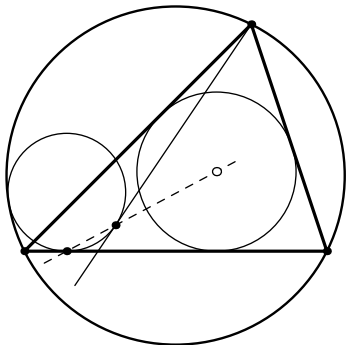


4.7.12)

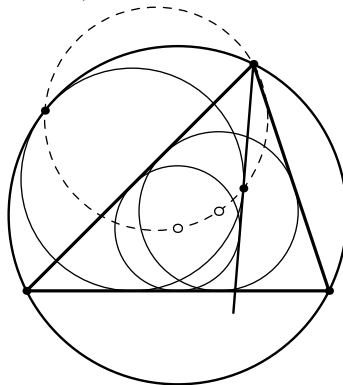


Вокруг теоремы о сегменте

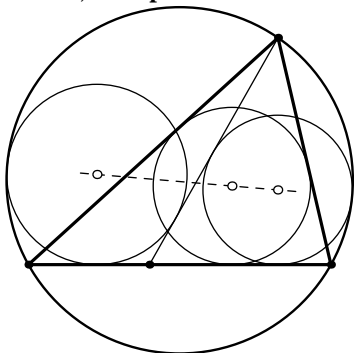
4.7.13) **Лемма Саваямы**



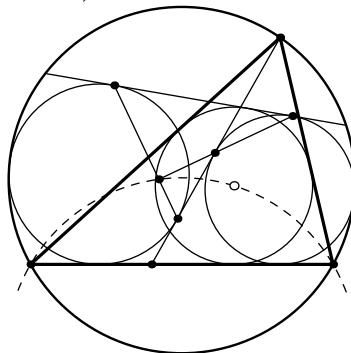
4.7.14)



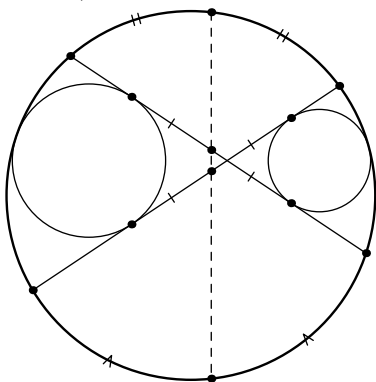
4.7.15) **Теорема Тебо**



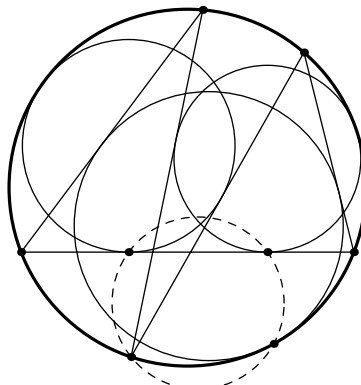
4.7.16)



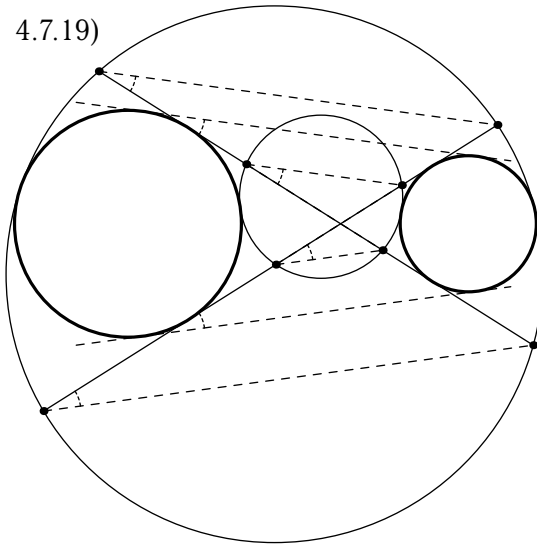
4.7.17)



4.7.18)

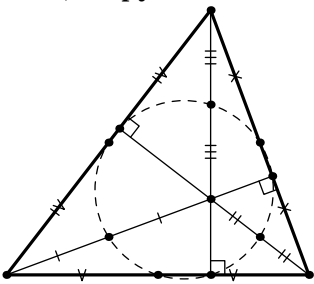


4.7.19)

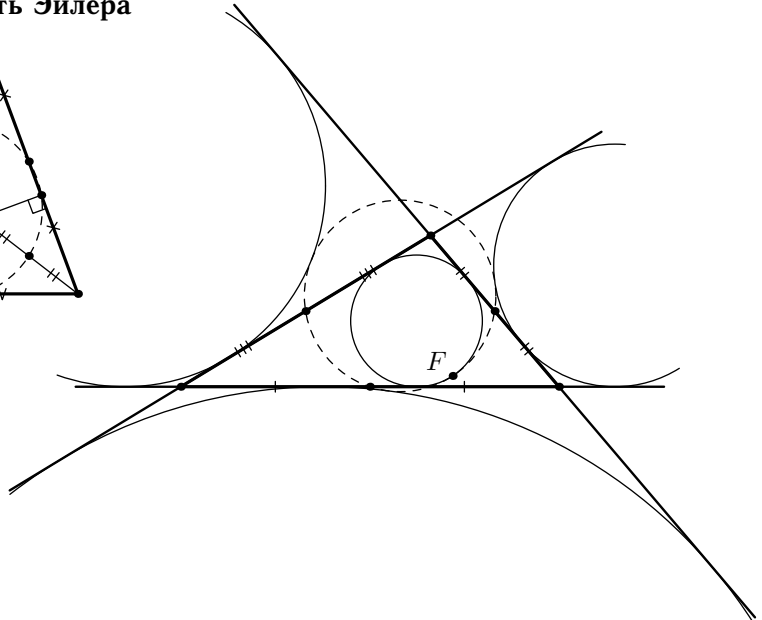


4.8 Окружности в треугольнике

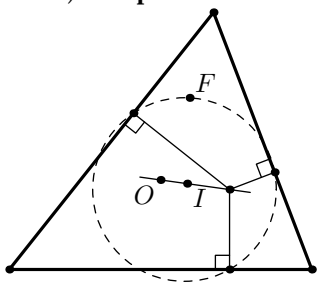
4.8.1) Окружность Эйлера



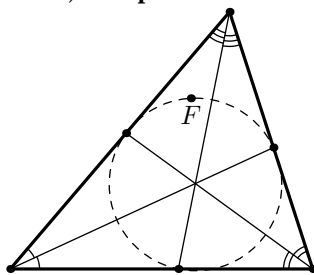
4.8.2) Теорема Фейербаха



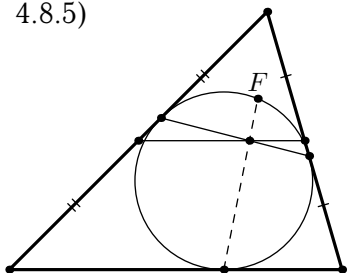
4.8.3) Теорема Фонтене



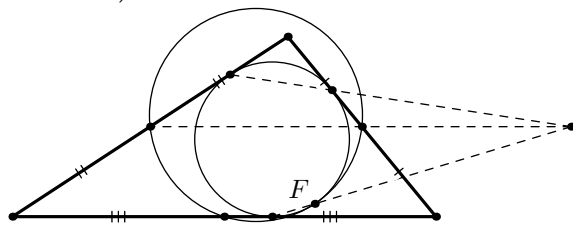
4.8.4) Теорема Емельяновых



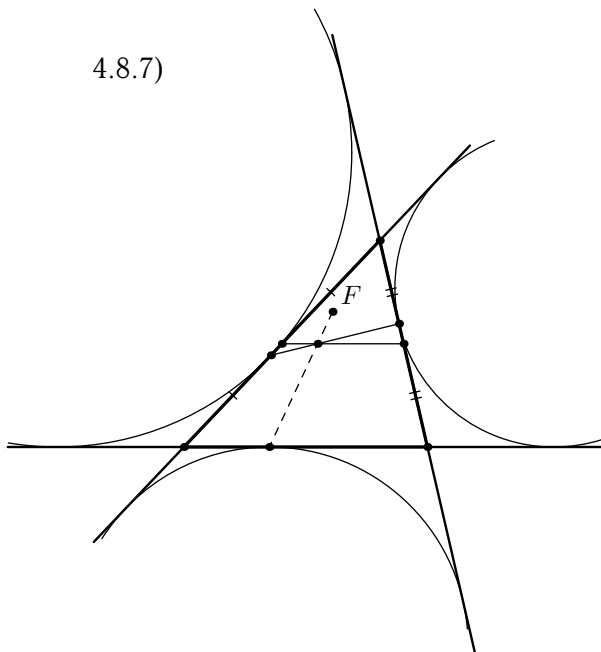
4.8.5)



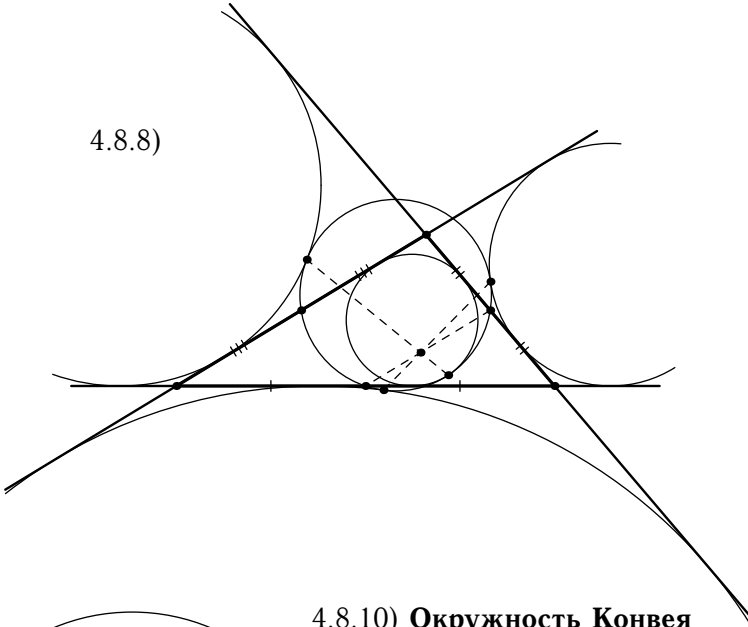
4.8.6)



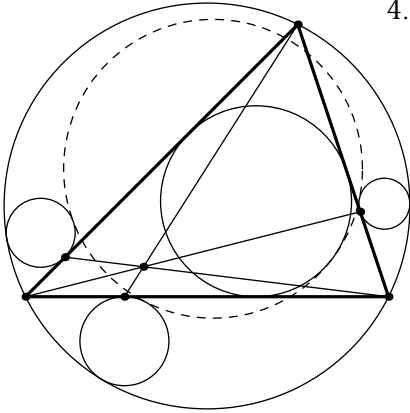
4.8.7)



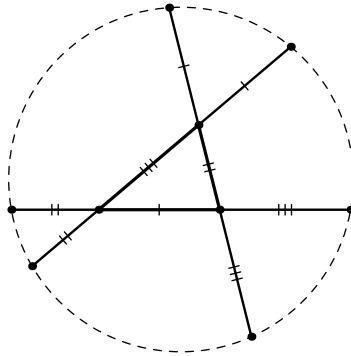
4.8.8)



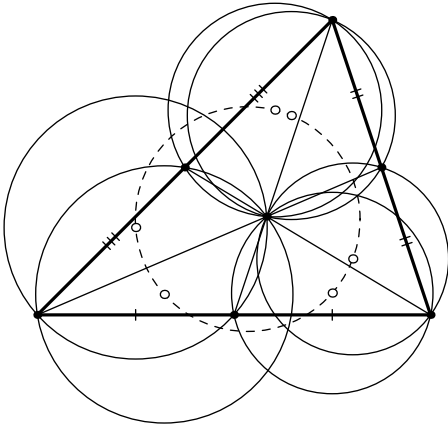
4.8.9)



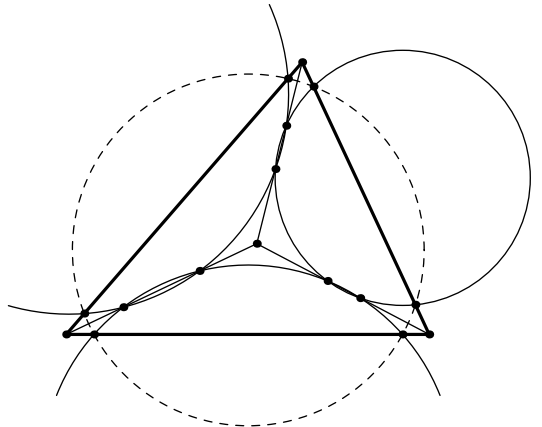
4.8.10) **Окружность Конвея**



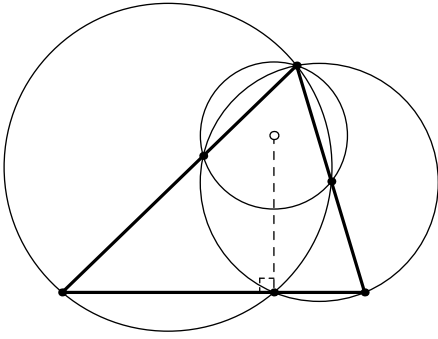
4.8.11) **Окружность Ламуна**



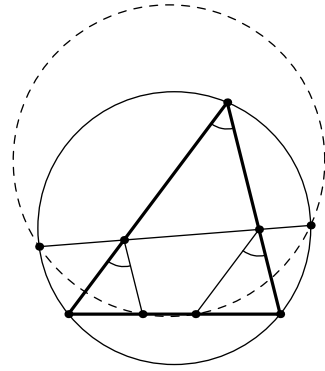
4.8.12)



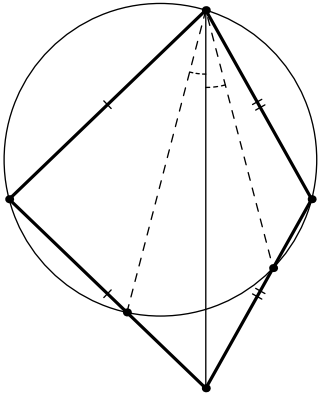
4.8.18)



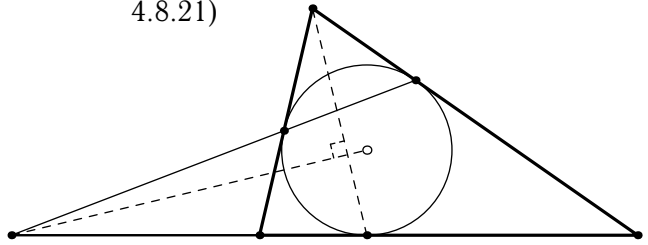
4.8.19)



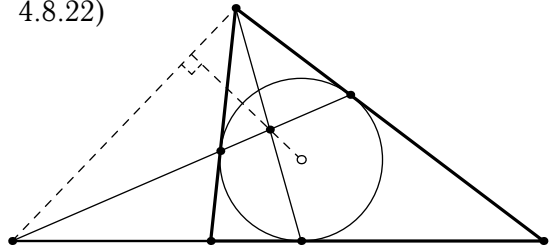
4.8.20)



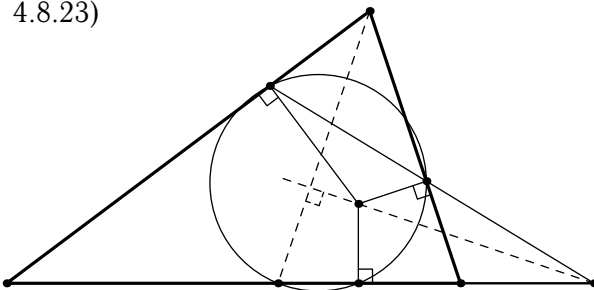
4.8.21)



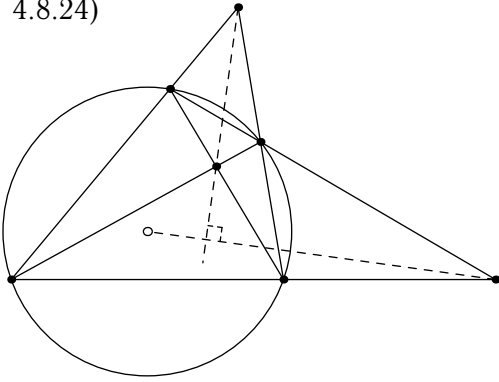
4.8.22)



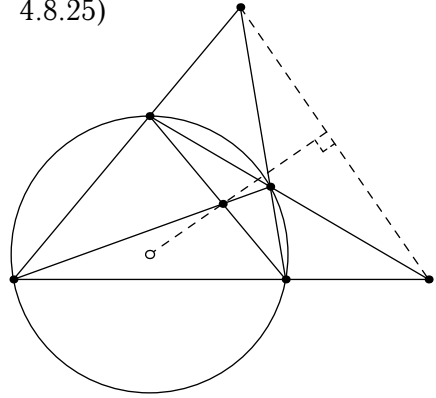
4.8.23)



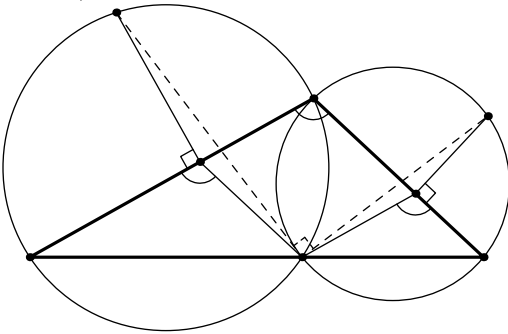
4.8.24)



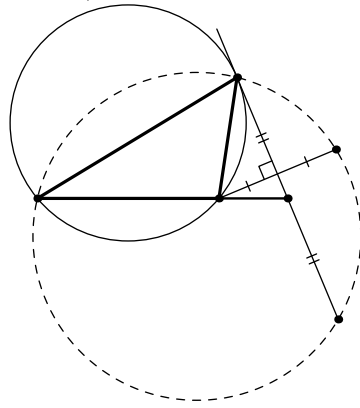
4.8.25)



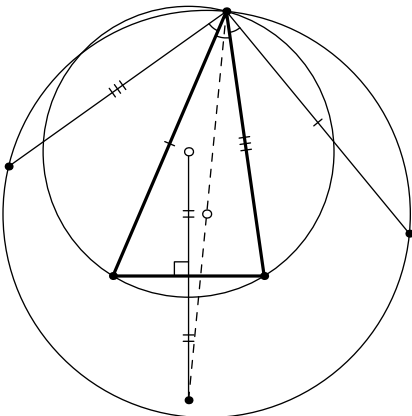
4.8.26)



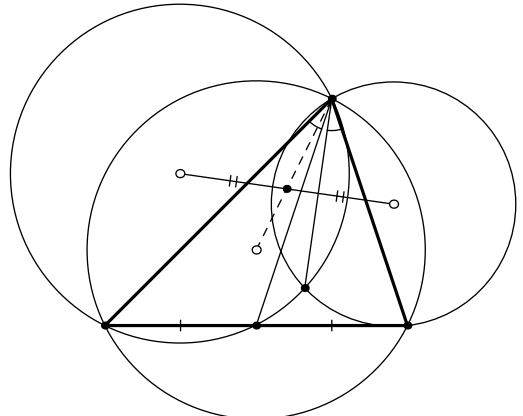
4.8.27)



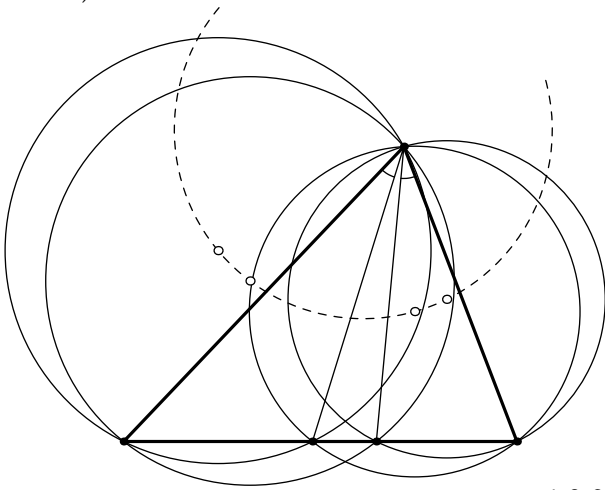
4.8.28)



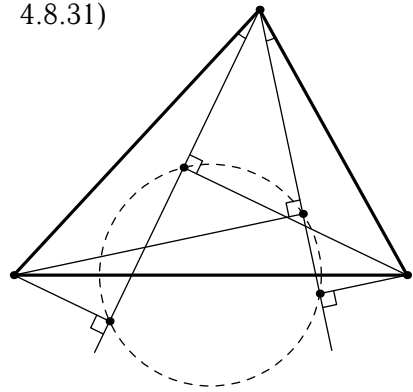
4.8.29)



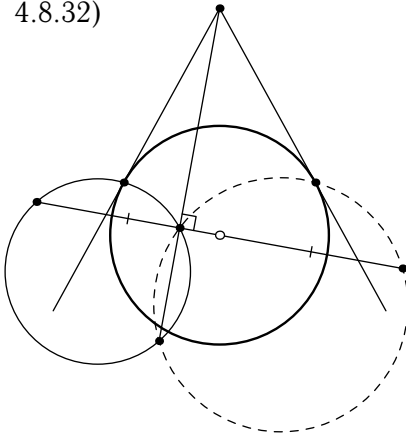
4.8.30)



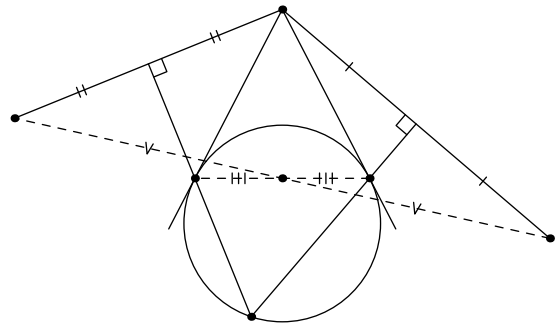
4.8.31)



4.8.32)

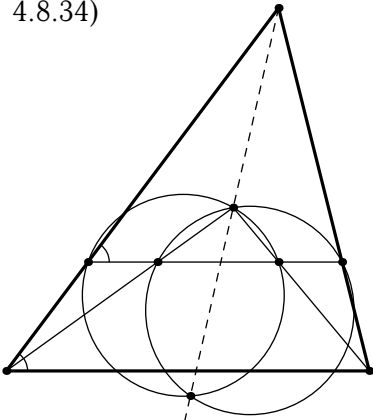


4.8.33)

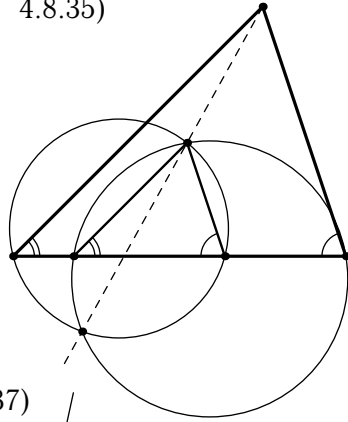


Общая хорда двух окружностей

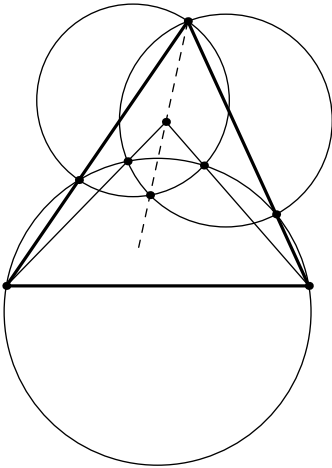
4.8.34)



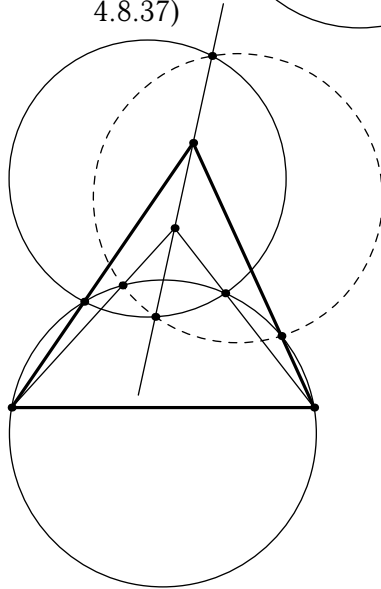
4.8.35)



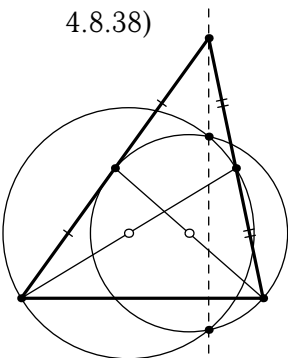
4.8.36)



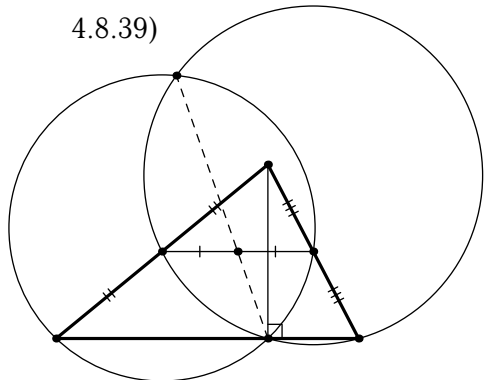
4.8.37)



4.8.38)

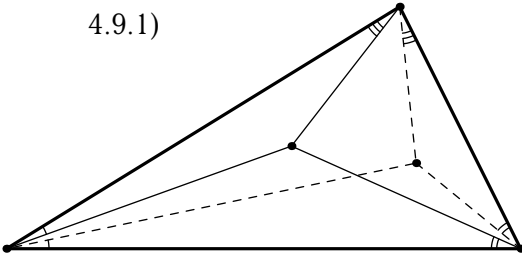


4.8.39)

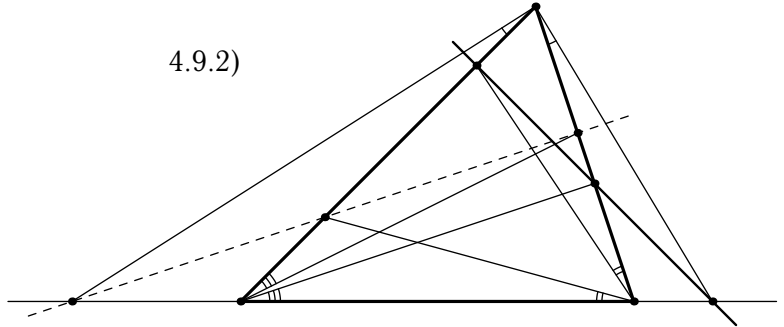


4.9 Пересечение элементов треугольника в одной точке

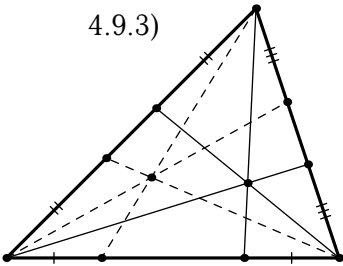
4.9.1)



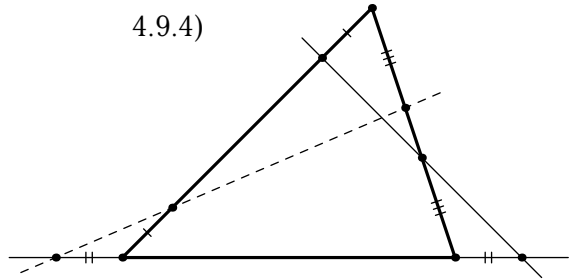
4.9.2)



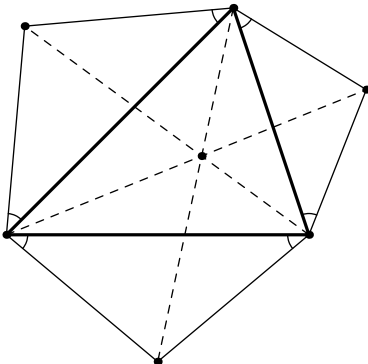
4.9.3)



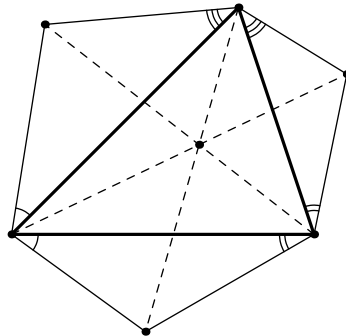
4.9.4)



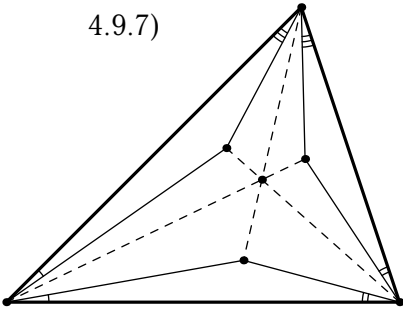
4.9.5)



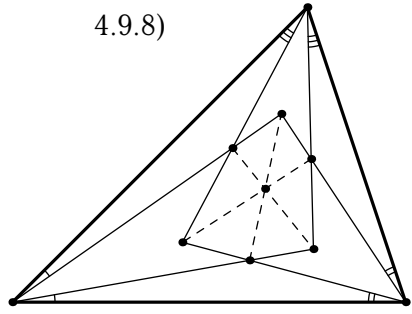
4.9.6)



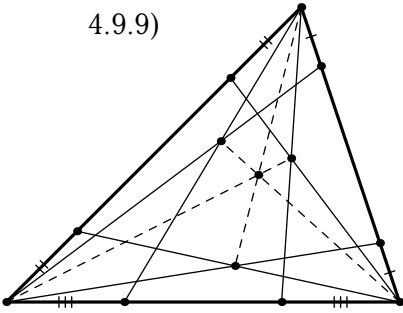
4.9.7)



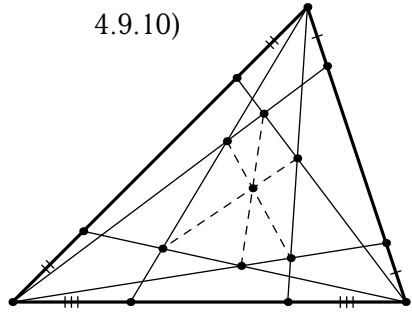
4.9.8)



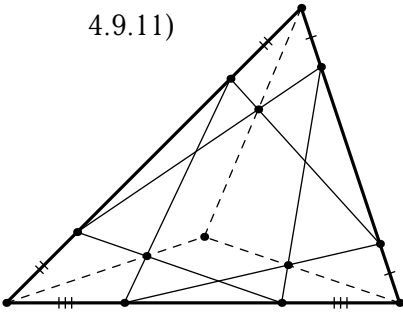
4.9.9)



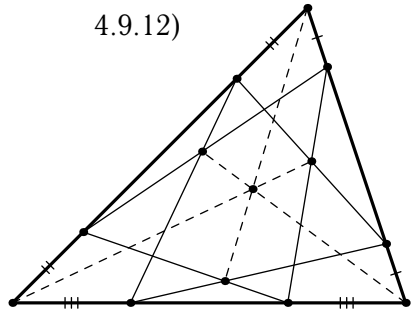
4.9.10)



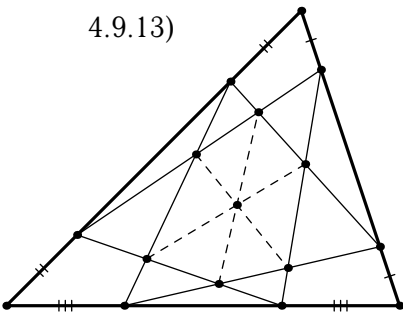
4.9.11)



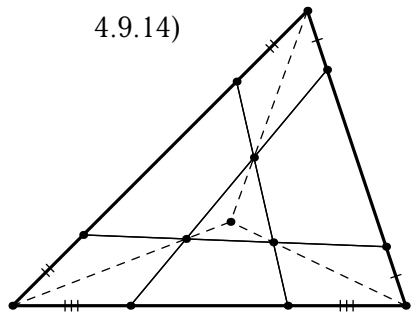
4.9.12)



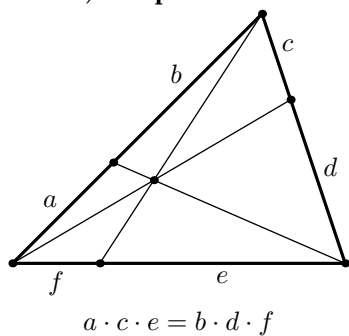
4.9.13)



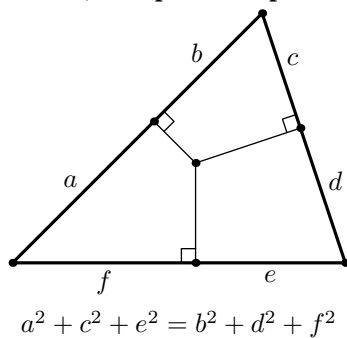
4.9.14)



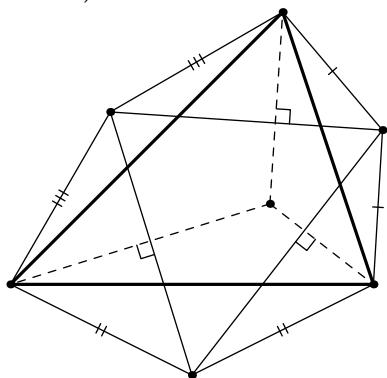
4.9.15) Теорема Чевы



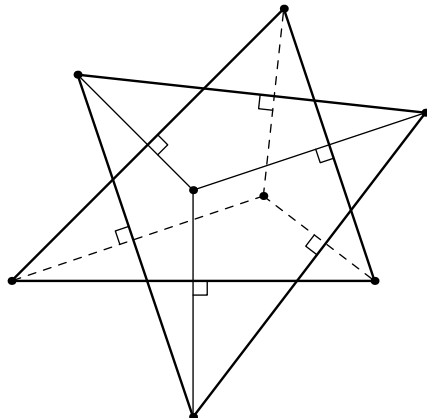
4.9.16) Теорема Карно



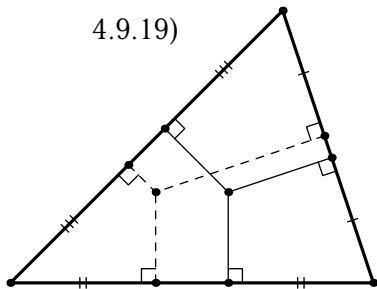
4.9.17)



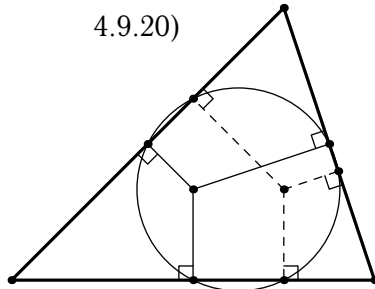
4.9.18) Теорема Штейнера



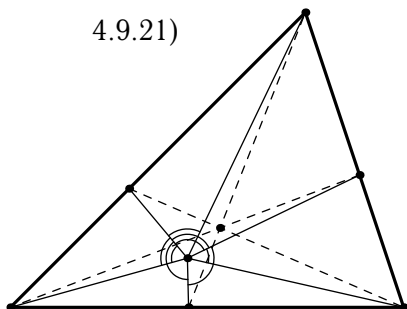
4.9.19)



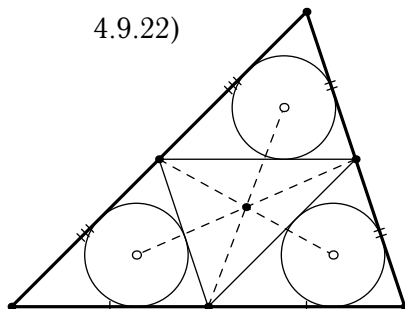
4.9.20)



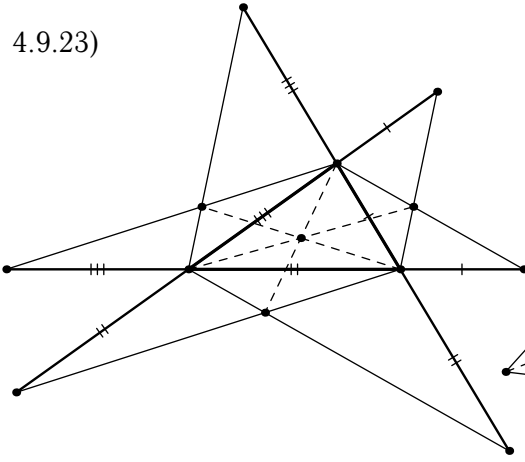
4.9.21)



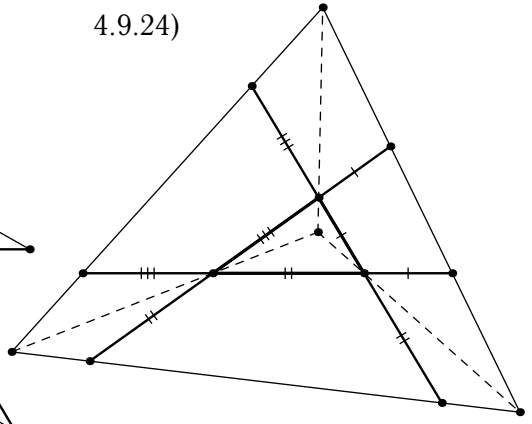
4.9.22)



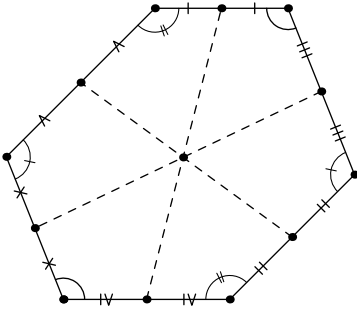
4.9.23)



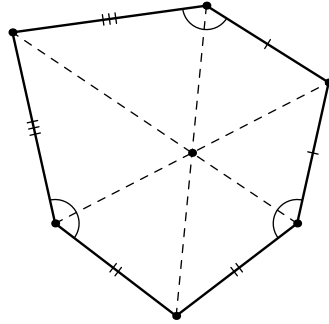
4.9.24)



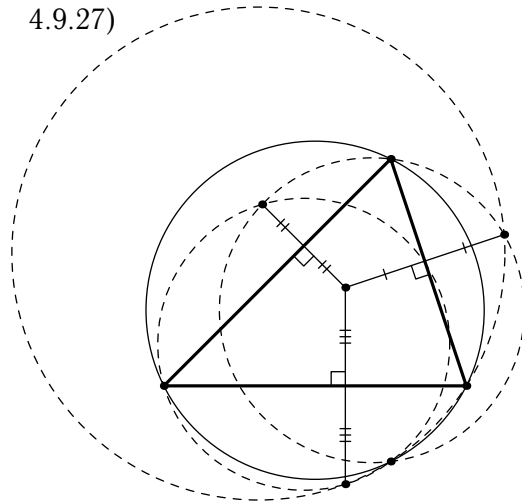
4.9.25)



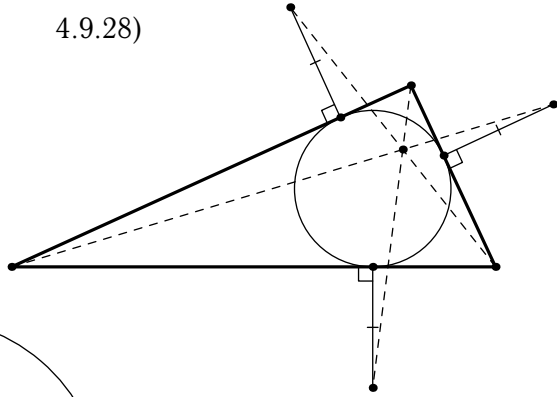
4.9.26)



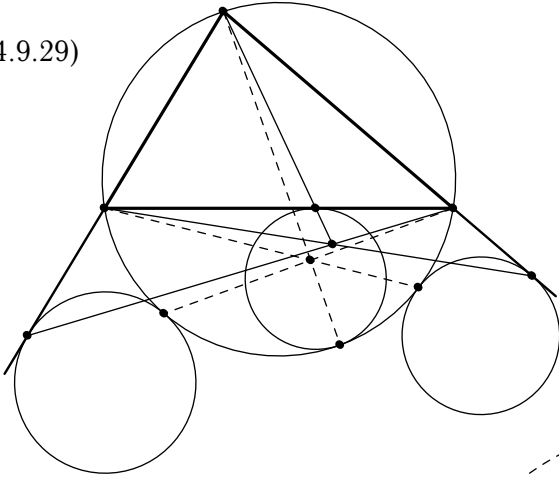
4.9.27)



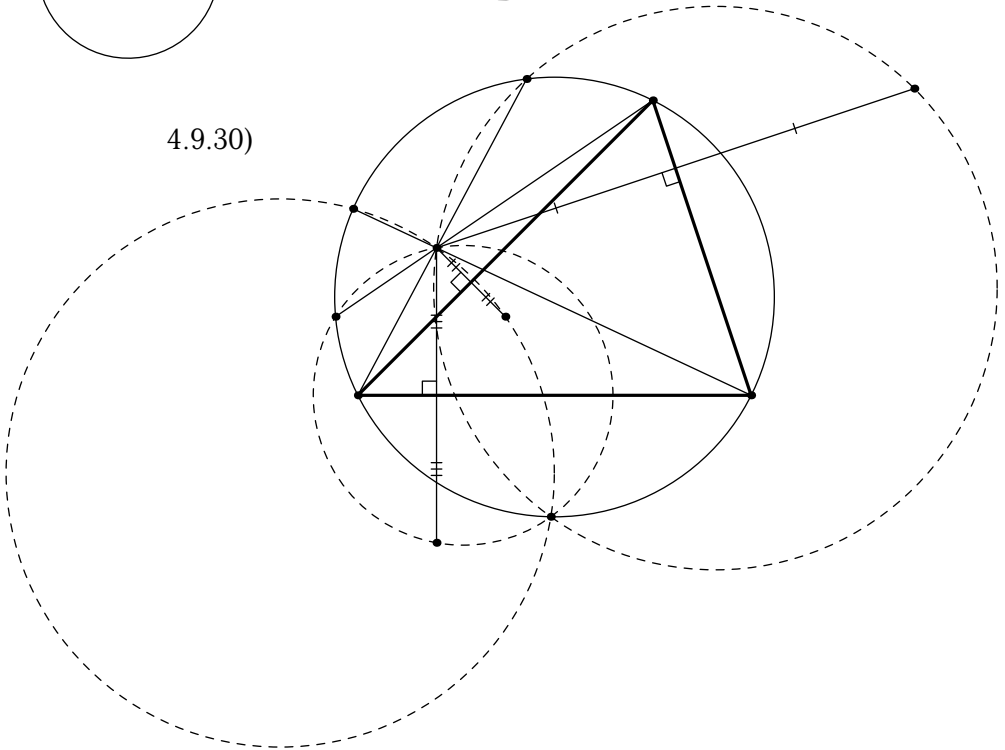
4.9.28)



4.9.29)

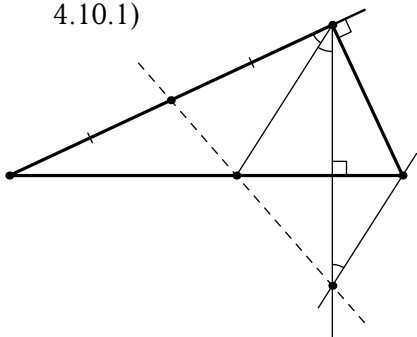


4.9.30)

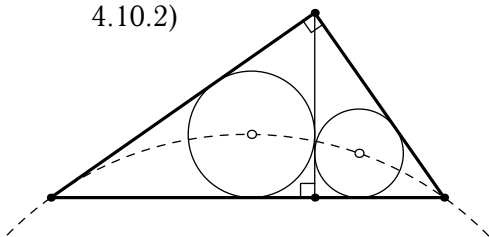


4.10 Прямоугольные треугольники

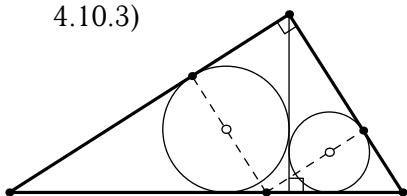
4.10.1)



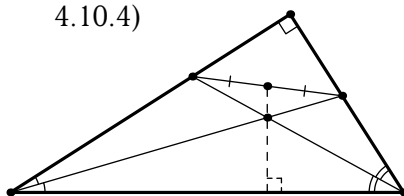
4.10.2)



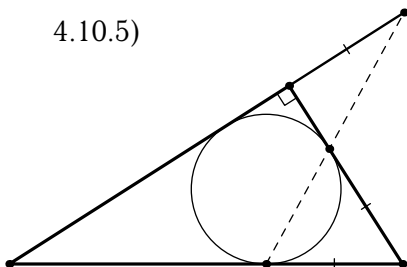
4.10.3)



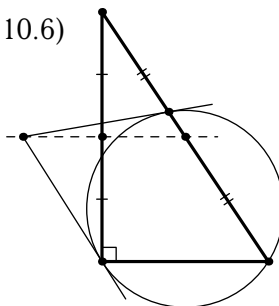
4.10.4)



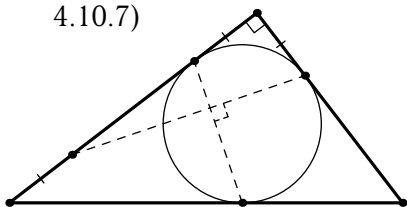
4.10.5)



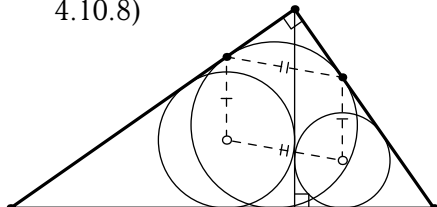
4.10.6)



4.10.7)

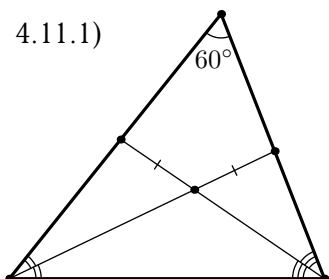


4.10.8)

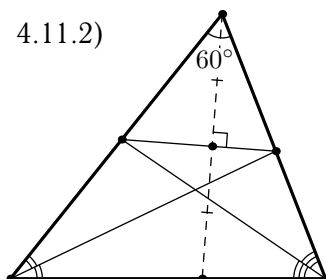


4.11 Теоремы с участием фиксированных углов

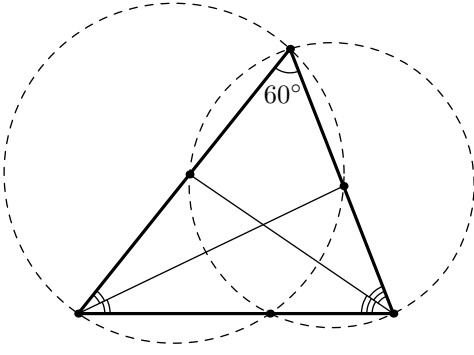
4.11.1)



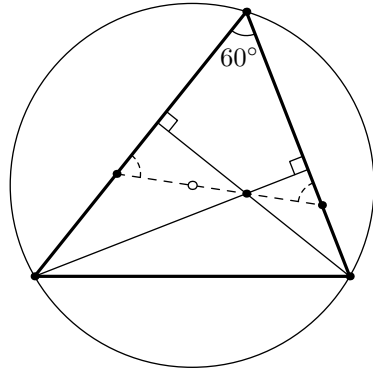
4.11.2)



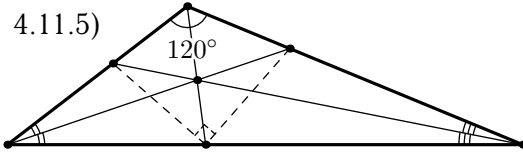
4.11.3)



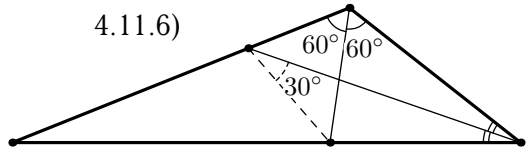
4.11.4)



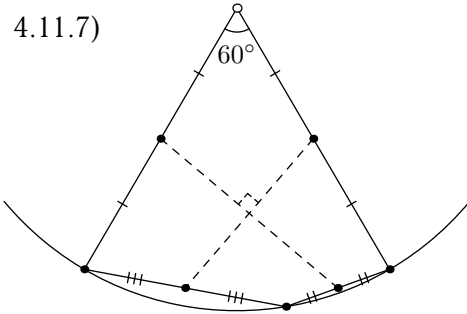
4.11.5)



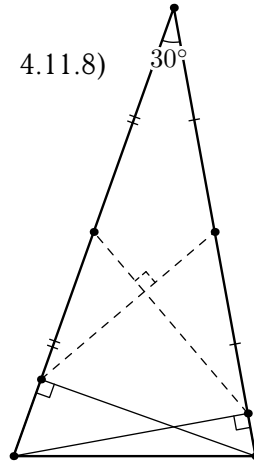
4.11.6)



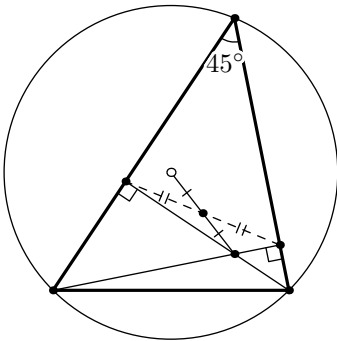
4.11.7)



4.11.8)

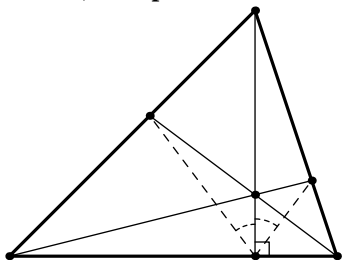


4.11.9)

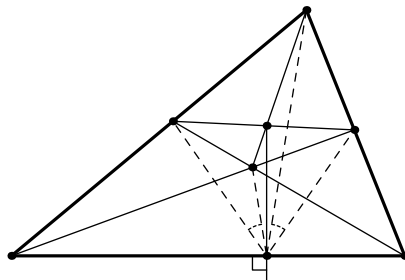


4.12 Разные теоремы и задачи

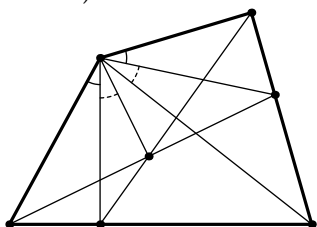
4.12.1) Теорема Бланшета



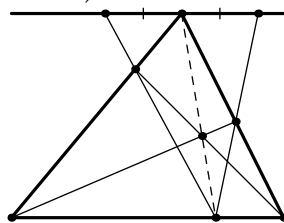
4.12.2)



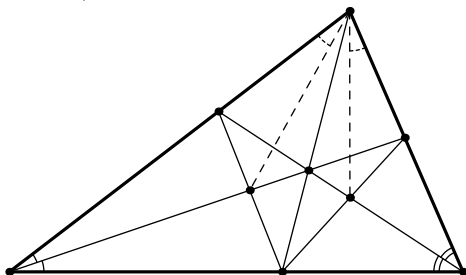
4.12.3)



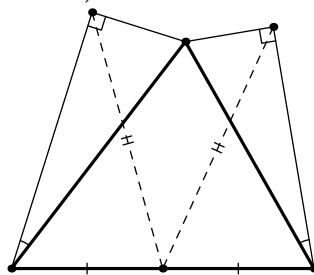
4.12.4)



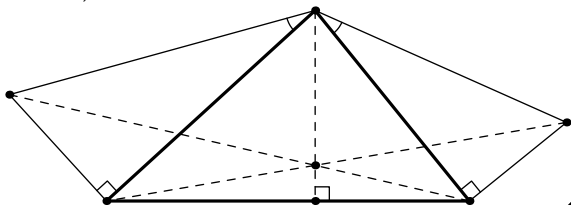
4.12.5)



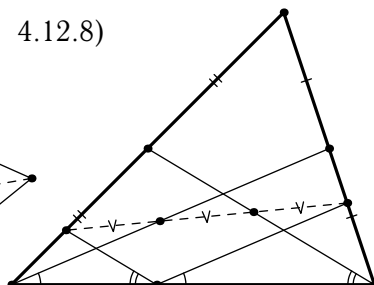
4.12.6)



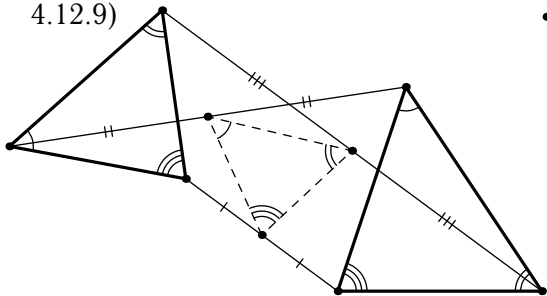
4.12.7)



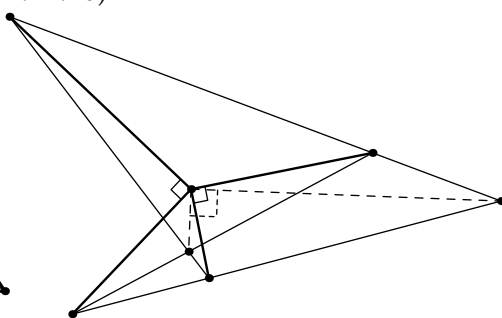
4.12.8)



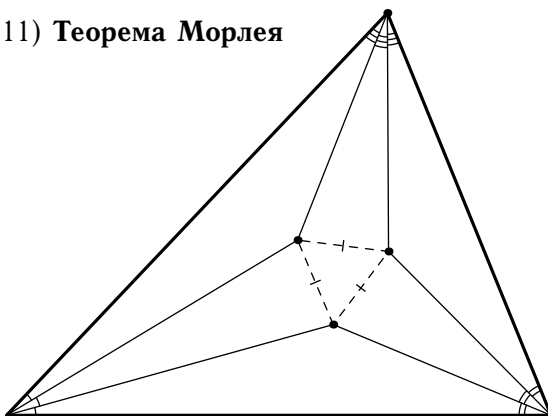
4.12.9)



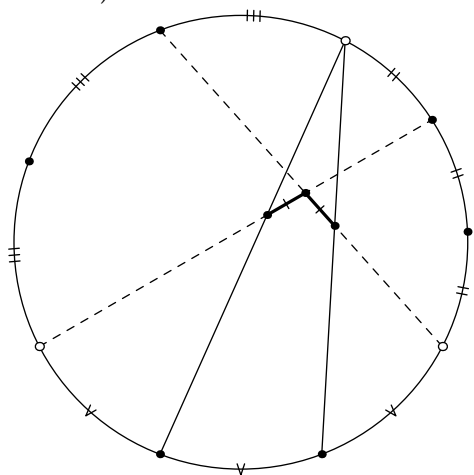
4.12.10)



4.12.11) Теорема Морлея

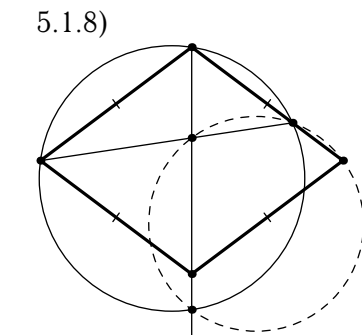
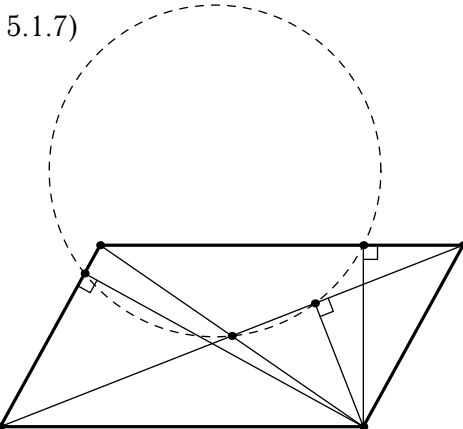
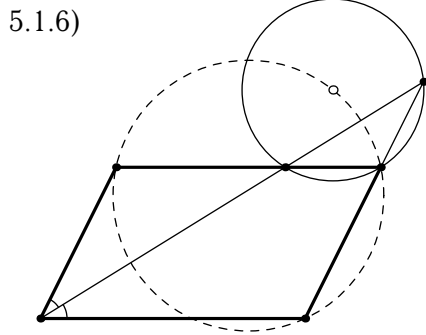
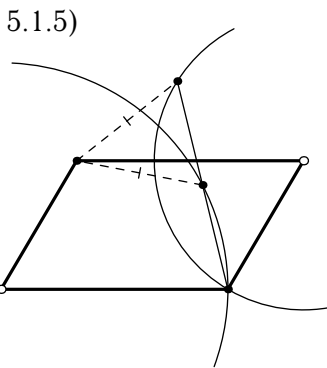
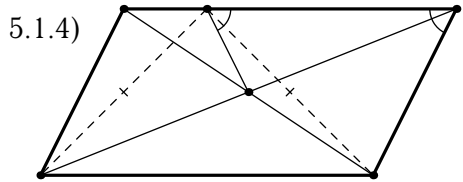
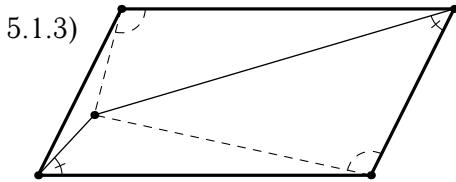
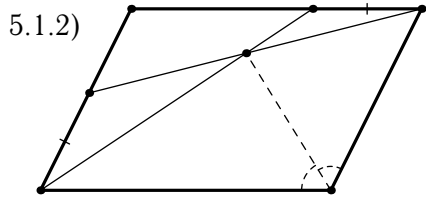
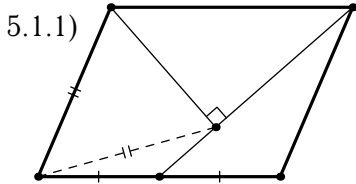


4.12.12)

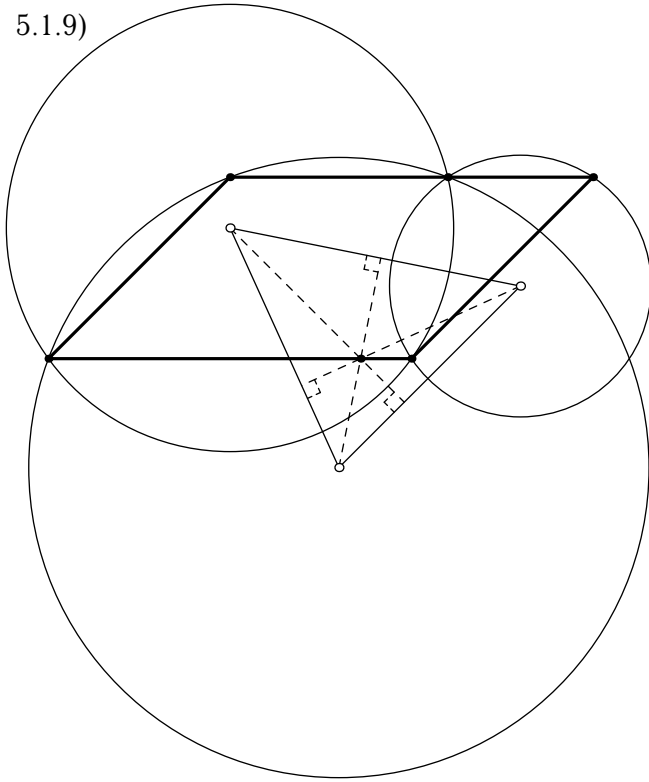


5 Четырёхугольники

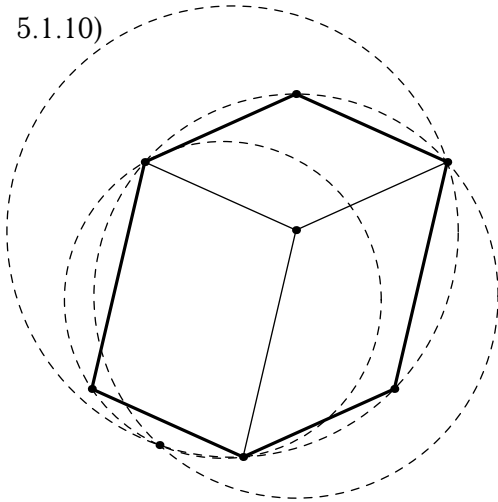
5.1 Параллелограммы



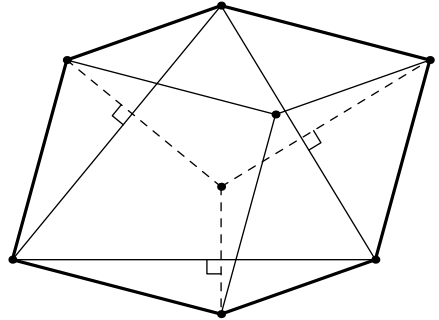
5.1.9)



5.1.10)

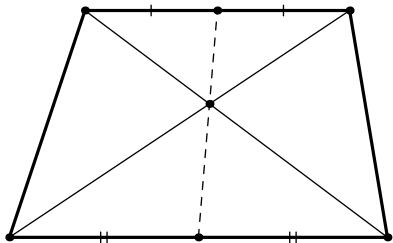


5.1.11)

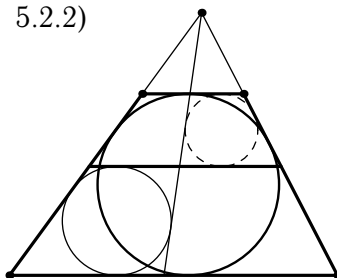


5.2 Трапеции

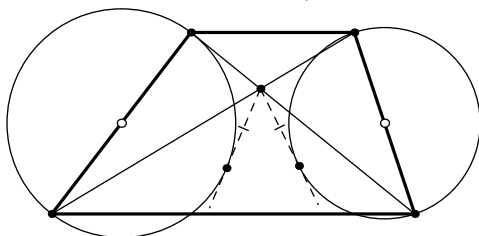
5.2.1)



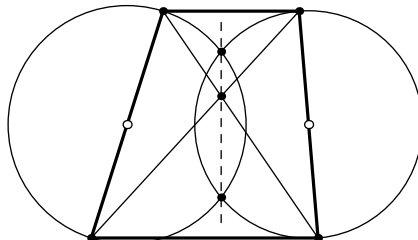
5.2.2)



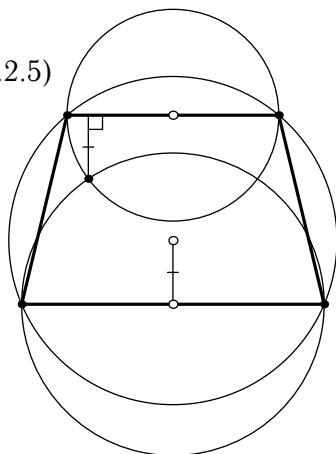
5.2.3)



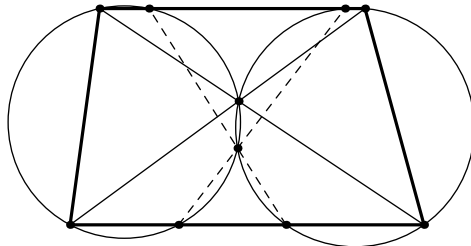
5.2.4)



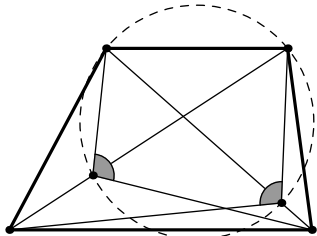
5.2.5)



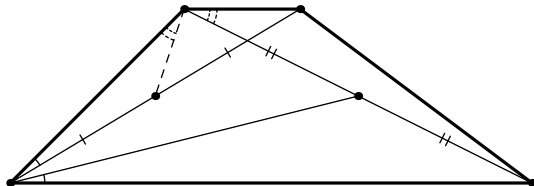
5.2.6)



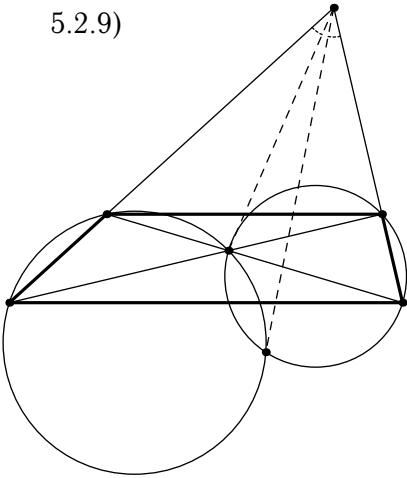
5.2.7)



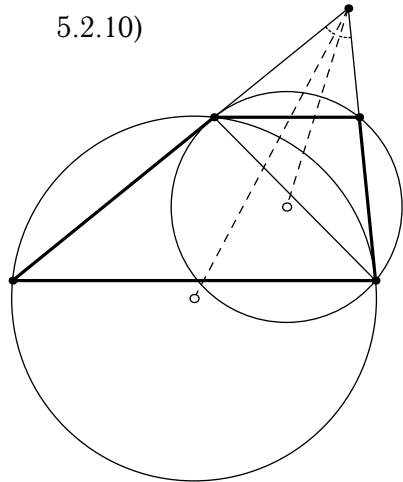
5.2.8)



5.2.9)

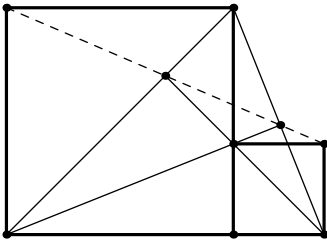


5.2.10)

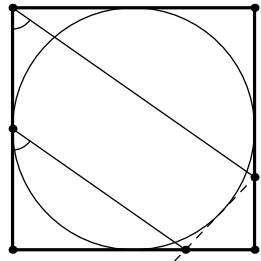


5.3 Квадраты

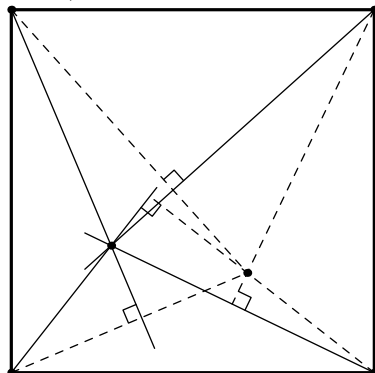
5.3.1)



5.3.2)

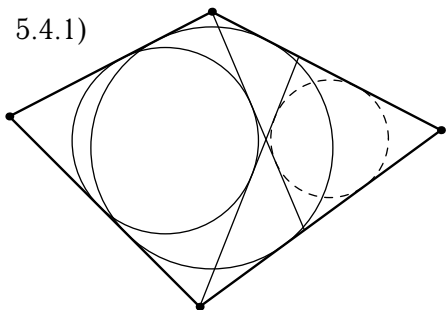


5.3.3)

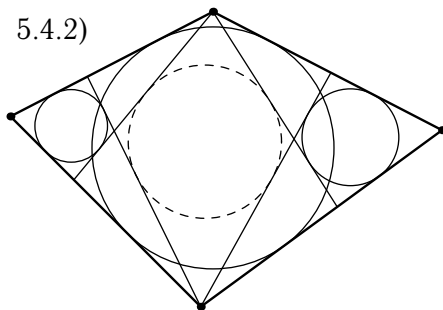


5.4 Описанные четырёхугольники

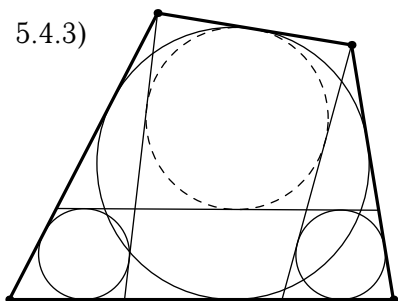
5.4.1)



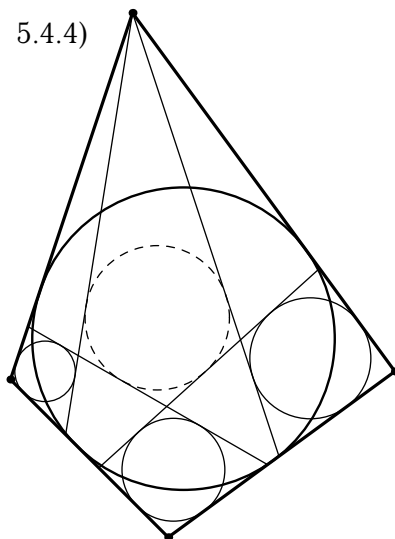
5.4.2)



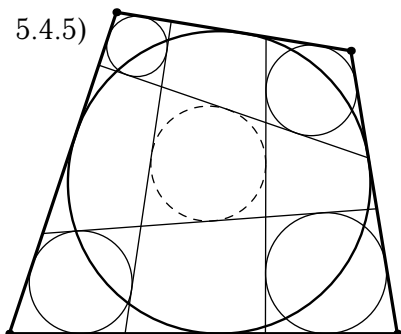
5.4.3)



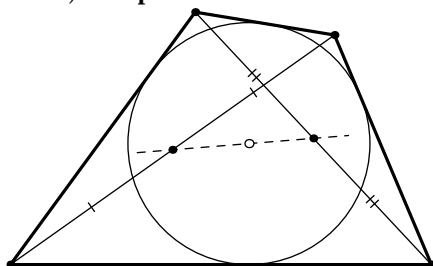
5.4.4)



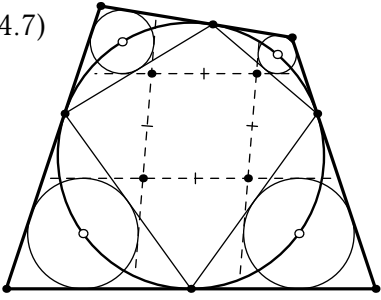
5.4.5)



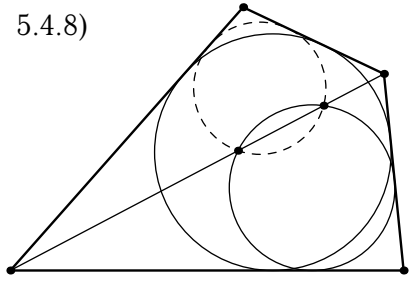
5.4.6) Теорема Ньютона



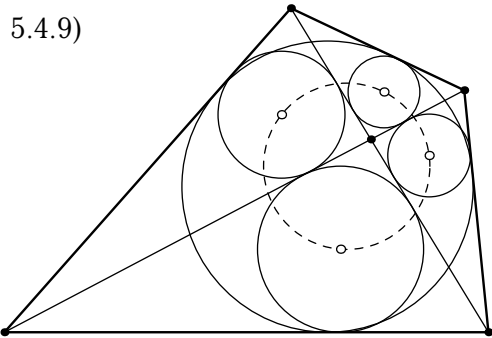
5.4.7)



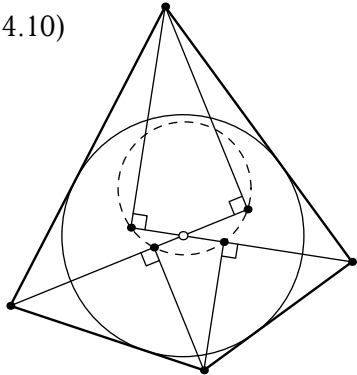
5.4.8)



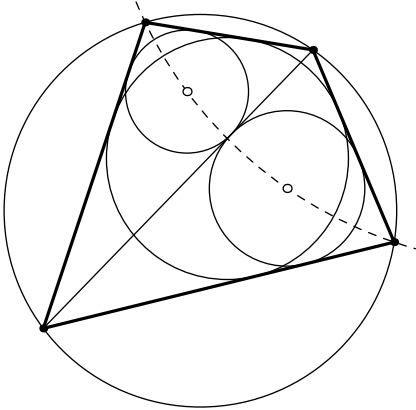
5.4.9)



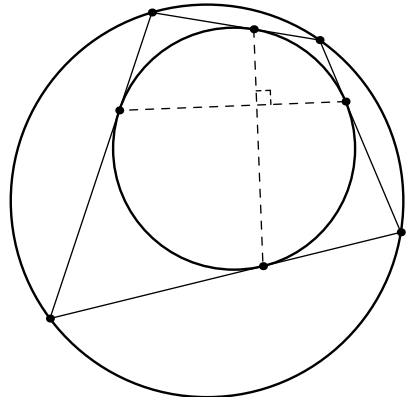
5.4.10)



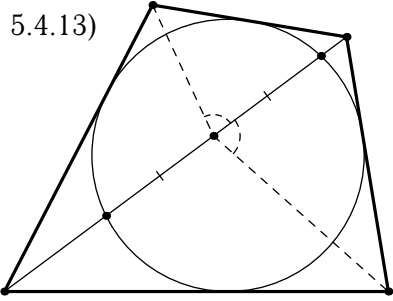
5.4.11)



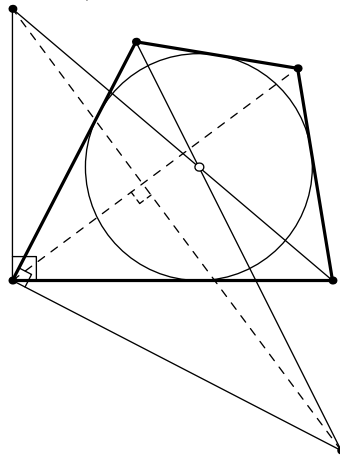
5.4.12)



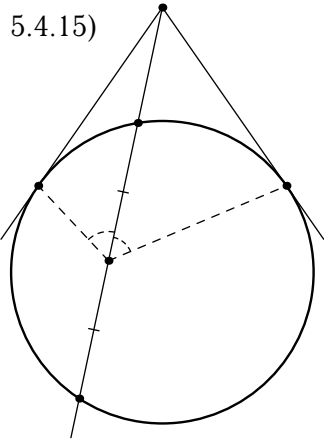
5.4.13)



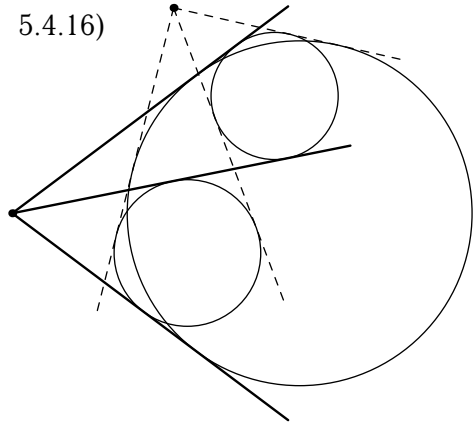
5.4.14)



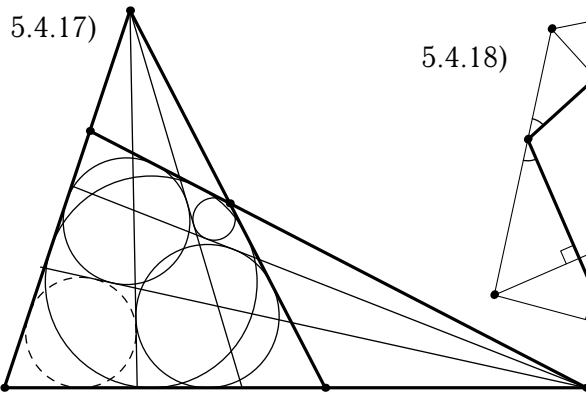
5.4.15)



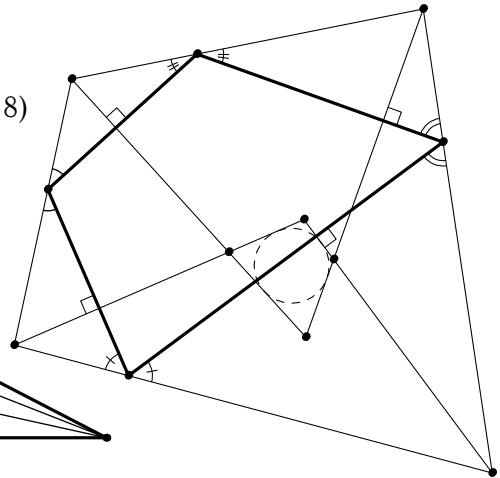
5.4.16)



5.4.17)

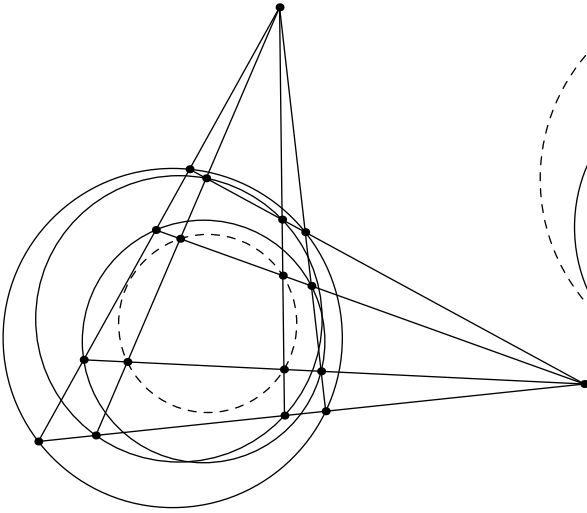


5.4.18)

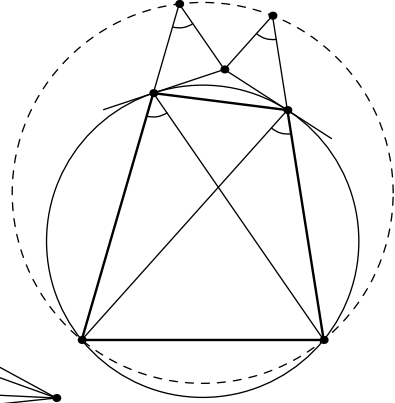


5.5 Вписанные четырёхугольники

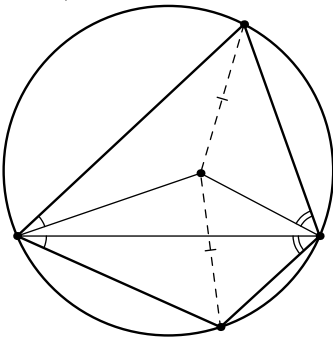
5.5.1)



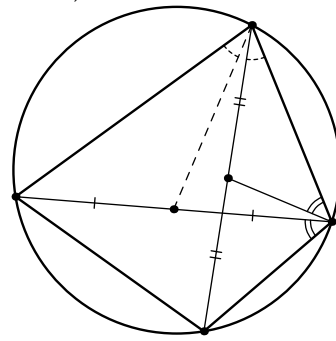
5.5.2)



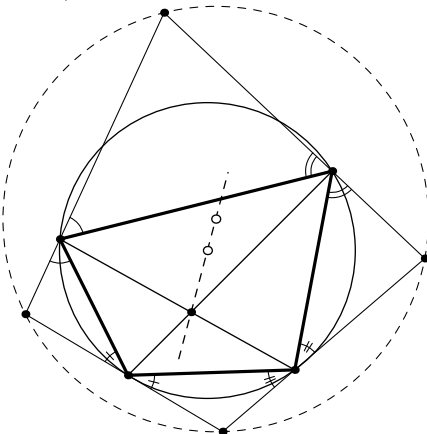
5.5.3)



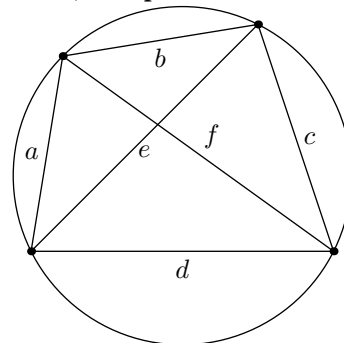
5.5.4)



5.5.5)

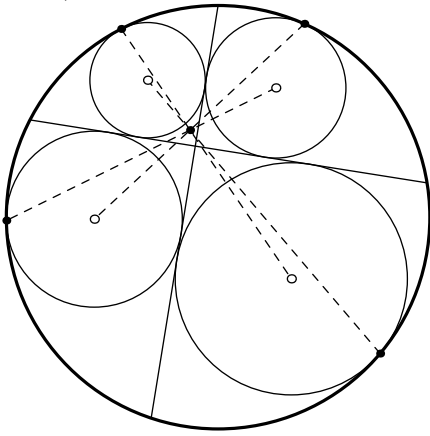


5.5.6) Теорема Птолемея

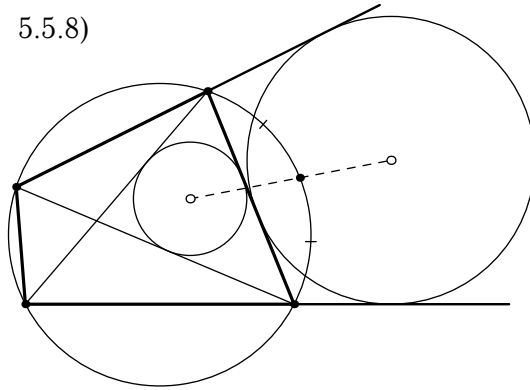


$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

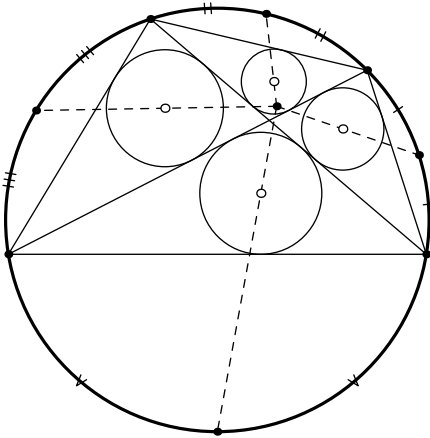
5.5.7)



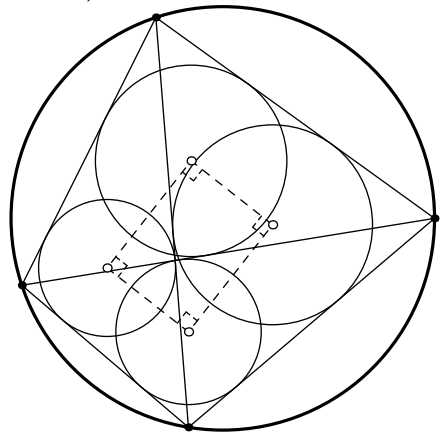
5.5.8)



5.5.9)

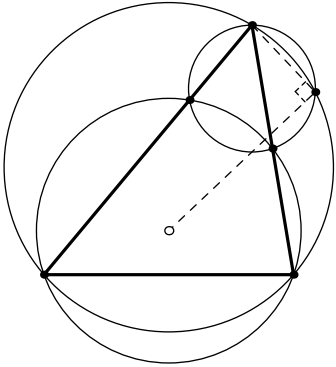


5.5.10)

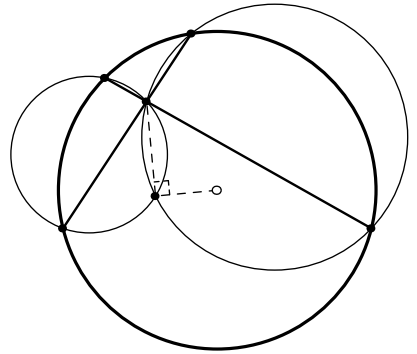


5.6 Четыре точки на окружности

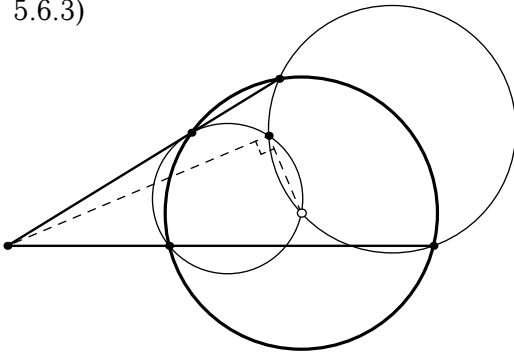
5.6.1)



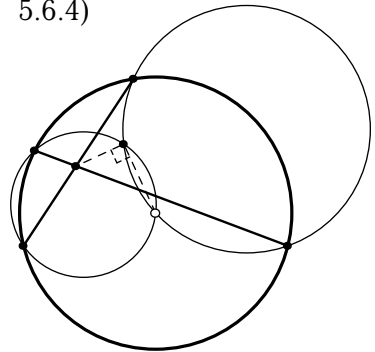
5.6.2)



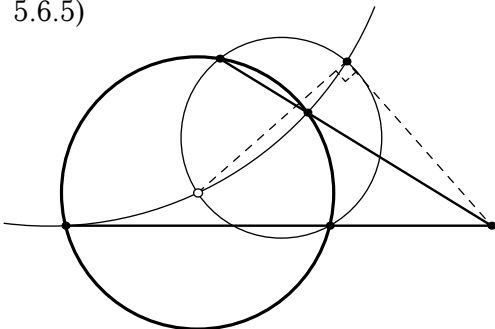
5.6.3)



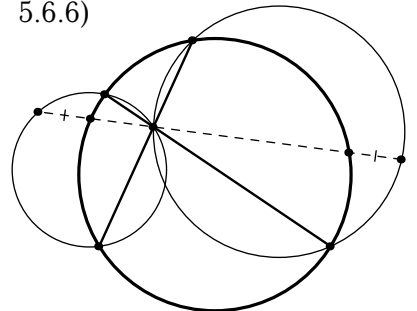
5.6.4)



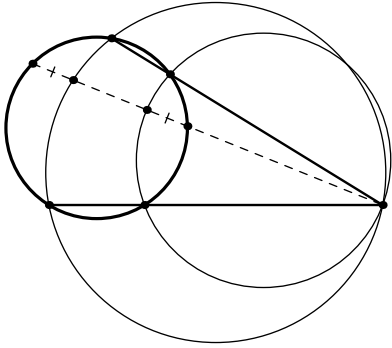
5.6.5)



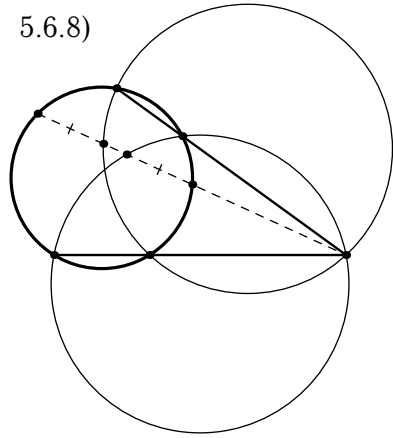
5.6.6)



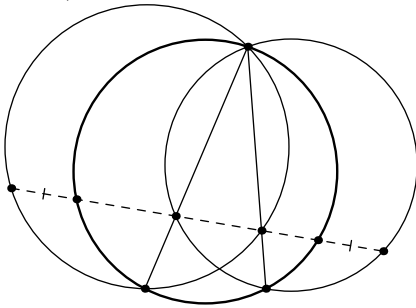
5.6.7)



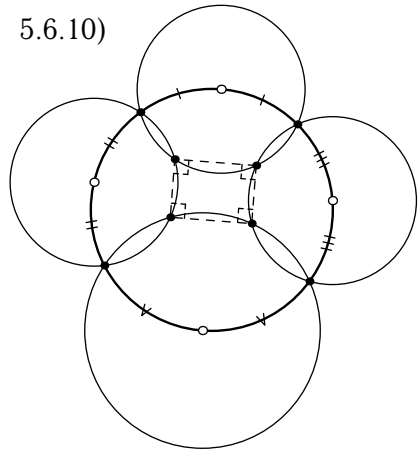
5.6.8)



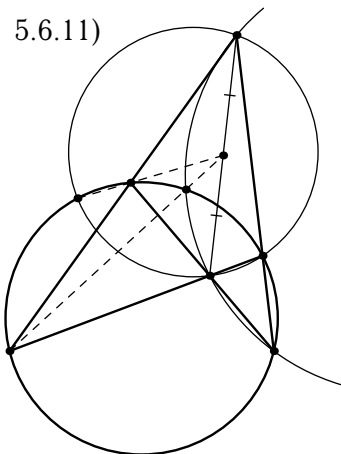
5.6.9)



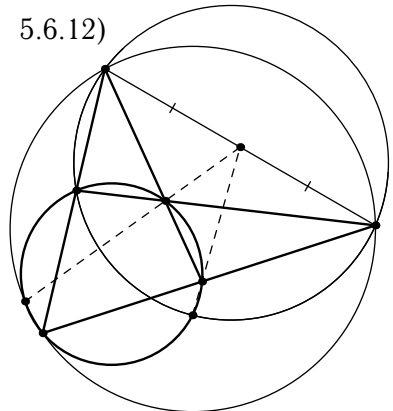
5.6.10)



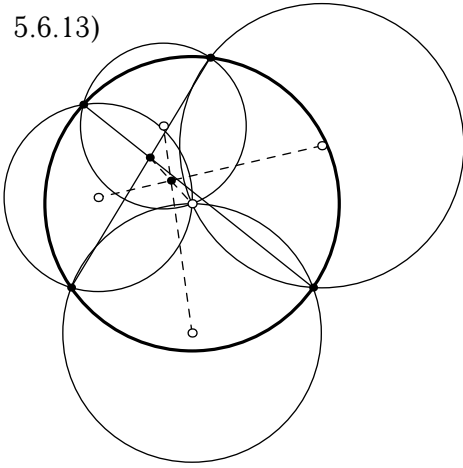
5.6.11)



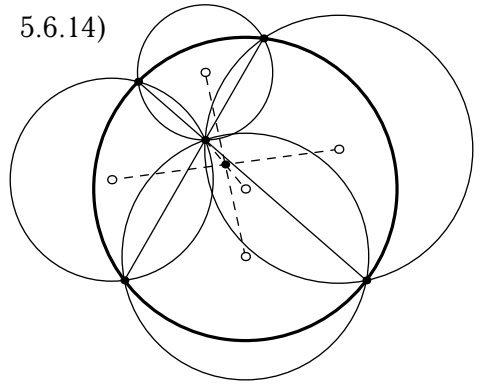
5.6.12)



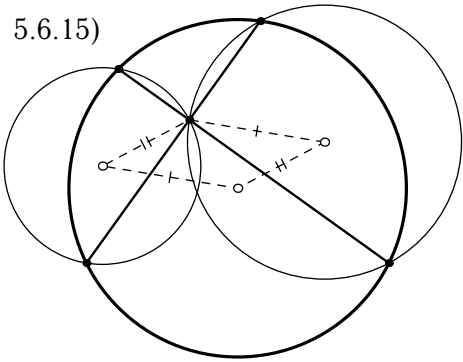
5.6.13)



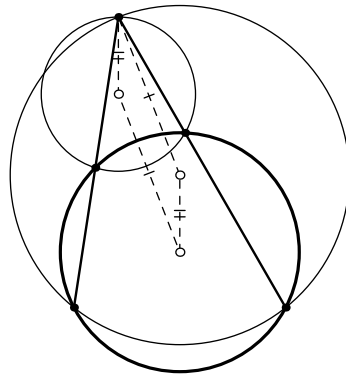
5.6.14)



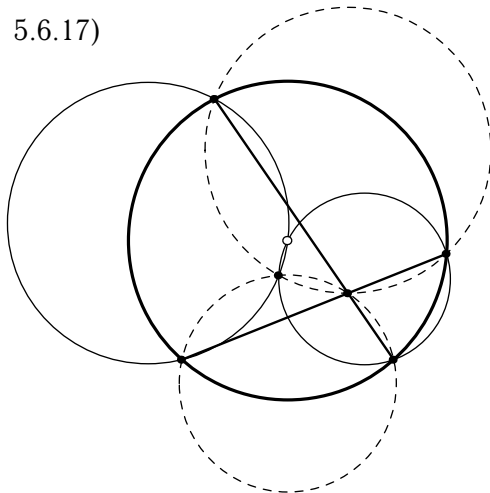
5.6.15)



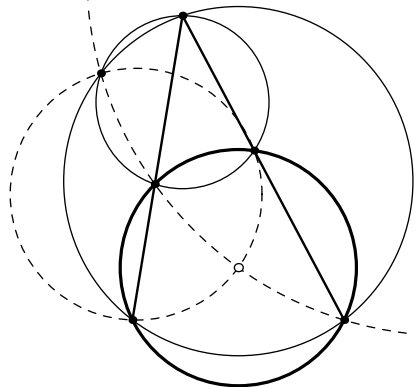
5.6.16)



5.6.17)

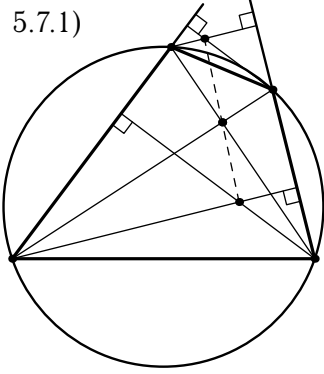


5.6.18)

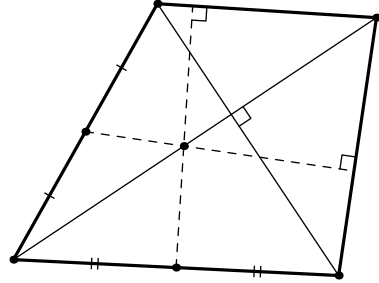


5.7 Высоты в четырёхугольнике

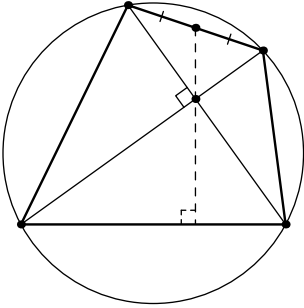
5.7.1)



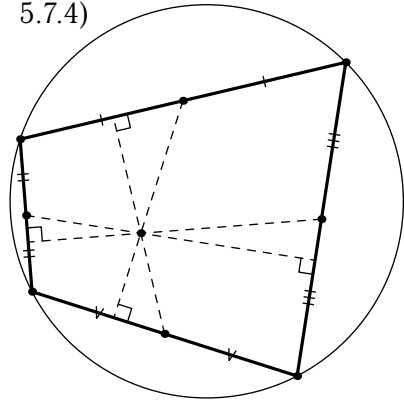
5.7.2)



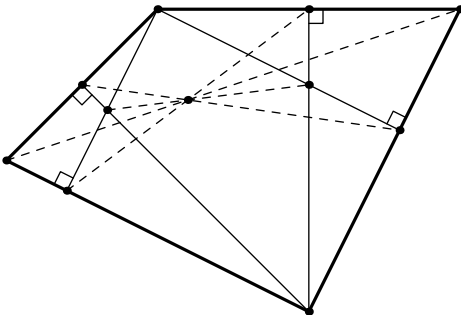
5.7.3) Теорема Брахмагупты



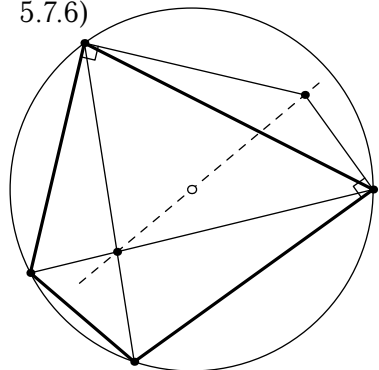
5.7.4)



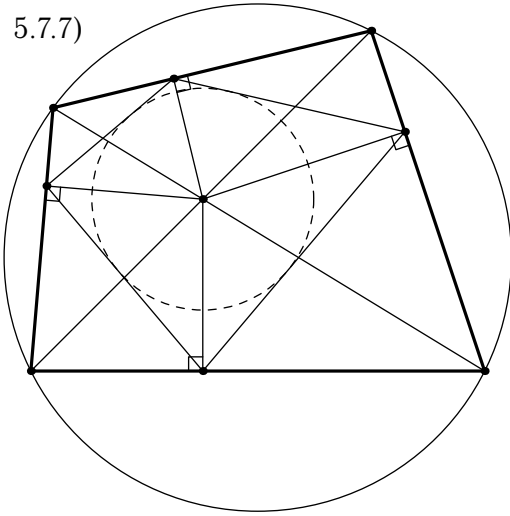
5.7.5)



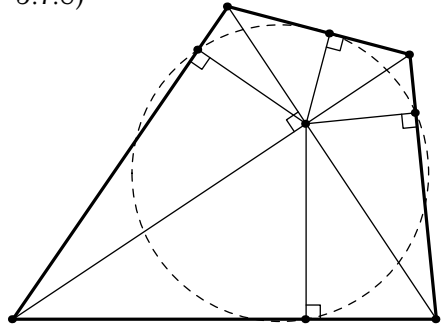
5.7.6)



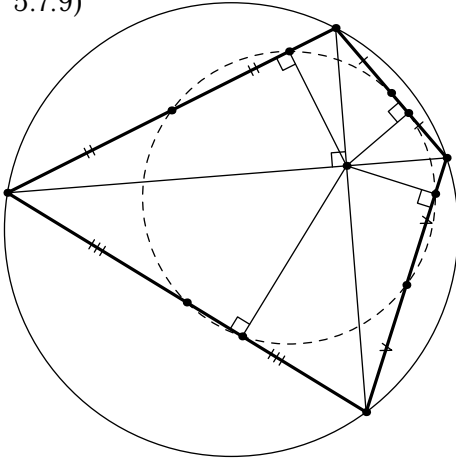
5.7.7)



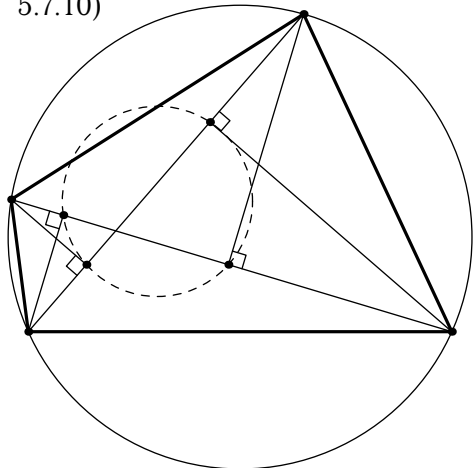
5.7.8)



5.7.9)



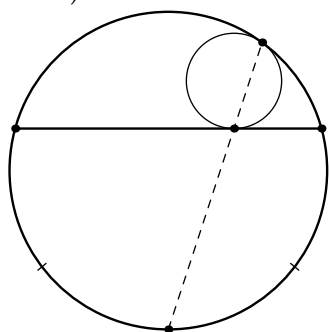
5.7.10)



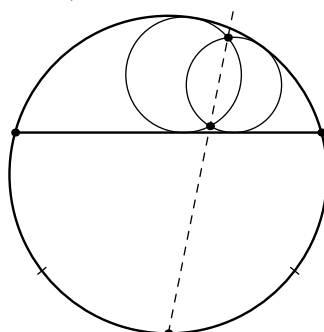
6 Окружности

6.1 Касающиеся окружности

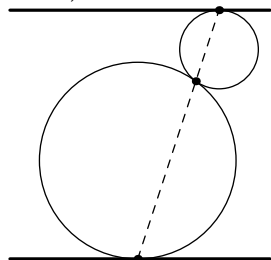
6.1.1)



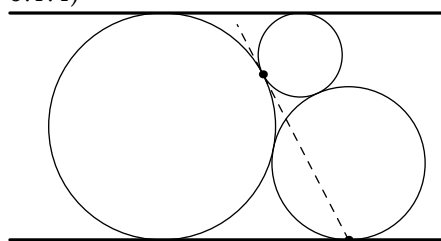
6.1.2)



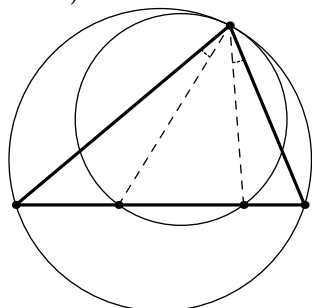
6.1.3)



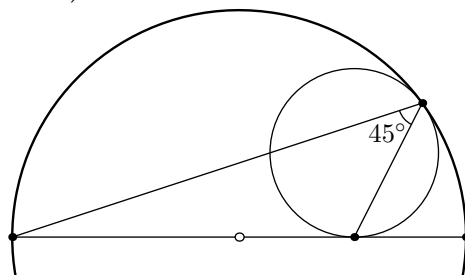
6.1.4)



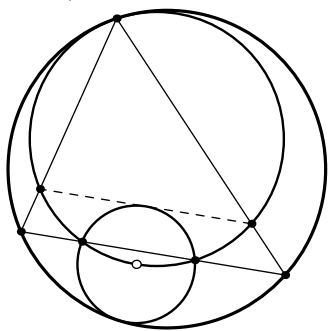
6.1.5)



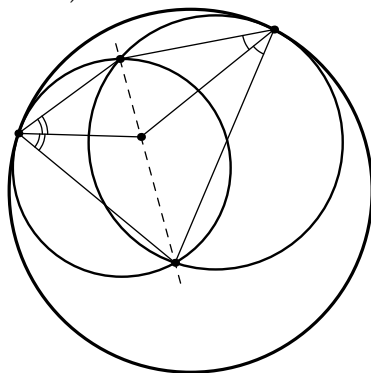
6.1.6)



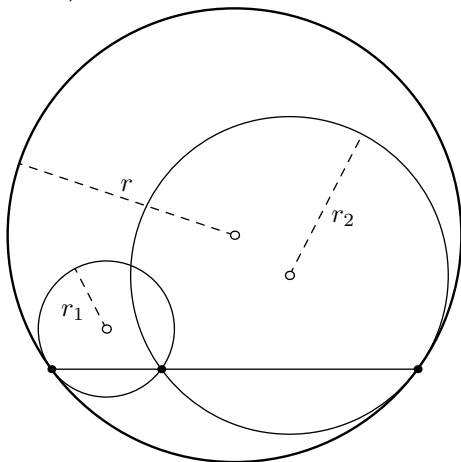
6.1.7)



6.1.8)

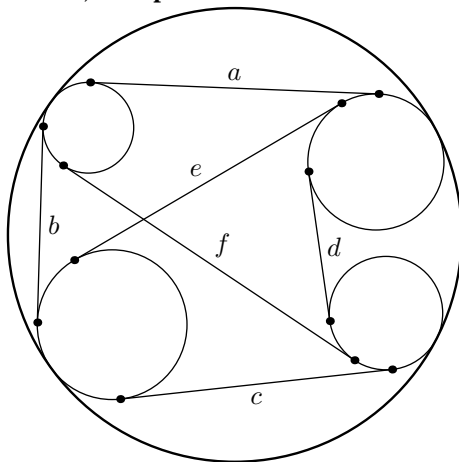


6.1.9)



$$r = r_1 + r_2$$

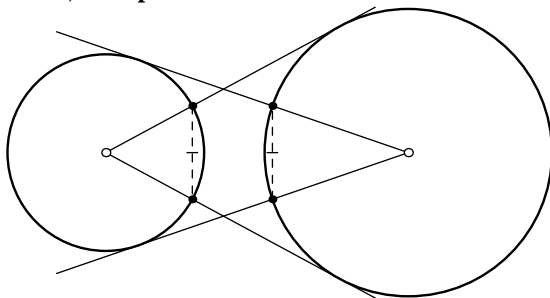
6.1.10) Теорема Кэзи



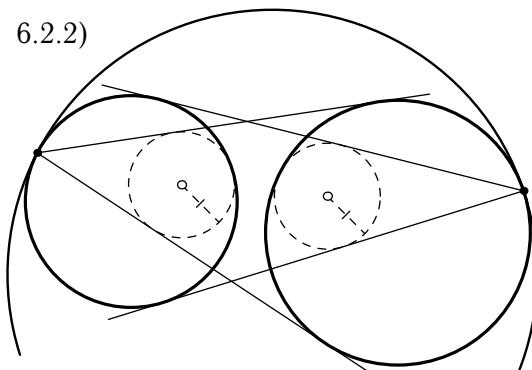
$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

6.2 Вокруг теоремы Монжа

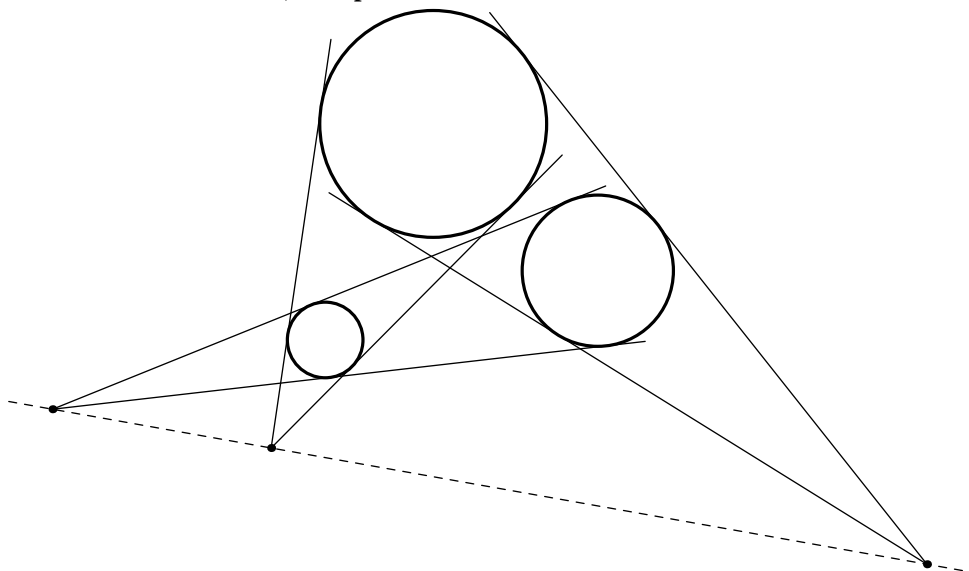
6.2.1) Теорема о глазных яблоках



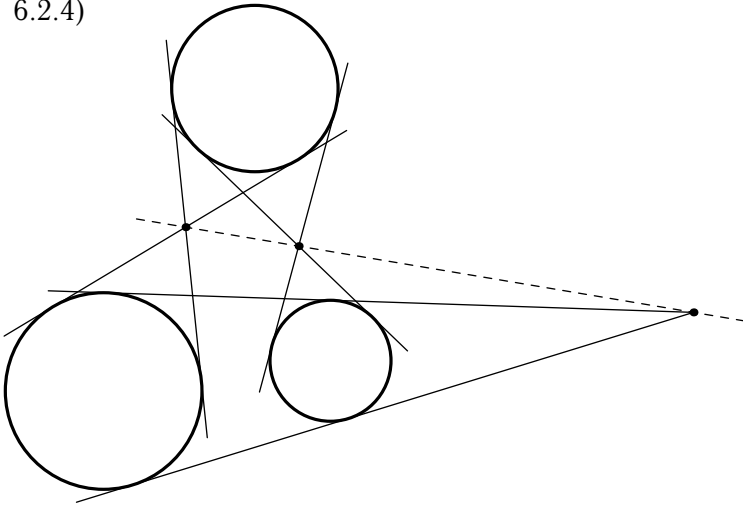
6.2.2)



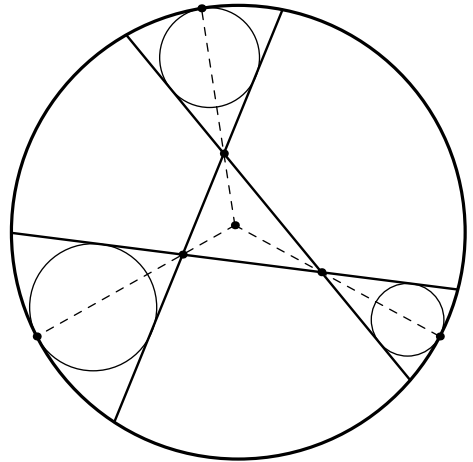
6.2.3) Теорема Монжа



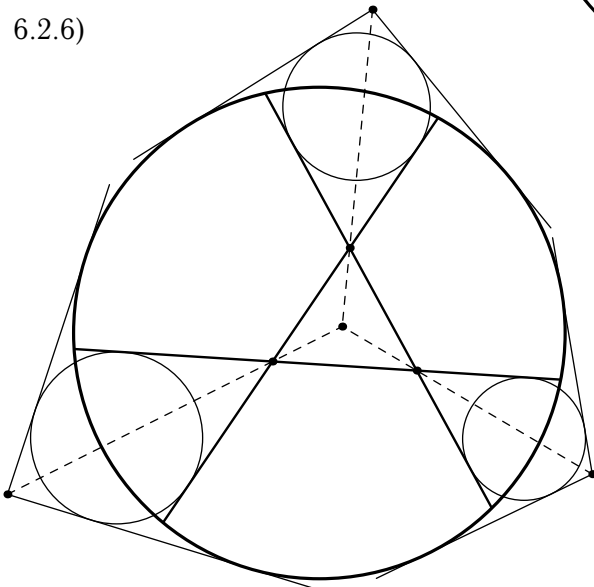
6.2.4)



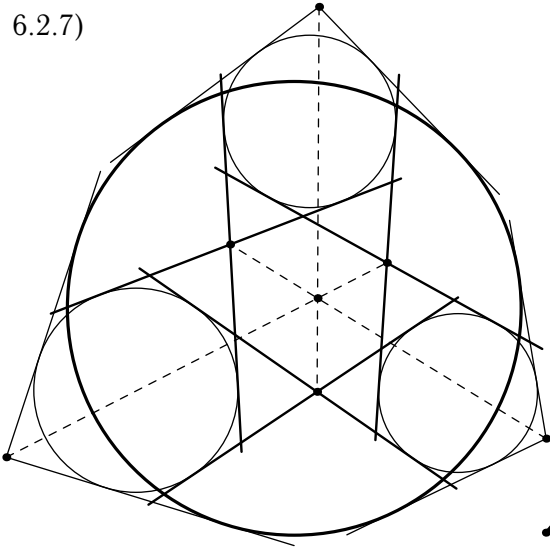
6.2.5)



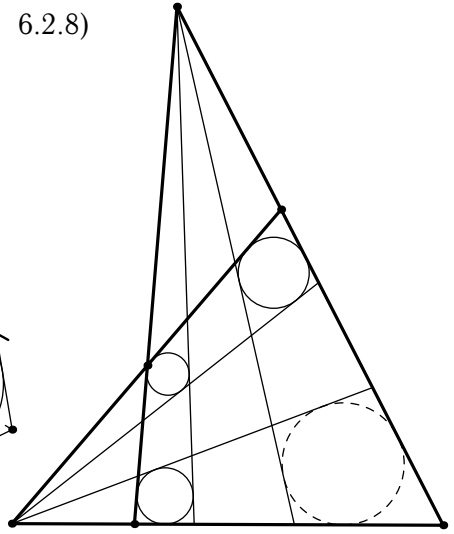
6.2.6)



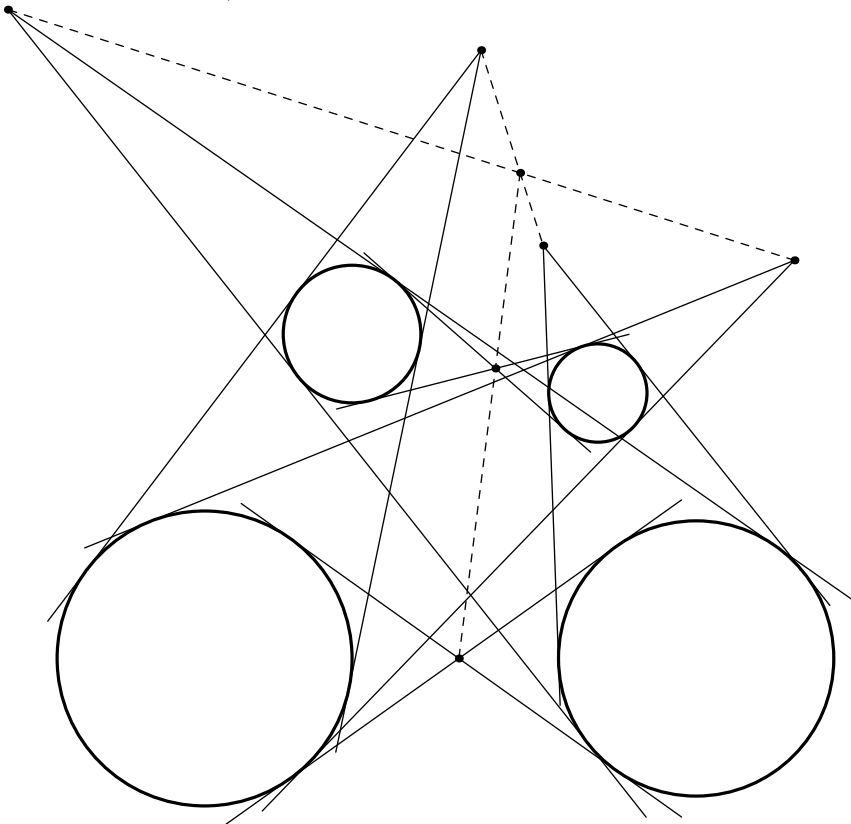
6.2.7)



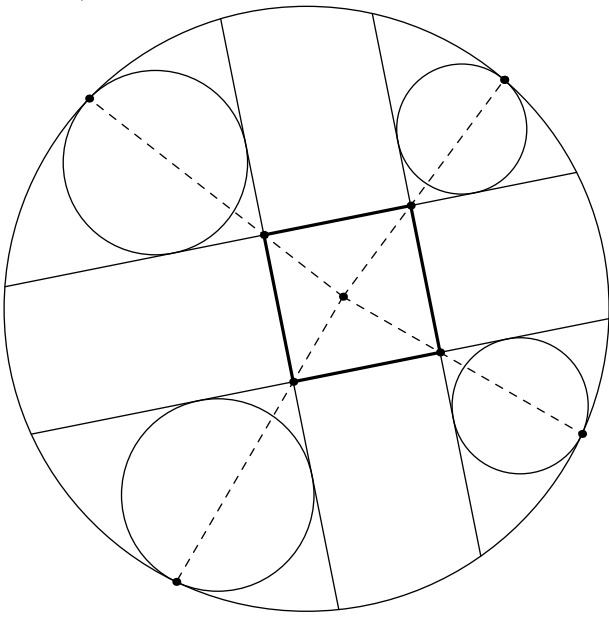
6.2.8)



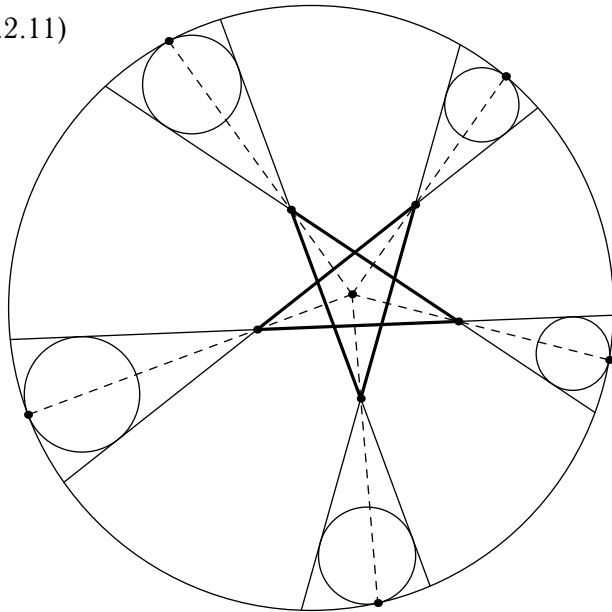
6.2.9)



6.2.10)

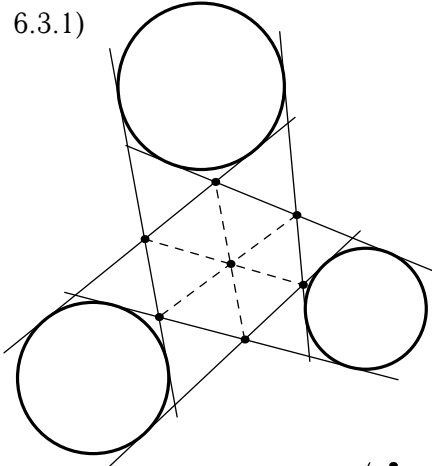


6.2.11)

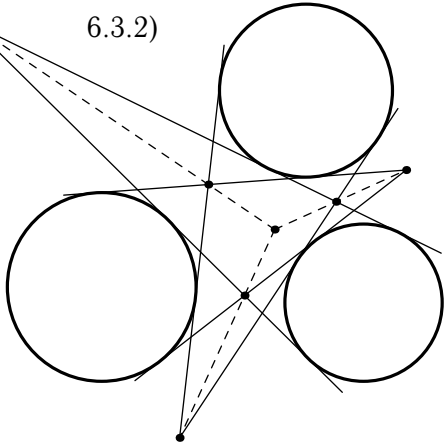


6.3 Три окружности и общие касательные

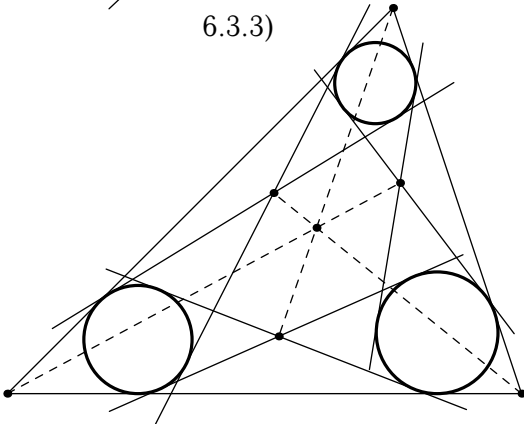
6.3.1)



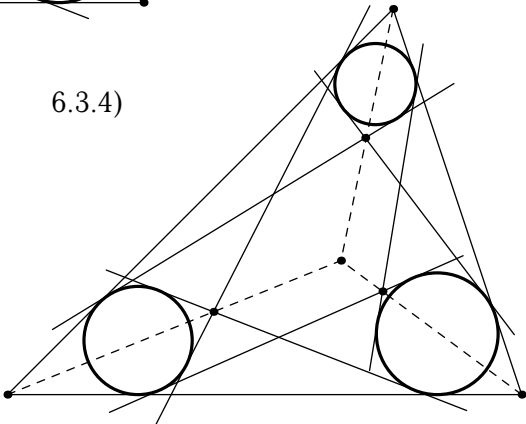
6.3.2)

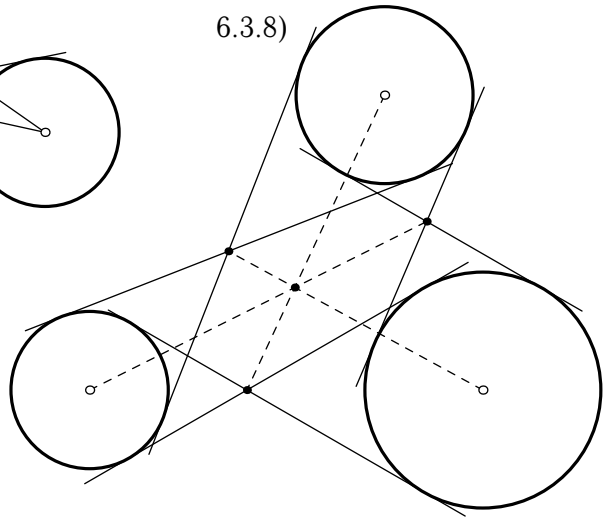
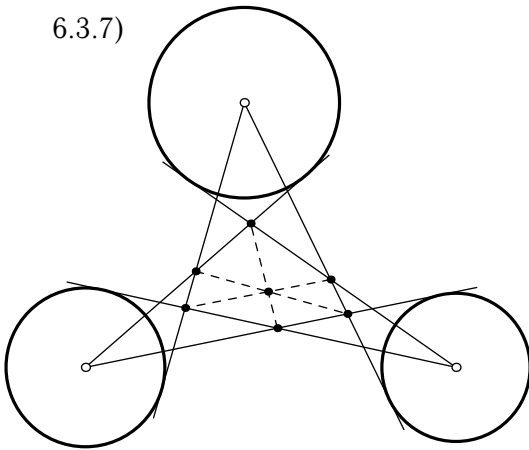
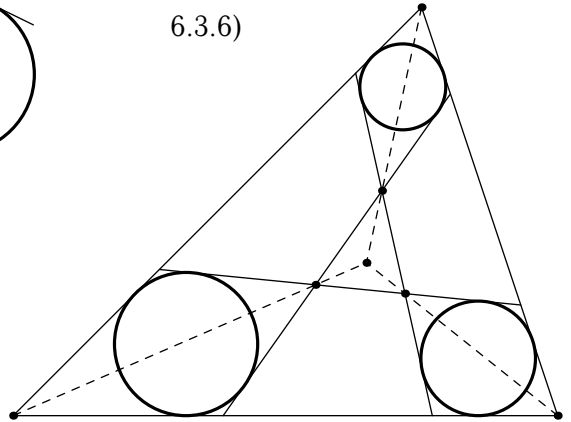
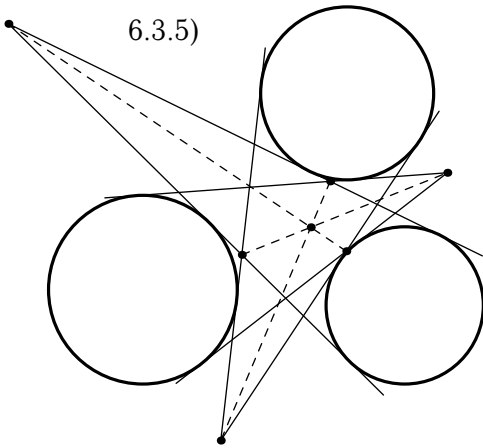


6.3.3)



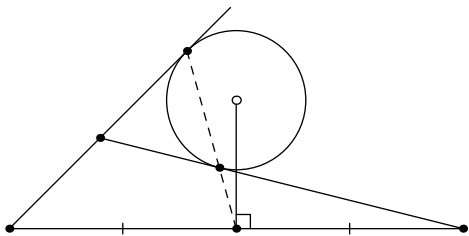
6.3.4)



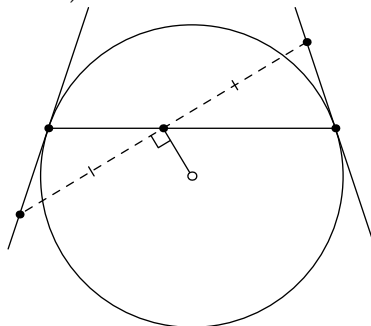


6.4 Теорема о бабочке

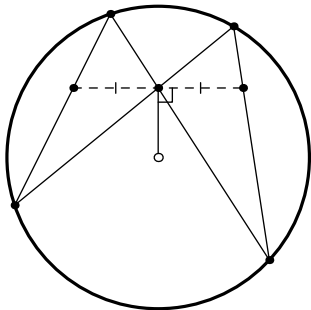
6.4.1)



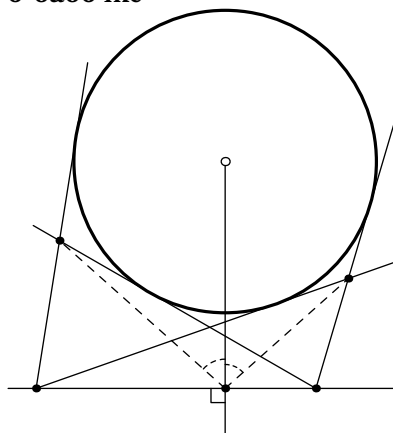
6.4.2)



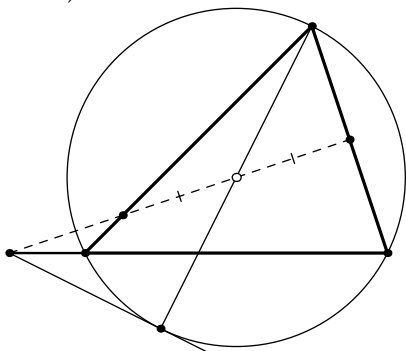
6.4.3) Теорема о бабочке



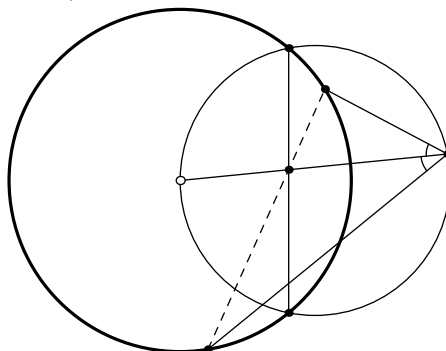
6.4.4) Двойственная теорема о бабочке



6.4.5)

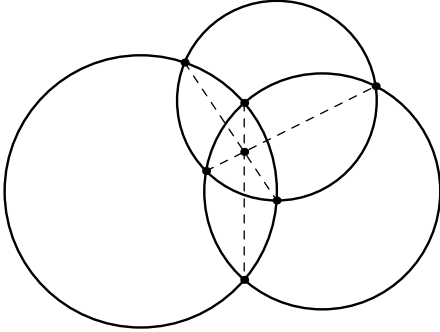


6.4.6)

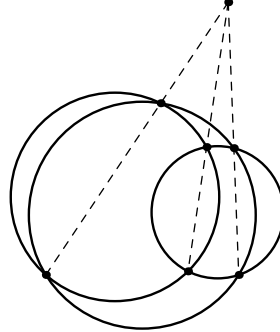


6.5 Степень точки и связанные конструкции

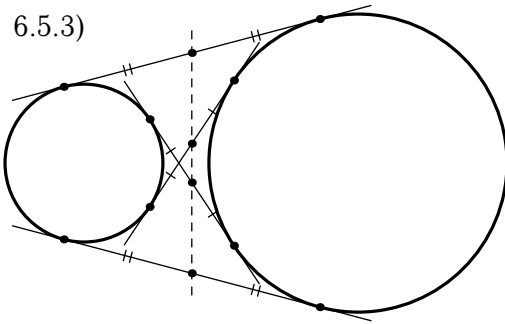
6.5.1) Теорема о трёх лепестках



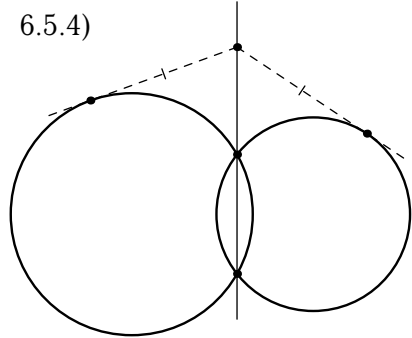
6.5.2)



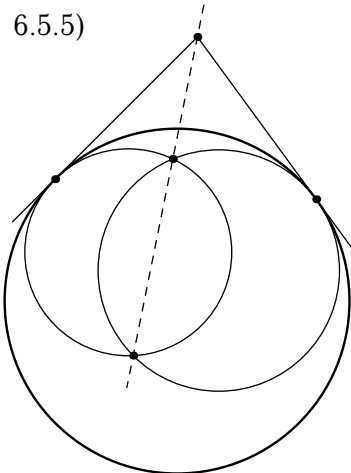
6.5.3)



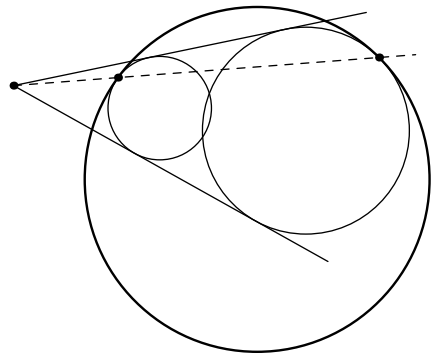
6.5.4)



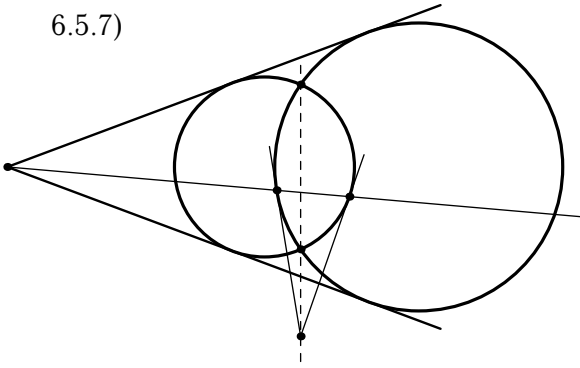
6.5.5)



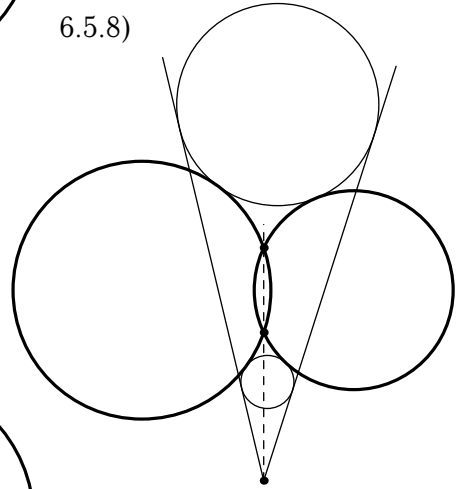
6.5.6)



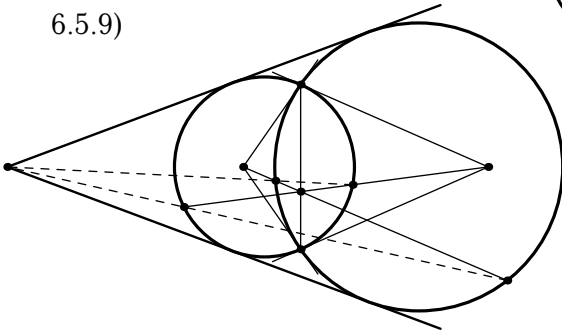
6.5.7)



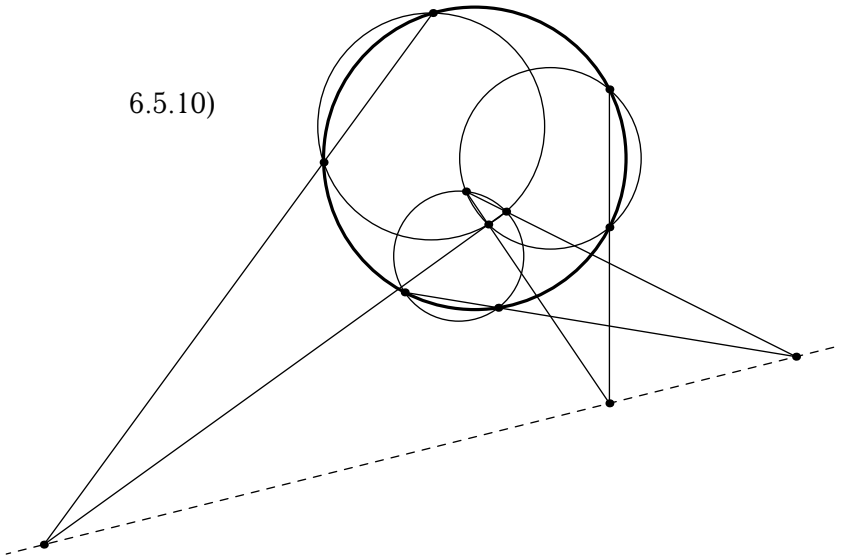
6.5.8)



6.5.9)

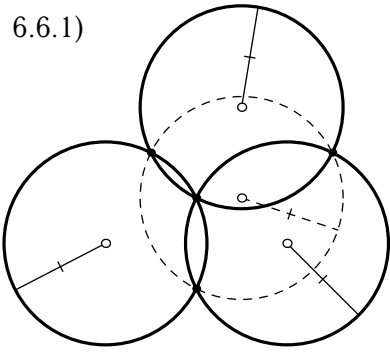


6.5.10)

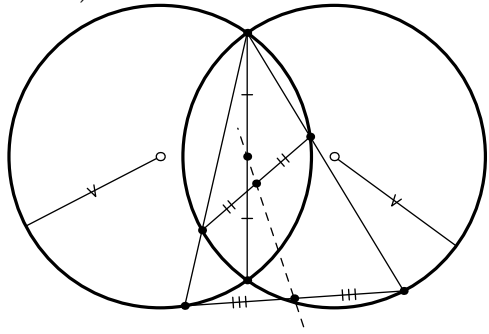


6.6 Равные окружности

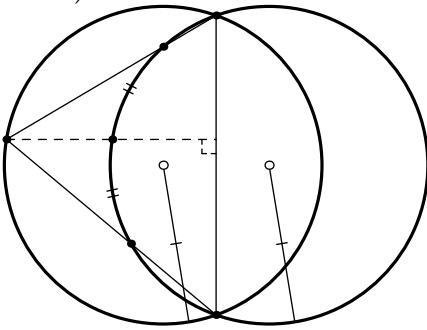
6.6.1)



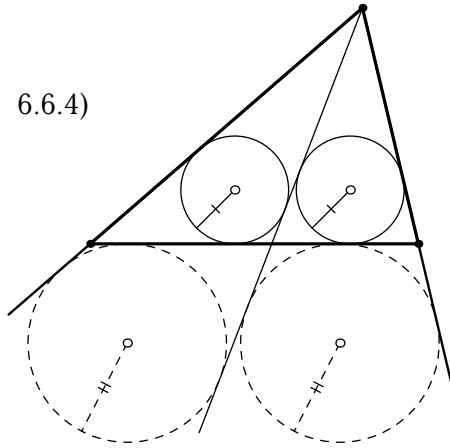
6.6.2)



6.6.3)

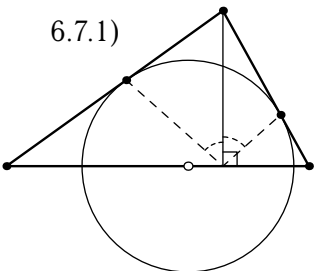


6.6.4)

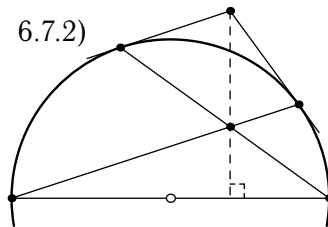


6.7 Диаметр окружности

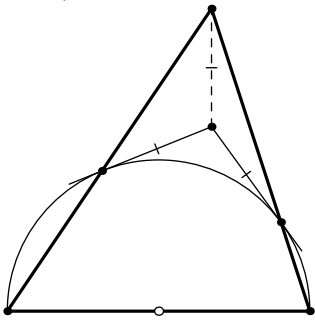
6.7.1)



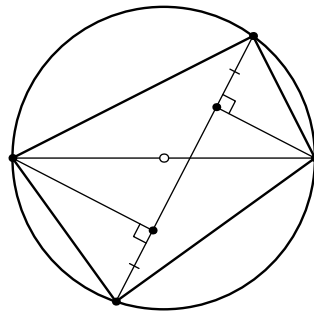
6.7.2)



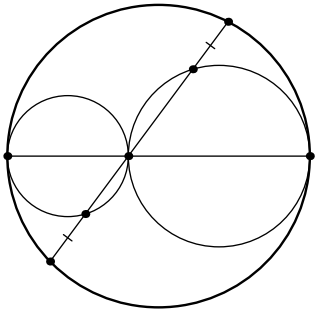
6.7.3)



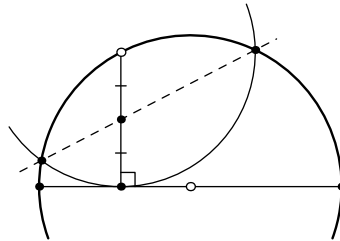
6.7.4)



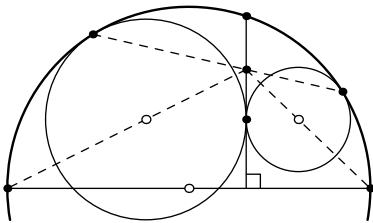
6.7.5)



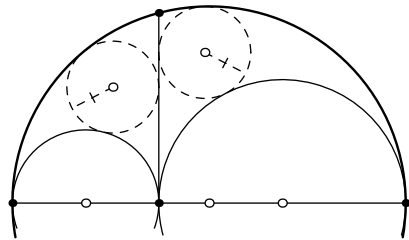
6.7.6)



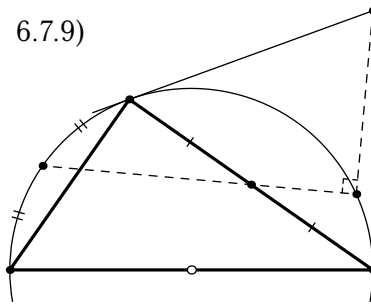
6.7.7)



6.7.8)

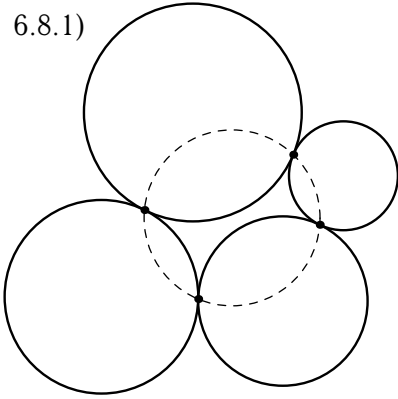


6.7.9)

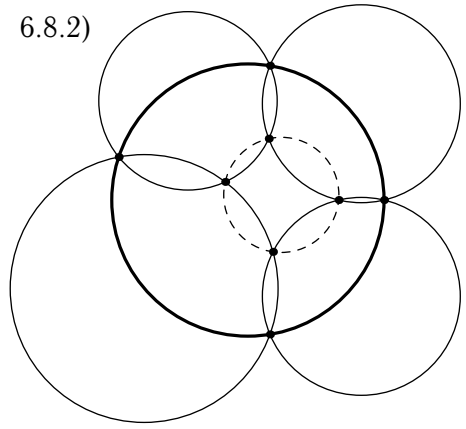


6.8 Конструкции из окружностей

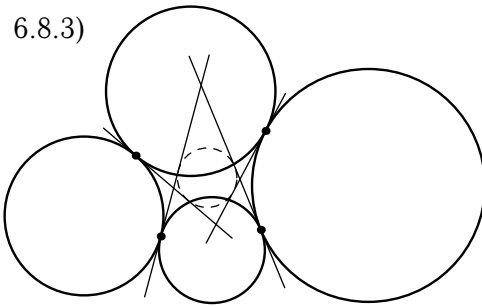
6.8.1)



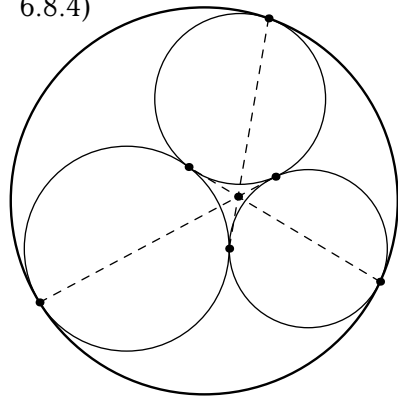
6.8.2)



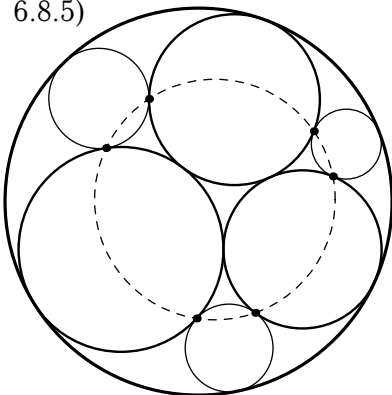
6.8.3)



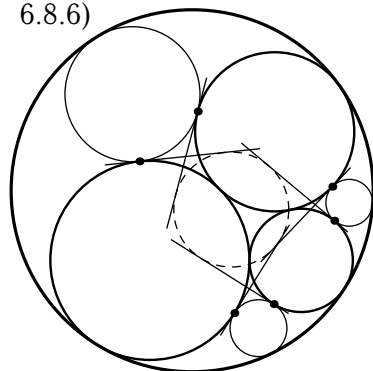
6.8.4)



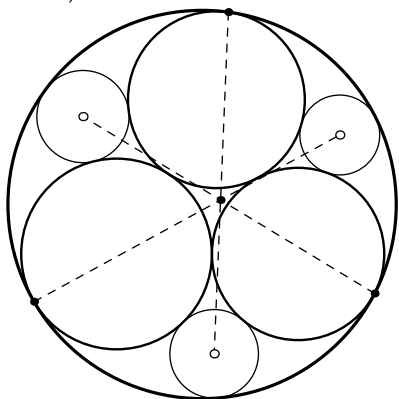
6.8.5)



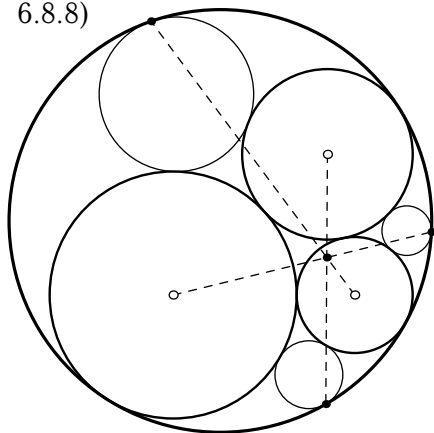
6.8.6)



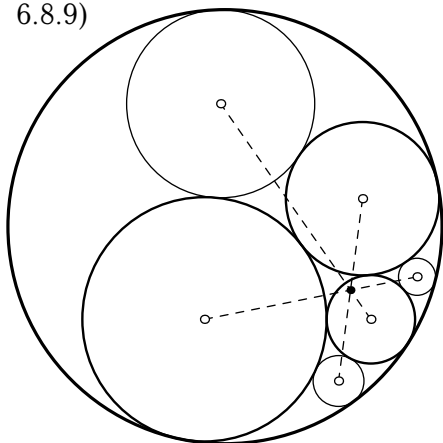
6.8.7)



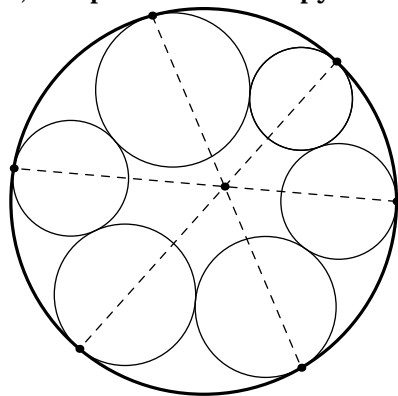
6.8.8)



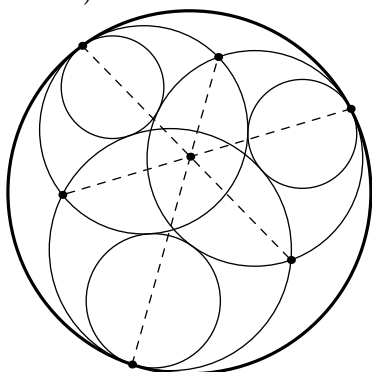
6.8.9)



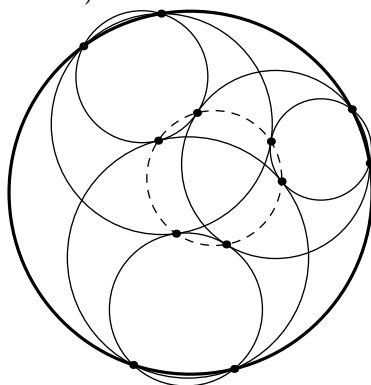
6.8.10) Теорема о семи окружностях



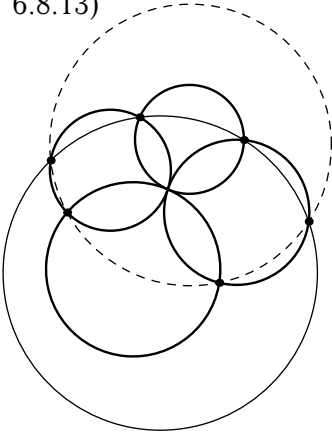
6.8.11)



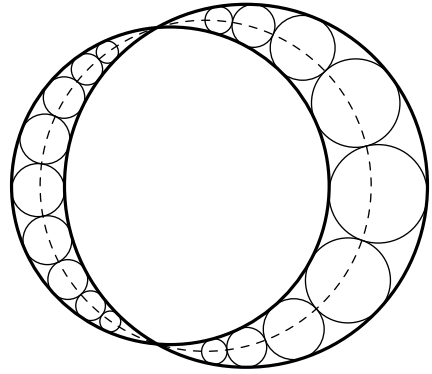
6.8.12)



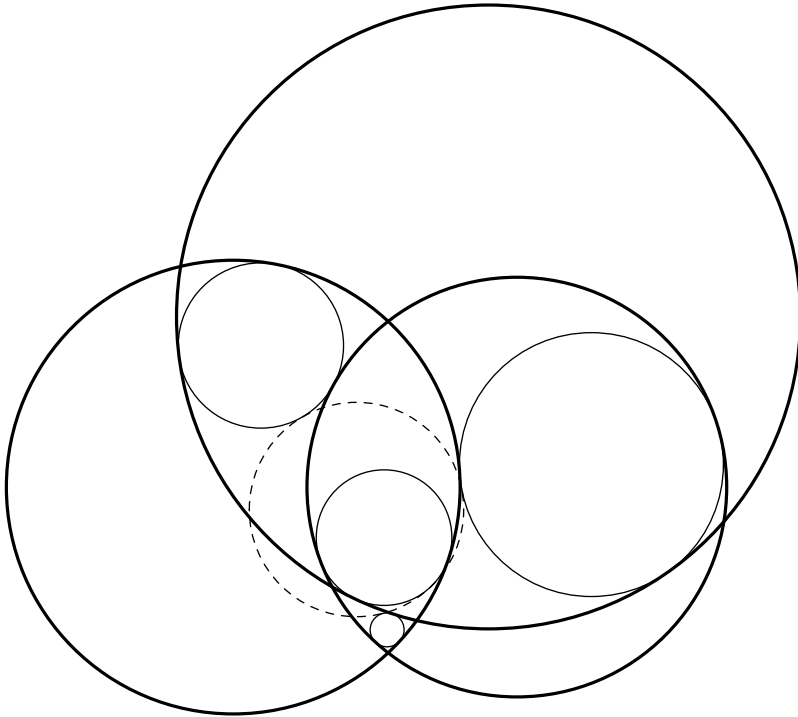
6.8.13)



6.8.14)

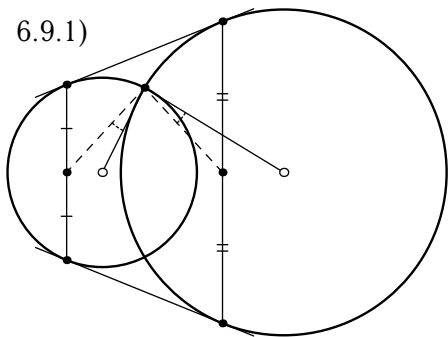


6.8.15) Теорема Харга

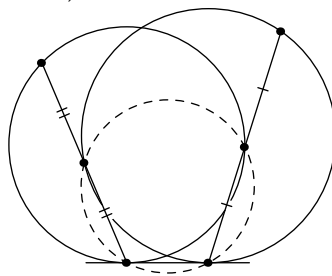


6.9 Окружности, касающиеся прямой

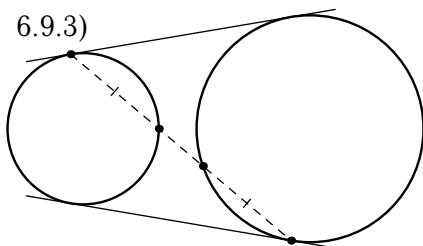
6.9.1)



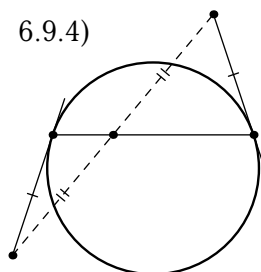
6.9.2)



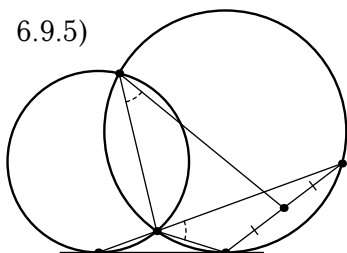
6.9.3)



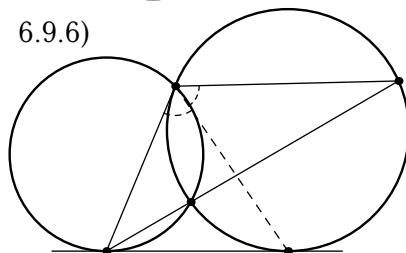
6.9.4)



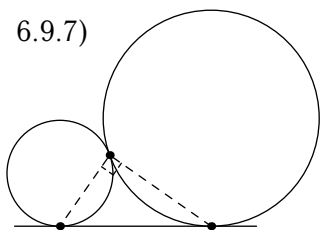
6.9.5)



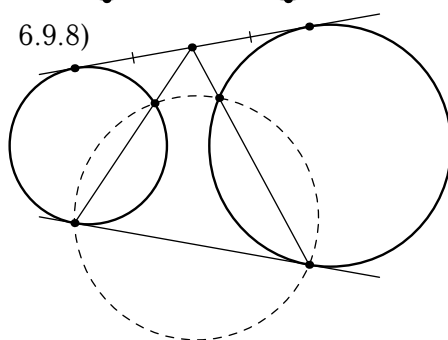
6.9.6)



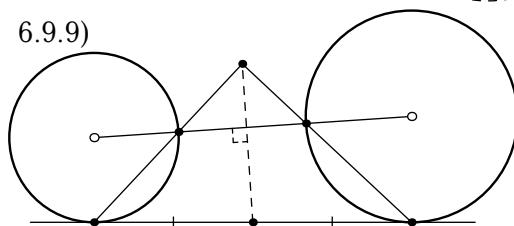
6.9.7)



6.9.8)

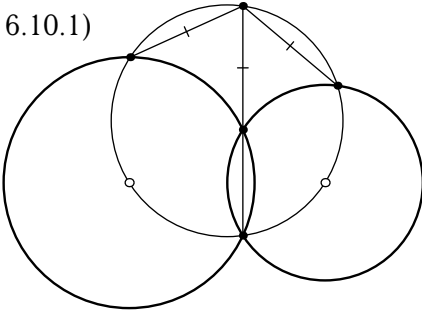


6.9.9)

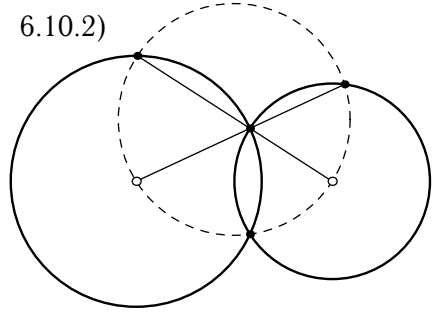


6.10 Разные задачи

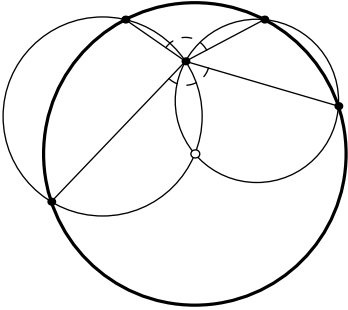
6.10.1)



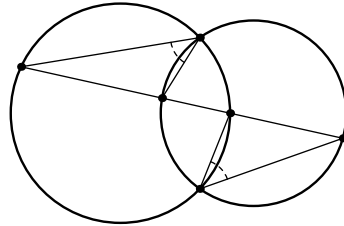
6.10.2)



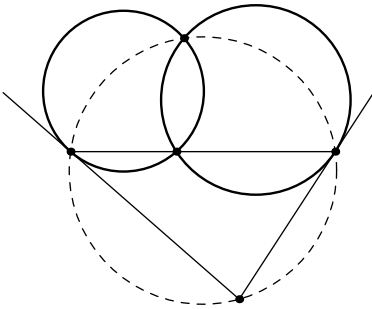
6.10.3)



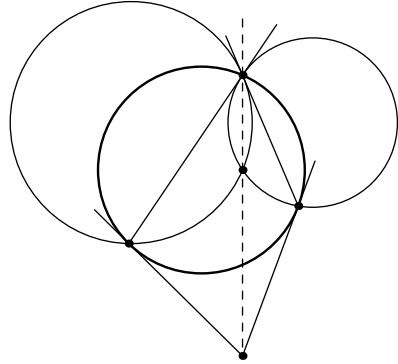
6.10.4)



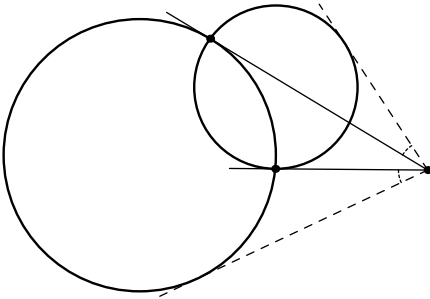
6.10.5)



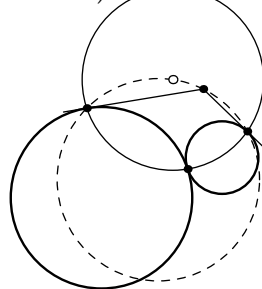
6.10.6)



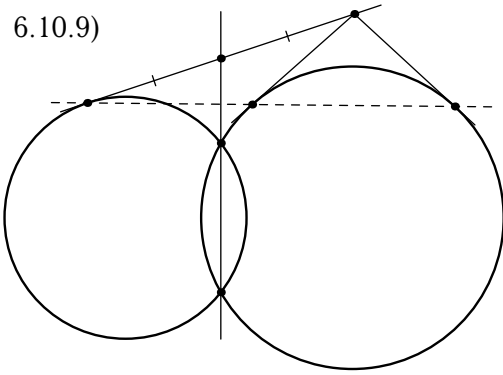
6.10.7)



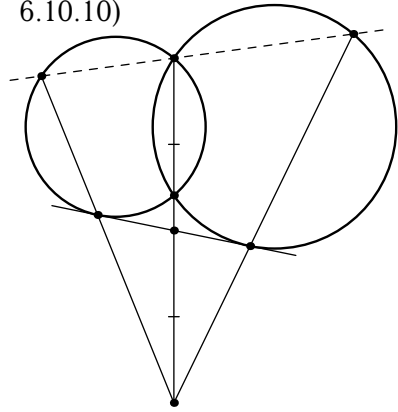
6.10.8)



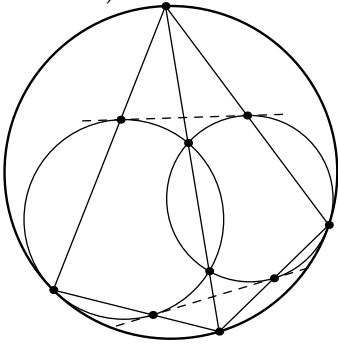
6.10.9)



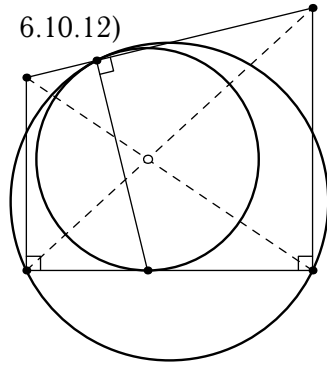
6.10.10)



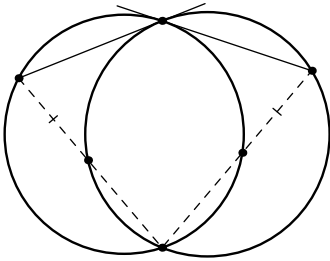
6.10.11)



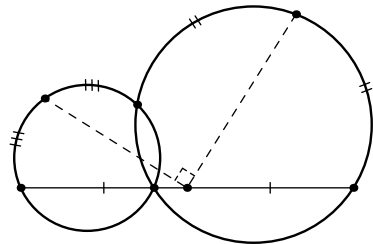
6.10.12)



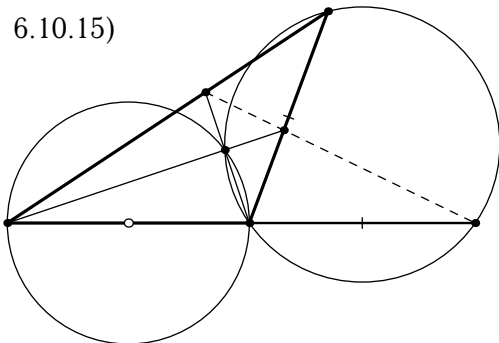
6.10.13)



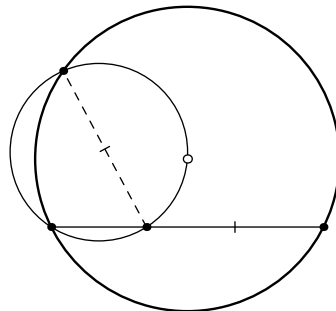
6.10.14)



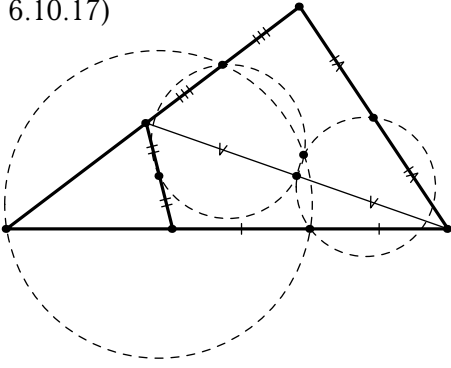
6.10.15)



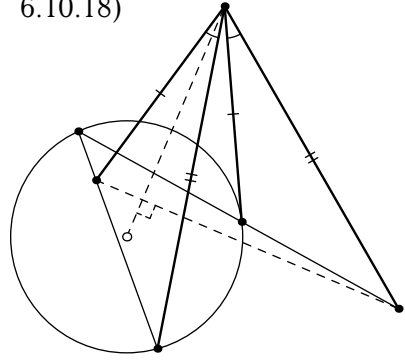
6.10.16)



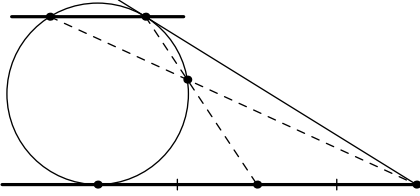
6.10.17)



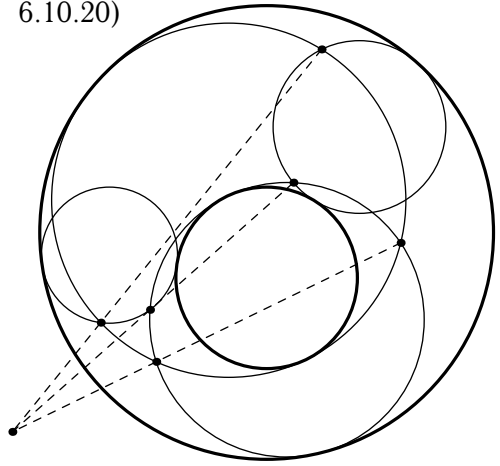
6.10.18)



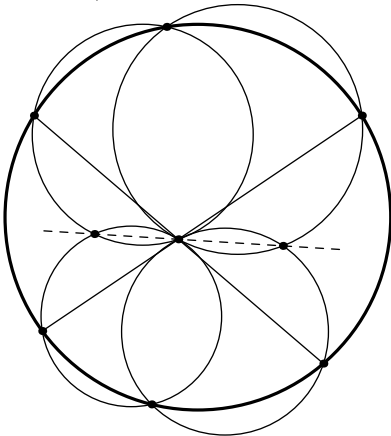
6.10.19)



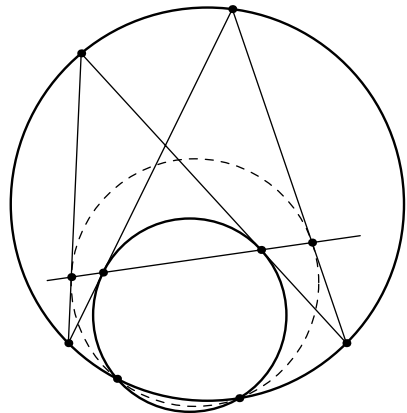
6.10.20)



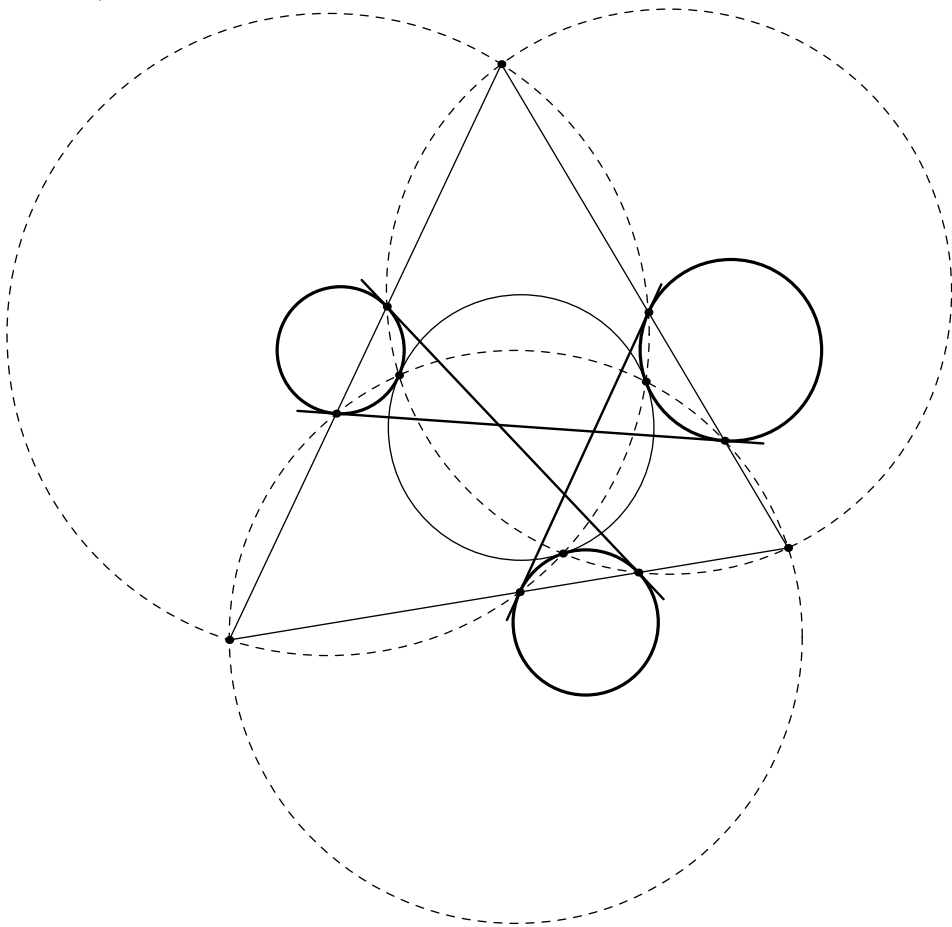
6.10.21)



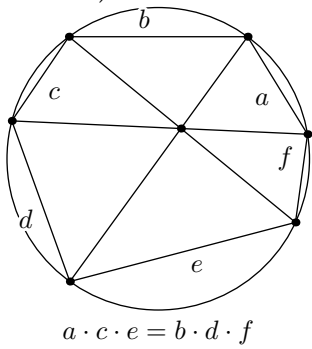
6.10.22)



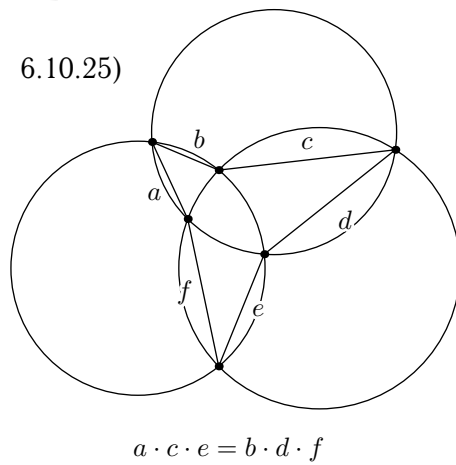
6.10.23)



6.10.24)

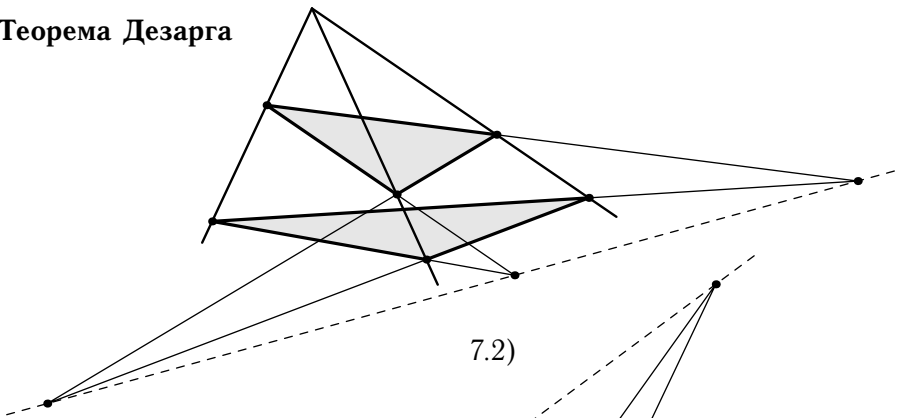


6.10.25)

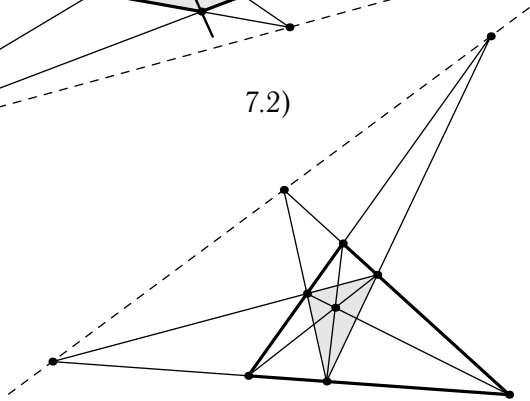


7 Проективные теоремы

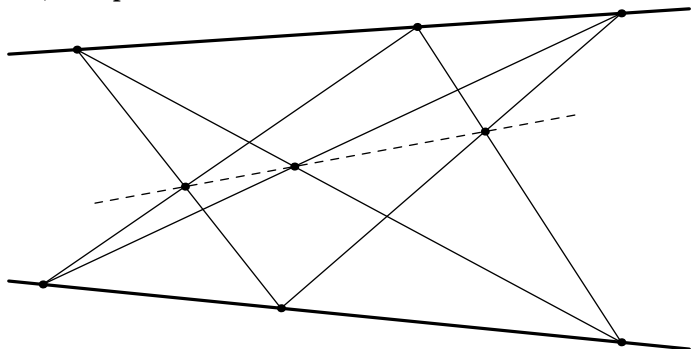
7.1) Теорема Дезарга



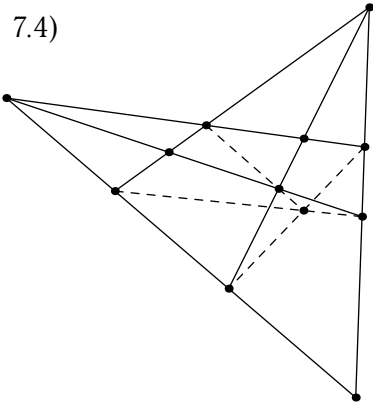
7.2)



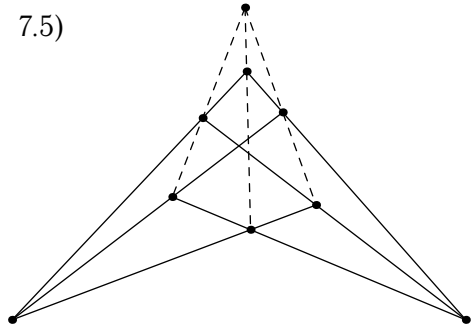
7.3) Теорема Паппа



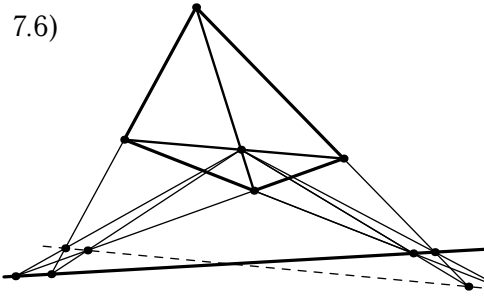
7.4)



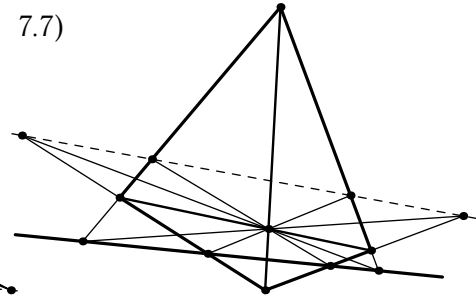
7.5)



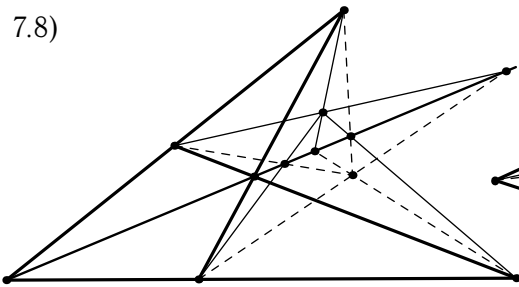
7.6)



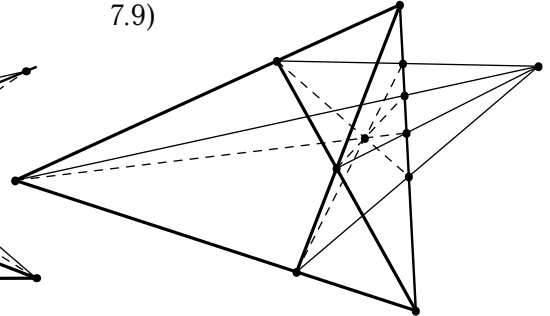
7.7)



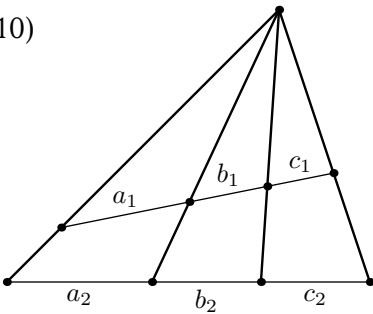
7.8)



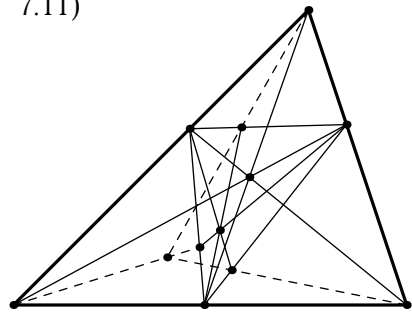
7.9)



7.10)



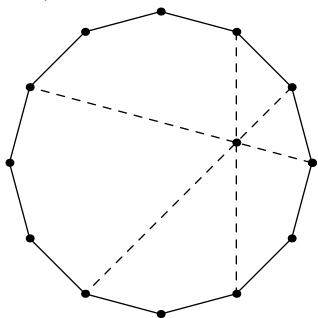
7.11)



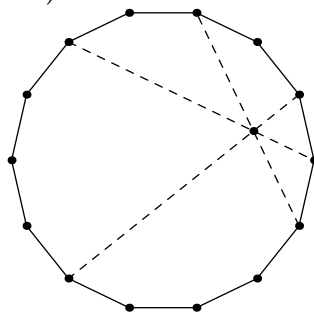
$$\frac{a_1 \cdot c_1}{b_1 \cdot (a_1 + b_1 + c_1)} = \frac{a_2 \cdot c_2}{b_2 \cdot (a_2 + b_2 + c_2)}$$

8 Правильные многоугольники

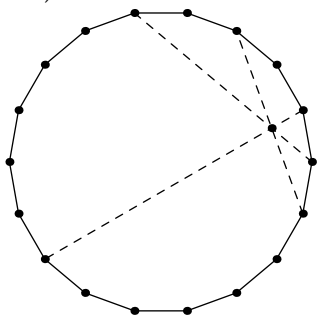
8.1)



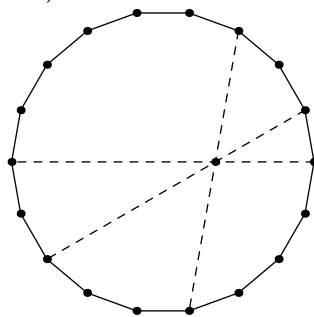
8.2)



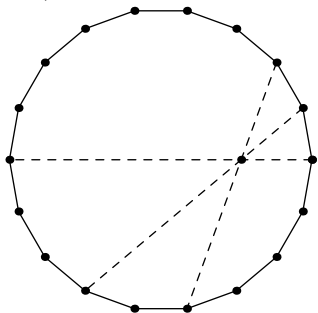
8.3)



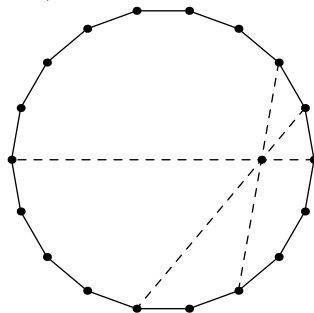
8.4)



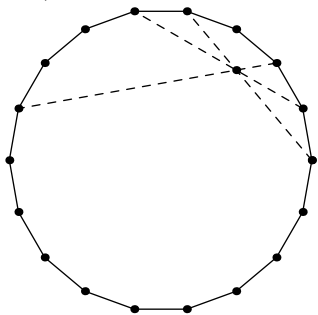
8.5)



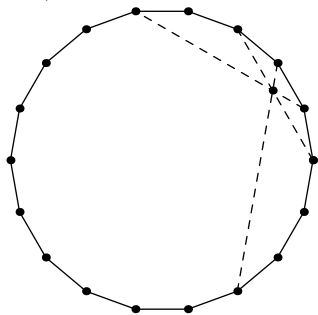
8.6)



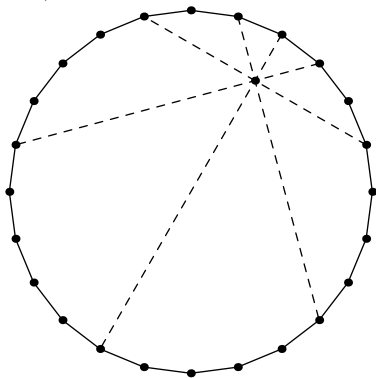
8.7)



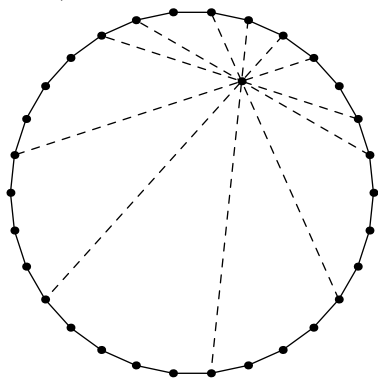
8.8)



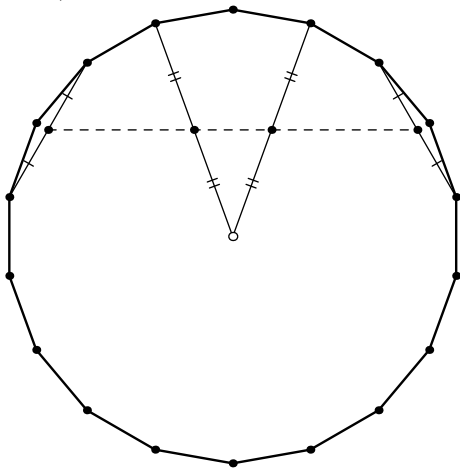
8.9)



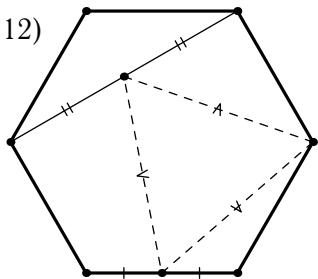
8.10)



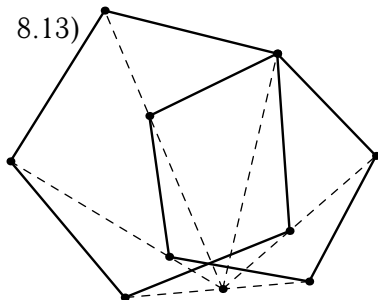
8.11)



8.12)

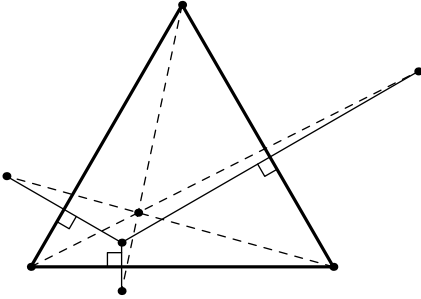


8.13)

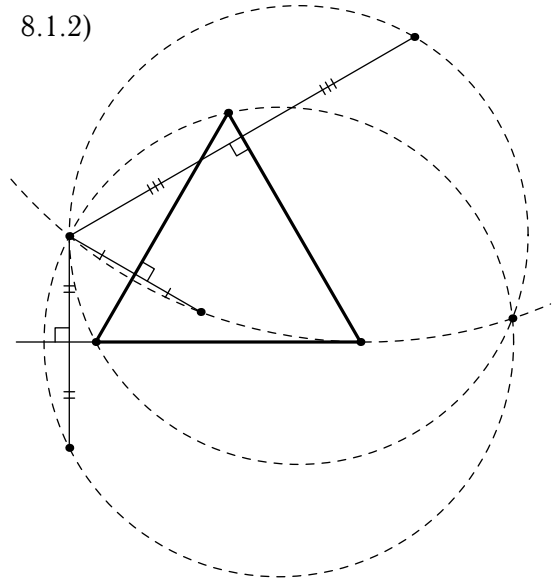


8.1 Замечательные свойства правильного треугольника

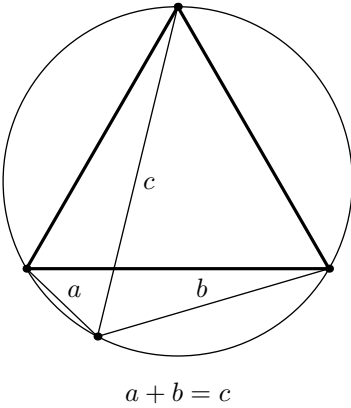
8.1.1)



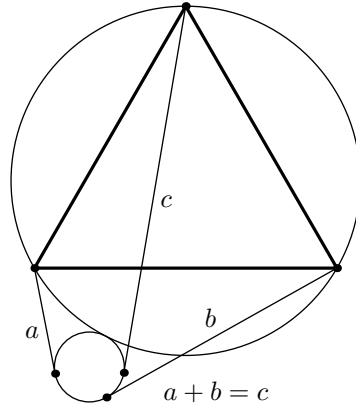
8.1.2)



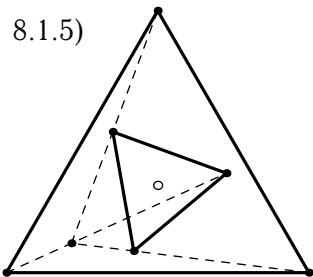
8.1.3) Теорема Помпею



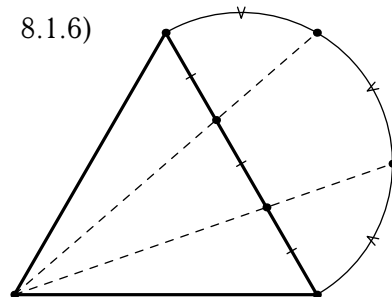
8.1.4)



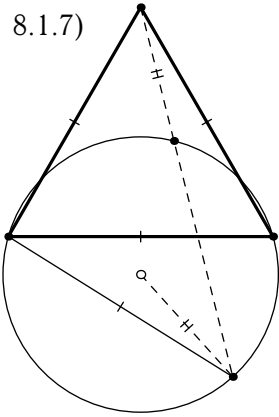
8.1.5)



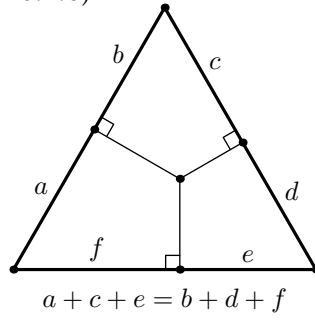
8.1.6)



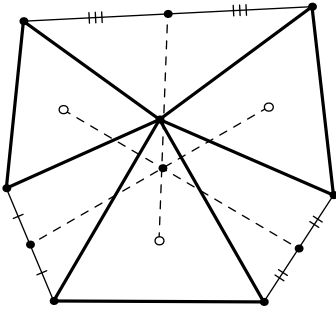
8.1.7)



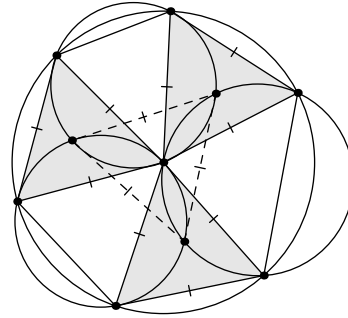
8.1.8)



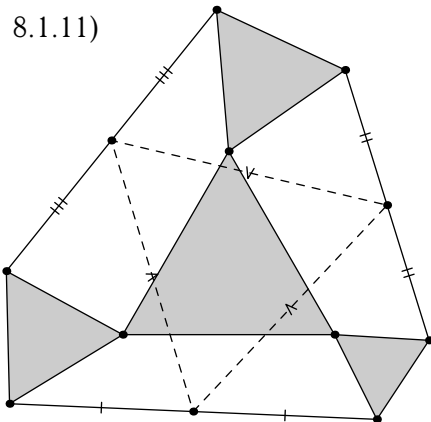
8.1.9)



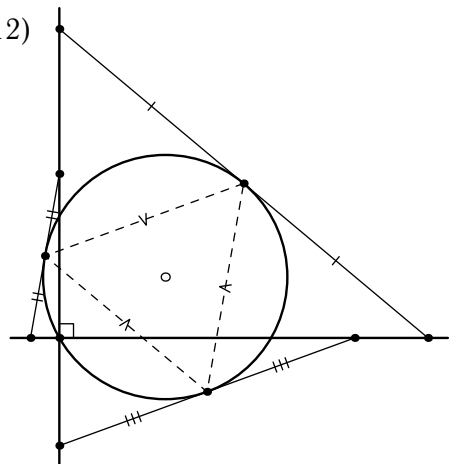
8.1.10)



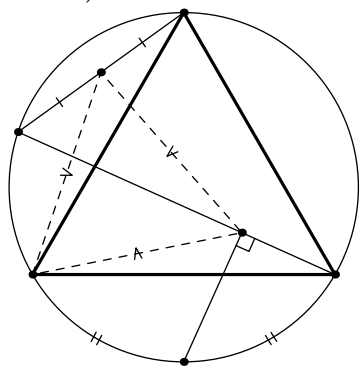
8.1.11)



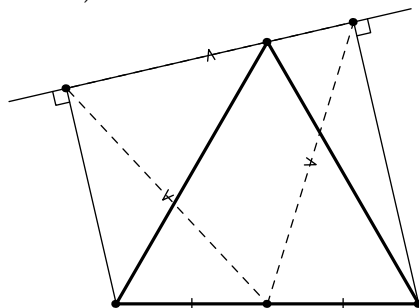
8.1.12)



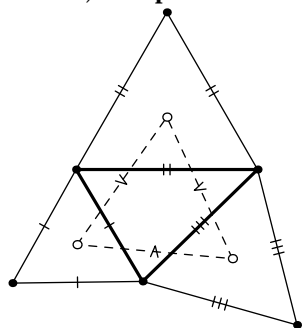
8.1.13)



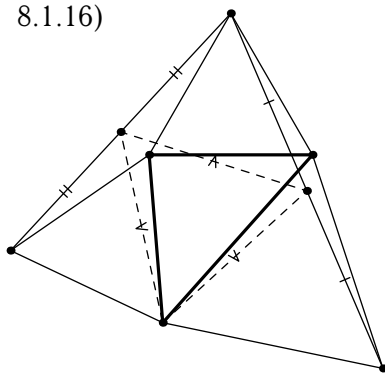
8.1.14)



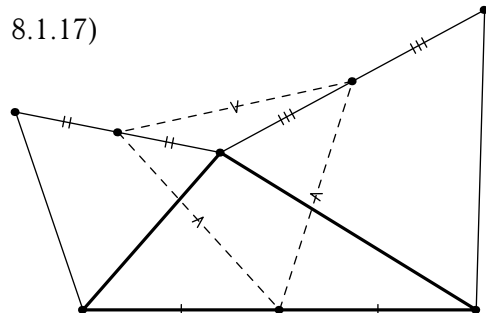
8.1.15) Теорема Наполеона



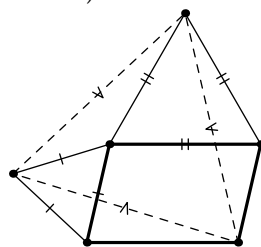
8.1.16)



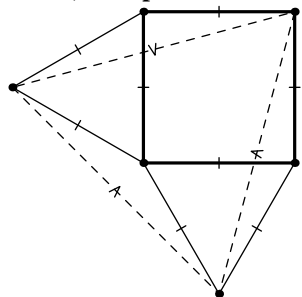
8.1.17)



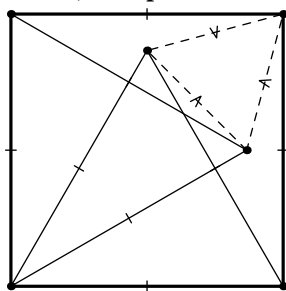
8.1.18)



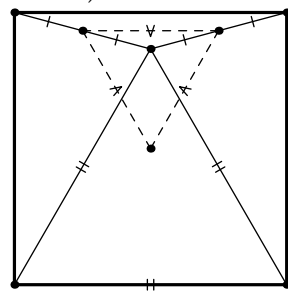
8.1.19) Теорема Тебо



8.1.20) Теорема Тебо

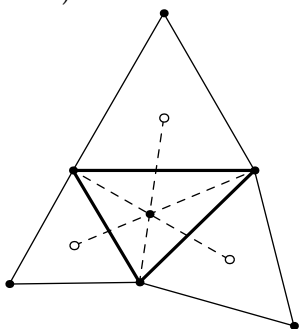


8.1.21)

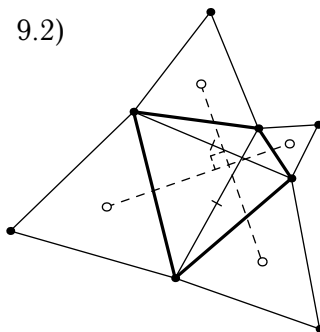


9 Надстройки

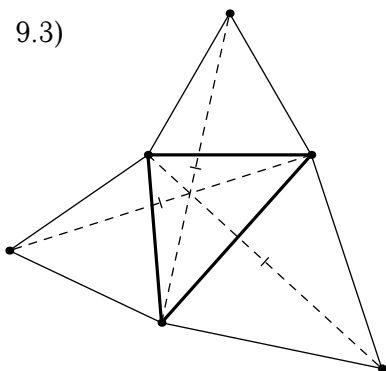
9.1) Точка Наполеона



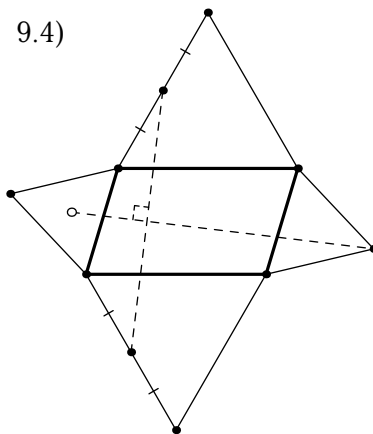
9.2)



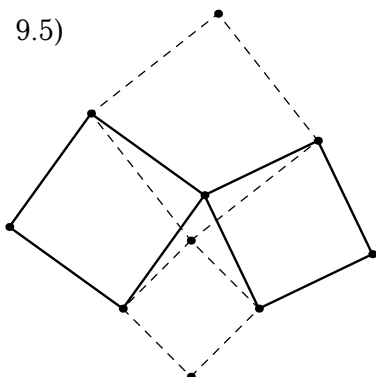
9.3)



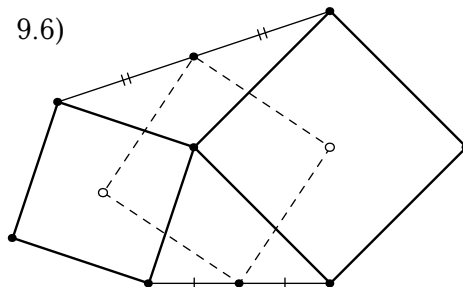
9.4)



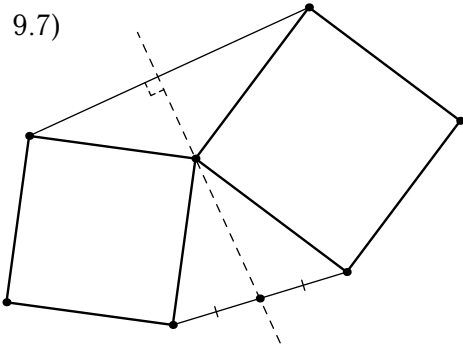
9.5)



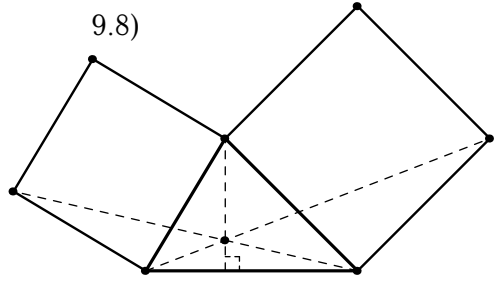
9.6)



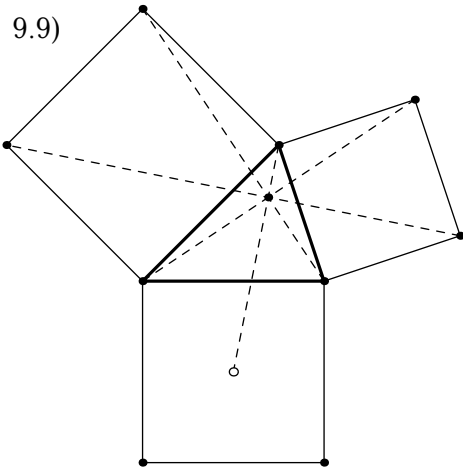
9.7)



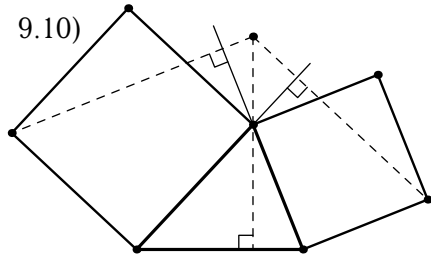
9.8)



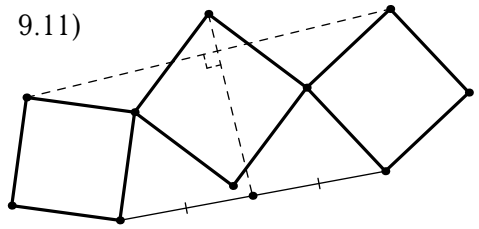
9.9)



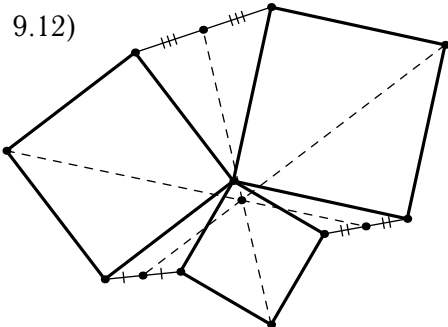
9.10)



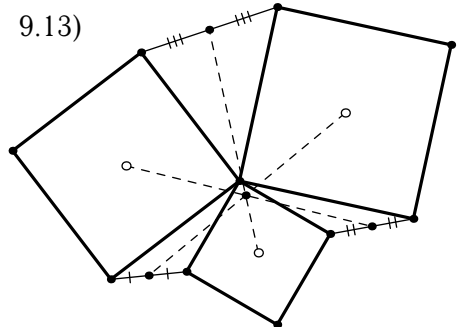
9.11)



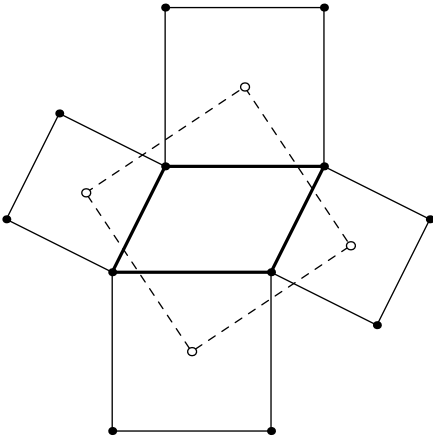
9.12)



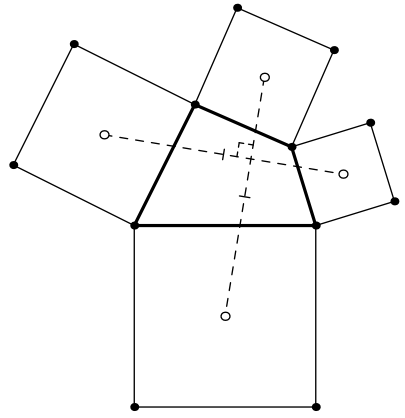
9.13)



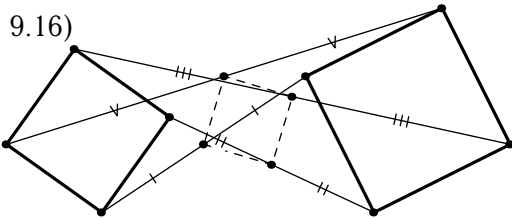
9.14) Теорема Тебо



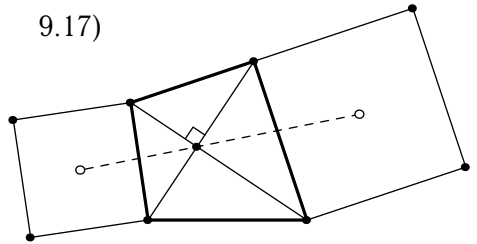
9.15) Теорема Ван-Обеля



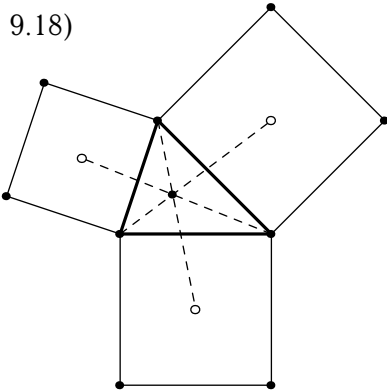
9.16)



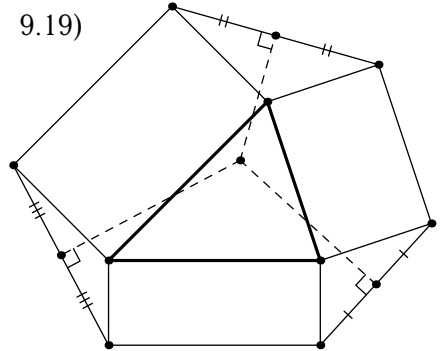
9.17)



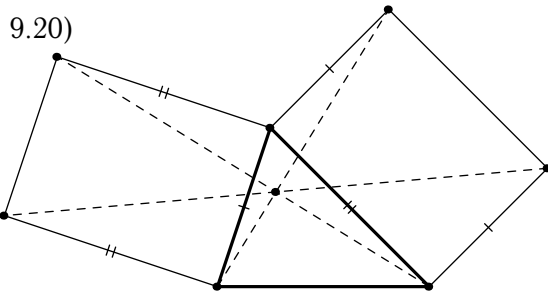
9.18)



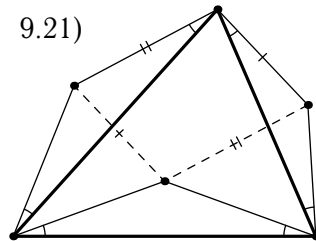
9.19)



9.20)

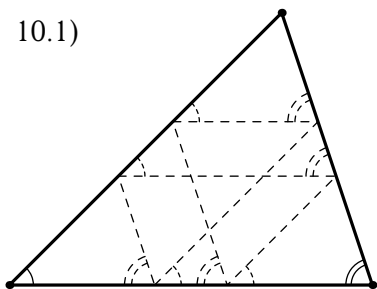


9.21)

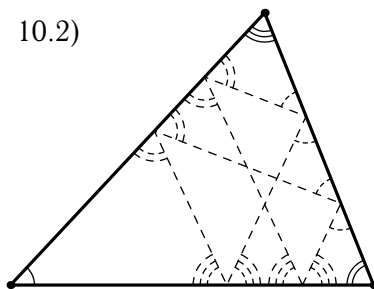


10 Теоремы о замыкании

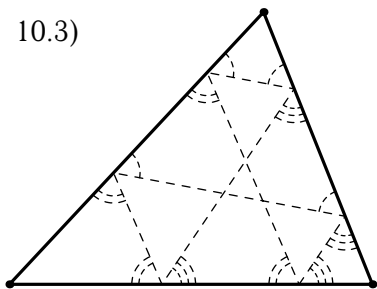
10.1)



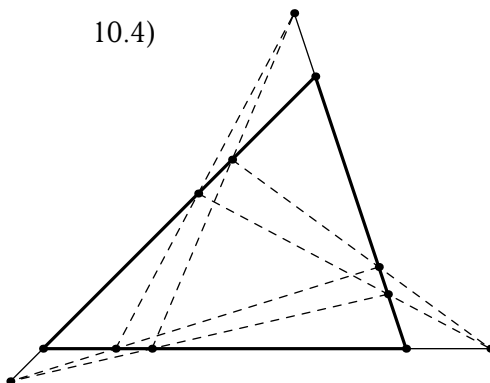
10.2)



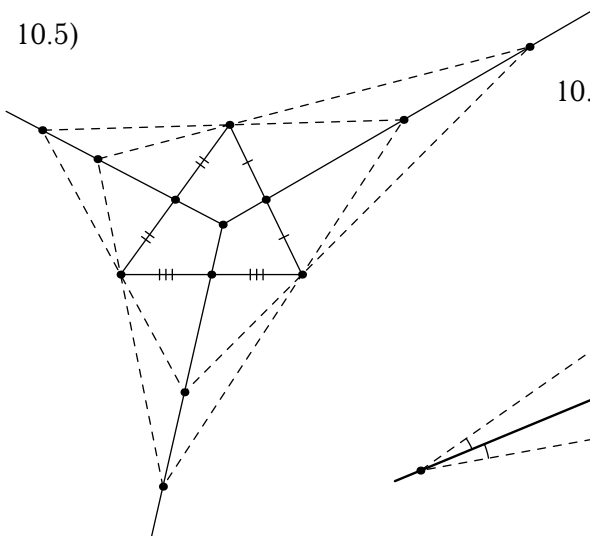
10.3)



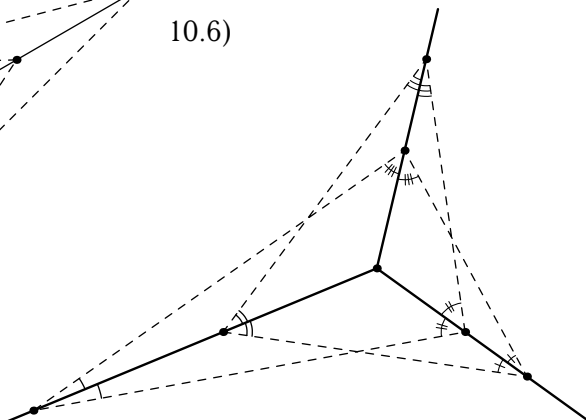
10.4)



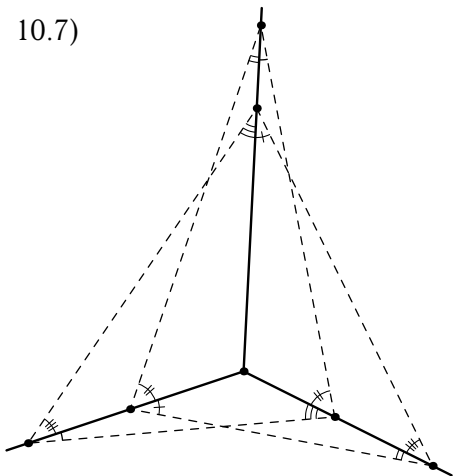
10.5)



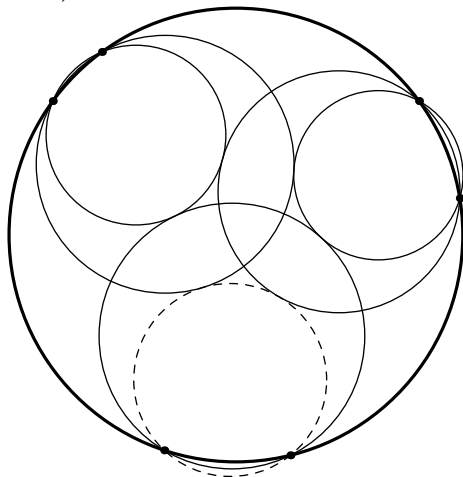
10.6)



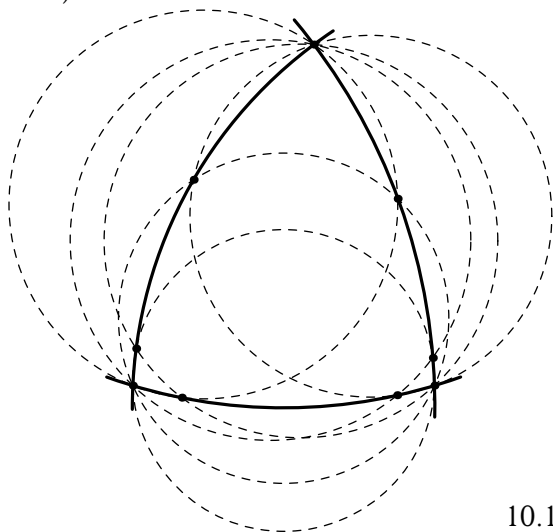
10.7)



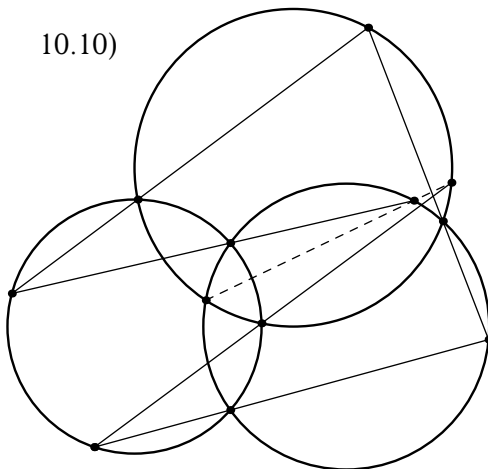
10.8)



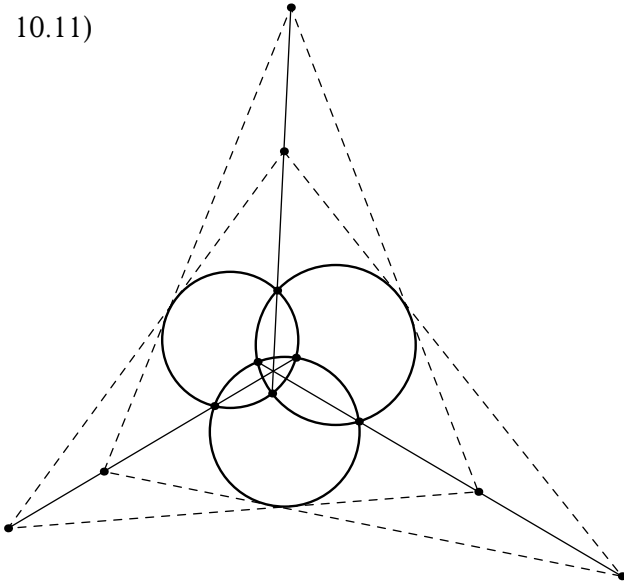
10.9)



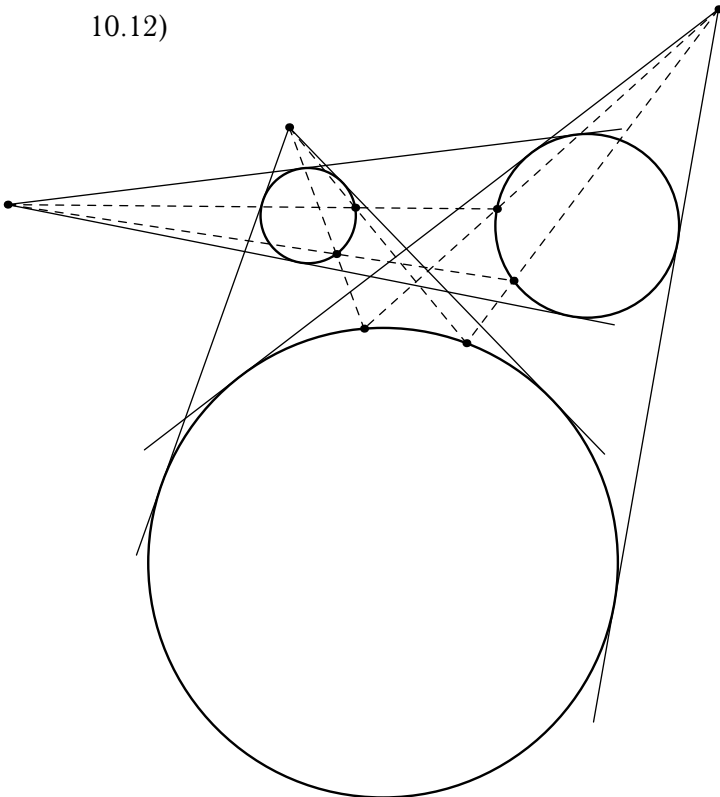
10.10)



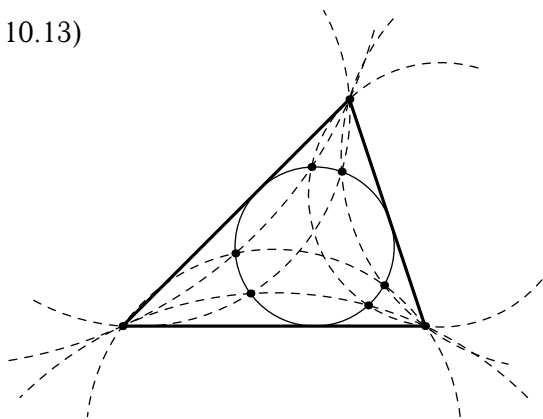
10.11)



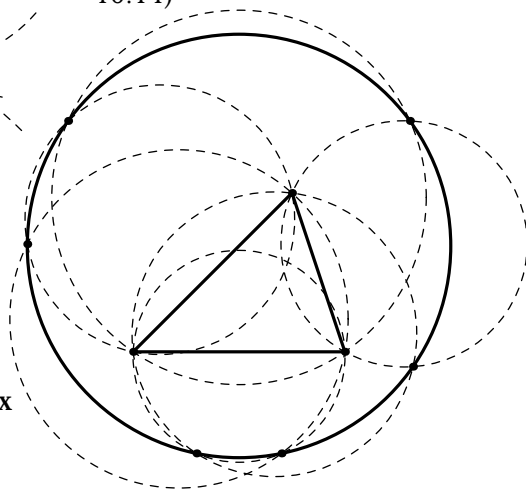
10.12)



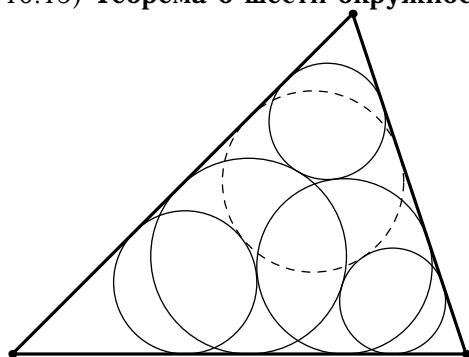
10.13)



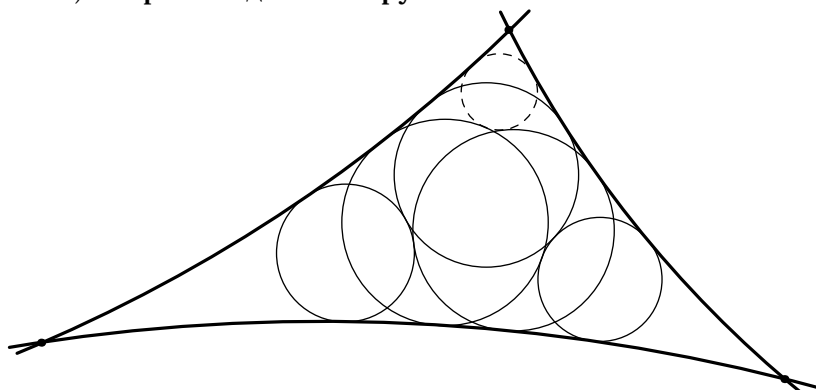
10.14)



10.15) Теорема о шести окружностях

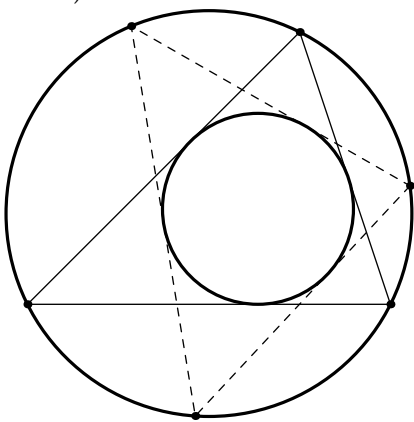


10.16) Теорема о девяти окружностях

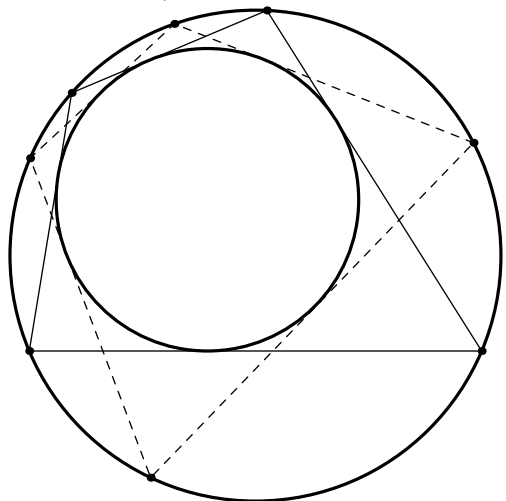


Поризм Понселе

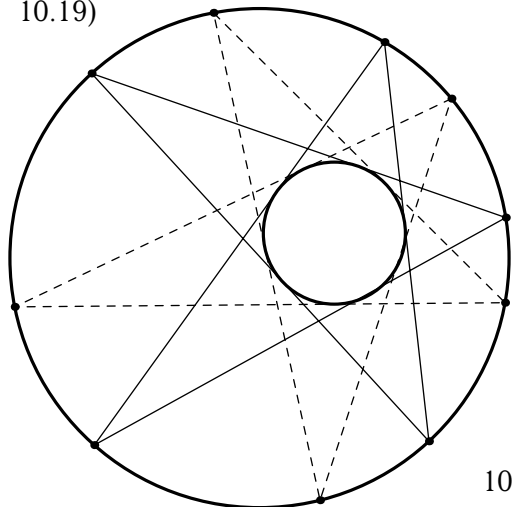
10.17)



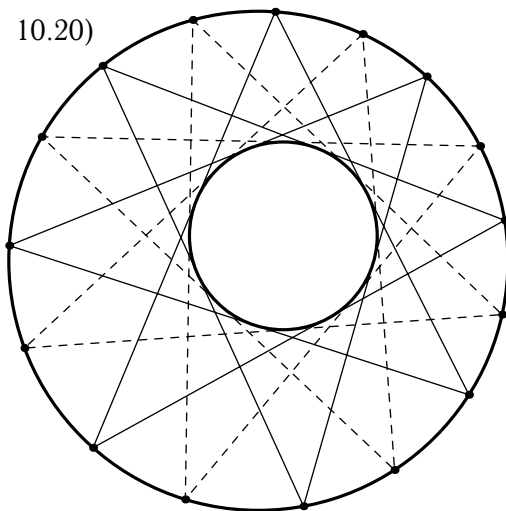
10.18)



10.19)

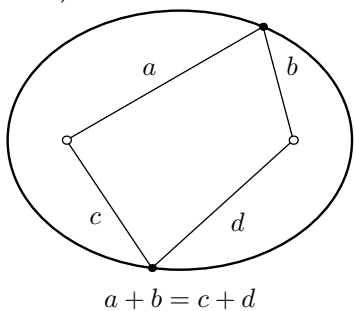


10.20)

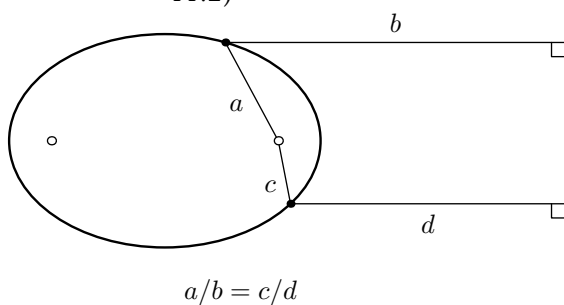


11 Замечательные свойства конических сечений

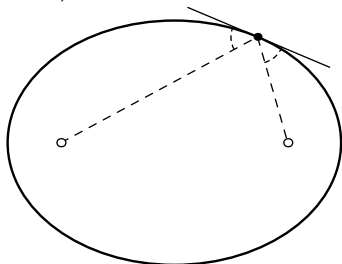
11.1)



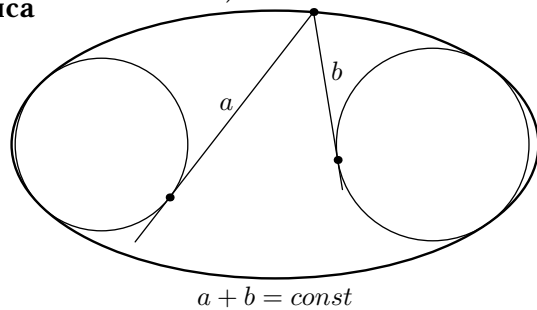
11.2)



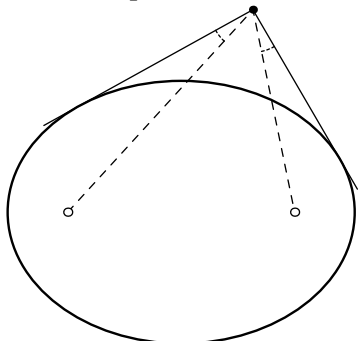
11.3) Оптическое свойство эллипса



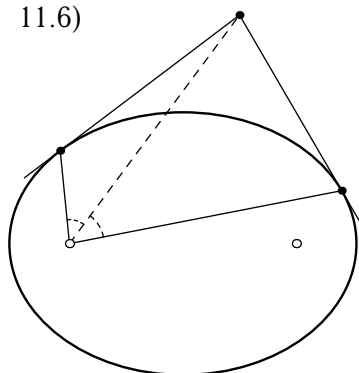
11.4)



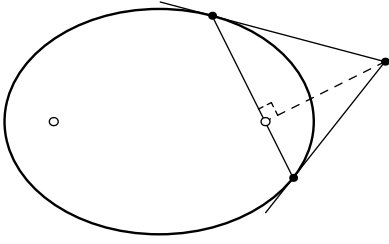
11.5) Теорема Понселе



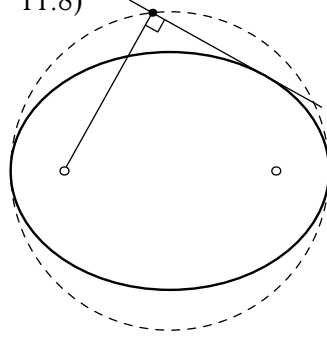
11.6)



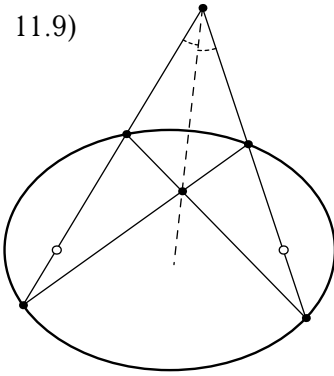
11.7)



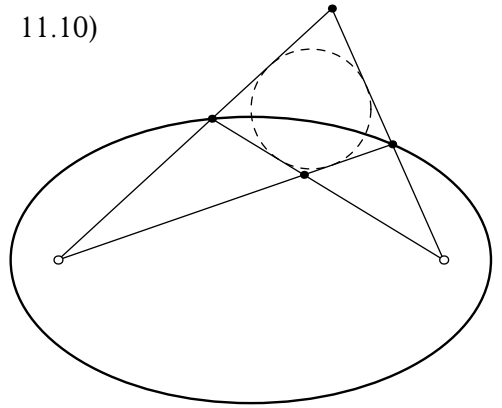
11.8)



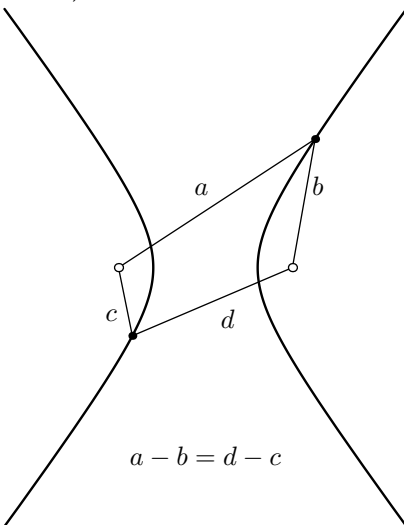
11.9)



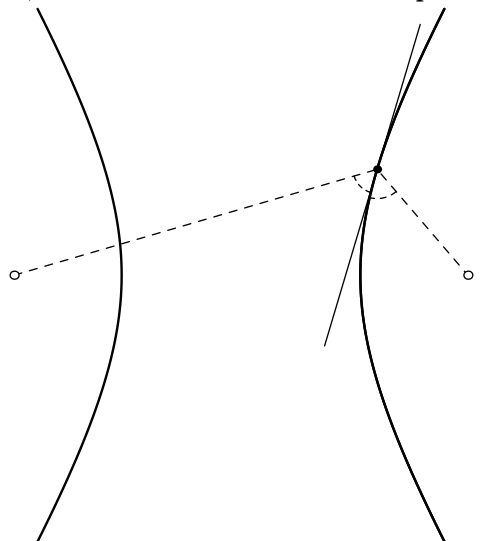
11.10)



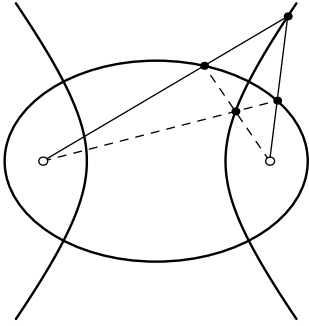
11.11)



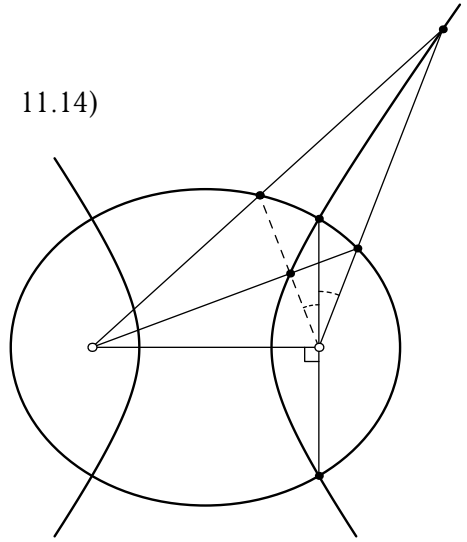
11.12) **Оптическое свойство гиперболы**



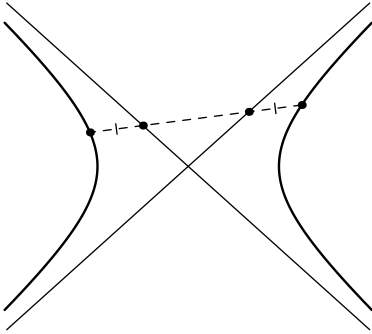
11.13)



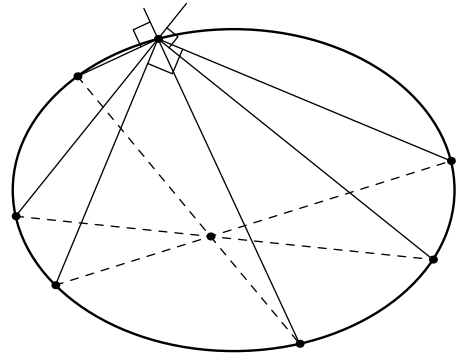
11.14)



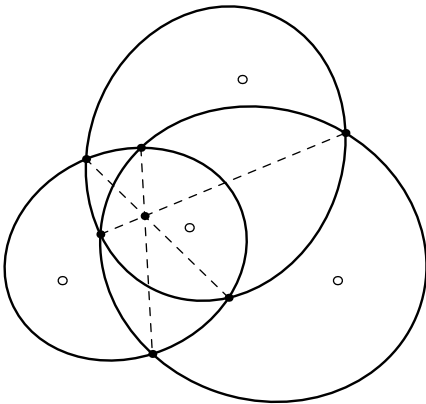
11.15)



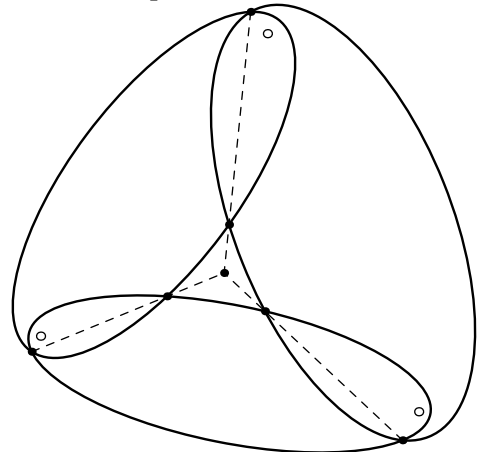
11.16) **Теорема Фрежье**



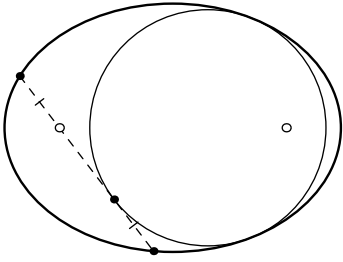
11.17)



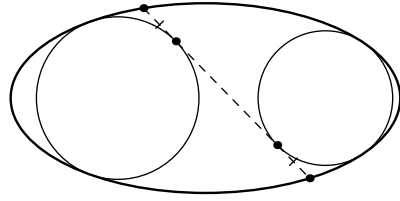
11.18) **Теорема Невилла**



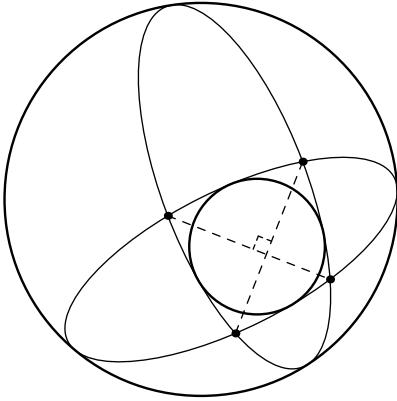
11.19)



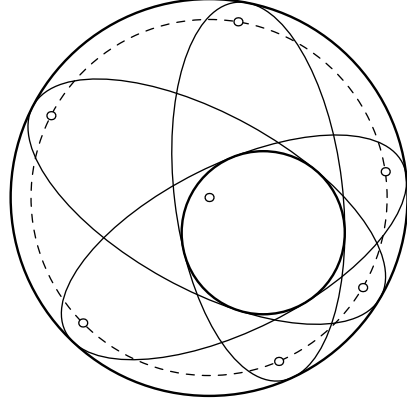
11.20)



11.21)



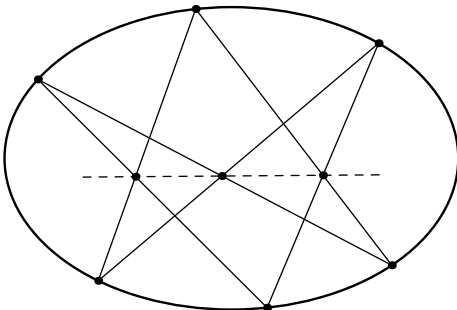
11.22)



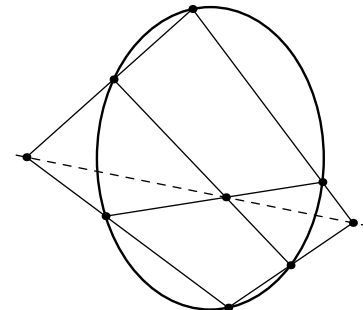
11.1 Проективные свойства конических сечений

Теорема Паскаля

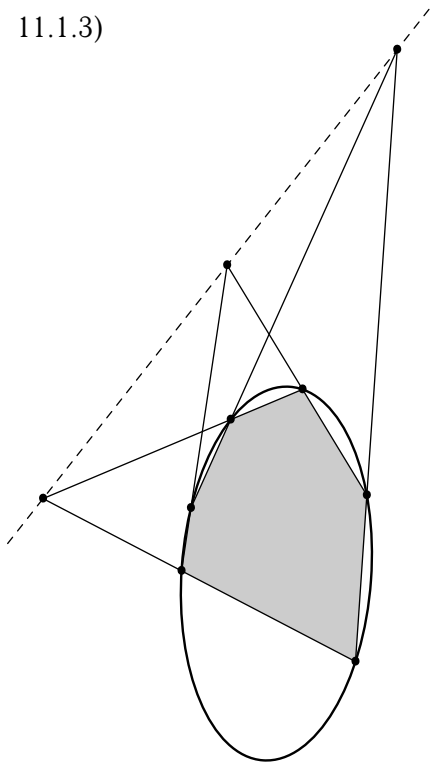
11.1.1)



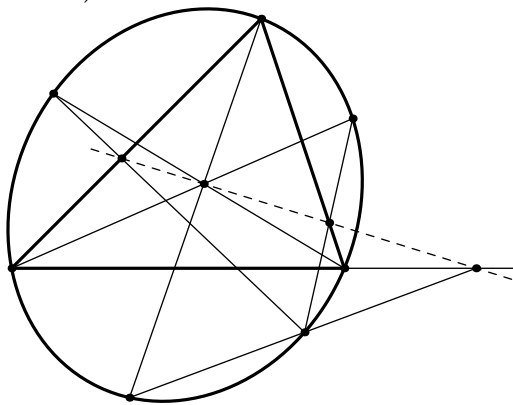
11.1.2)



11.1.3)

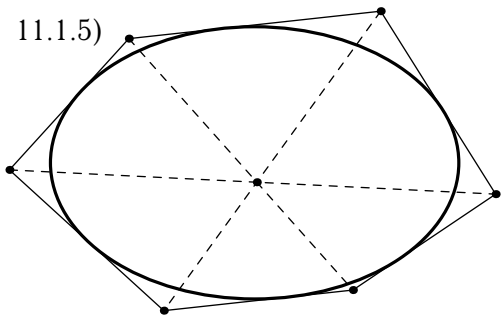


11.1.4)

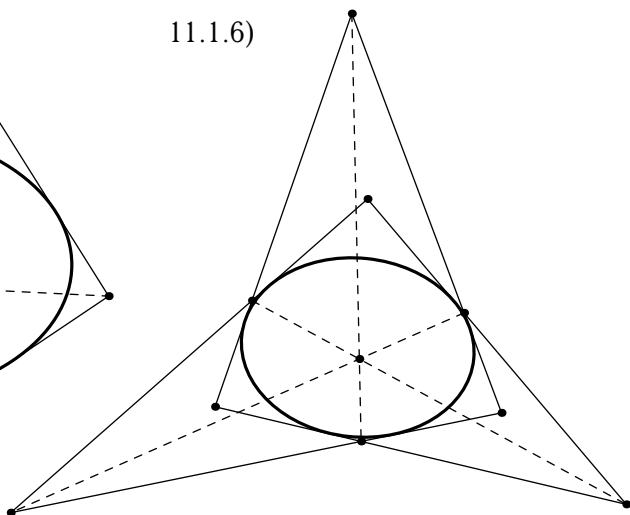


Теорема Брианшона

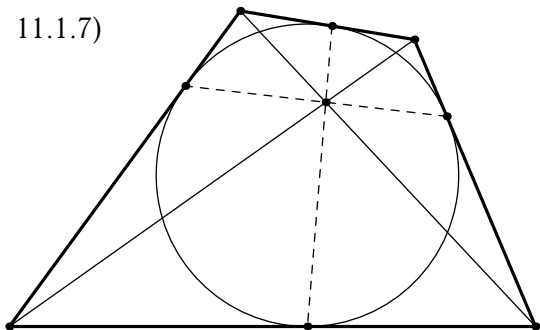
11.1.5)



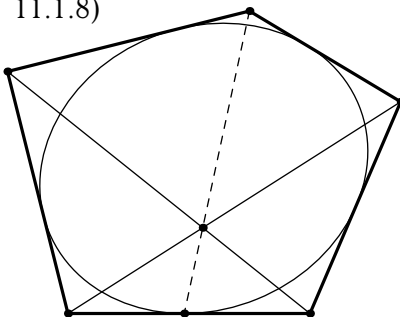
11.1.6)



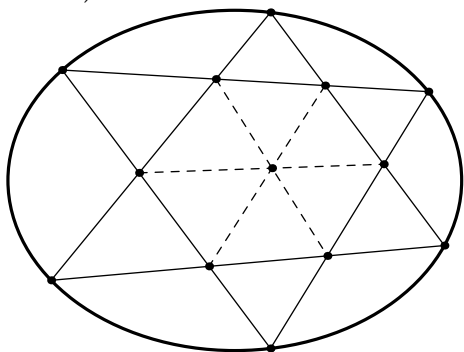
11.1.7)



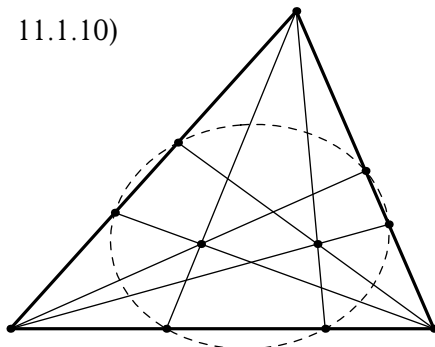
11.1.8)



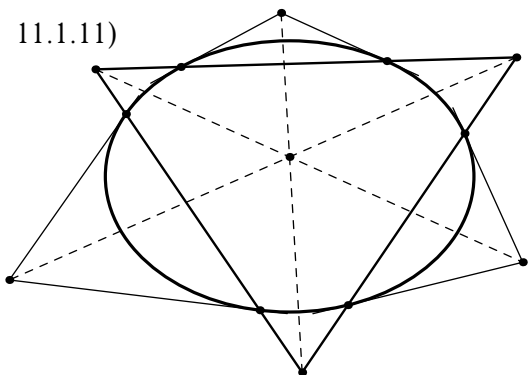
11.1.9)



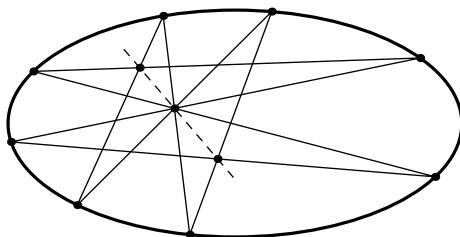
11.1.10)



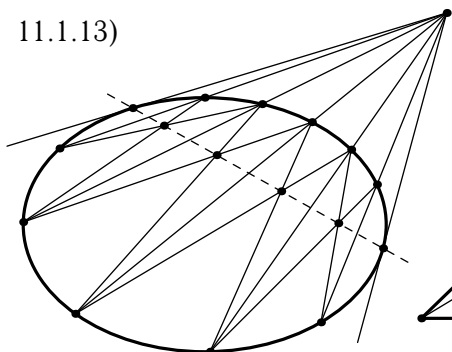
11.1.11)



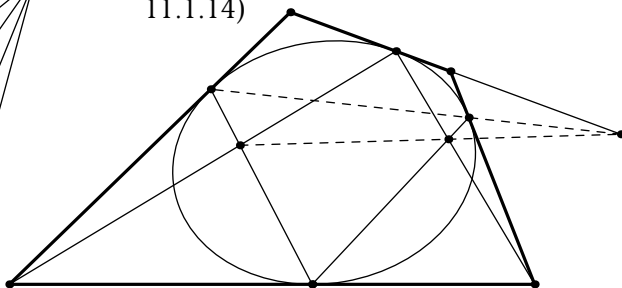
11.1.12)



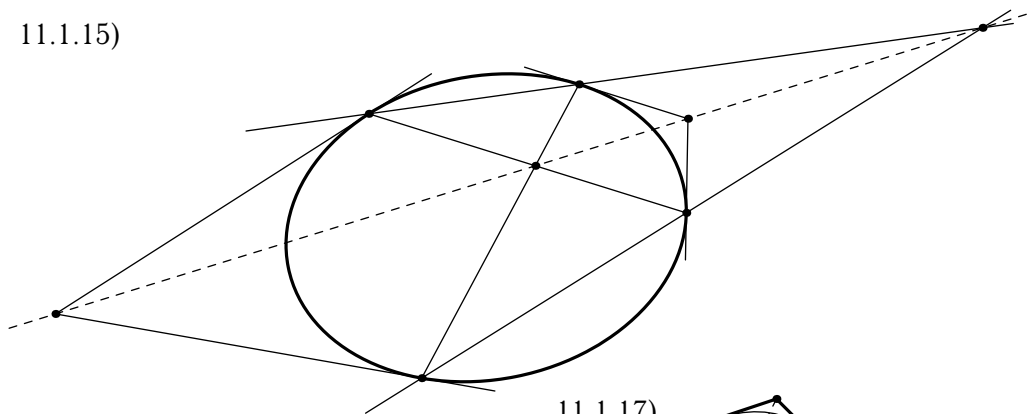
11.1.13)



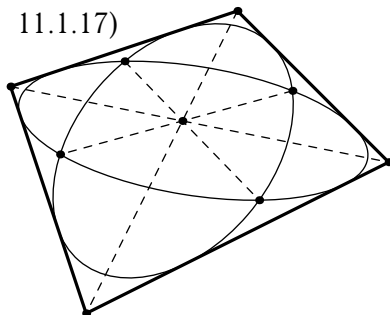
11.1.14)



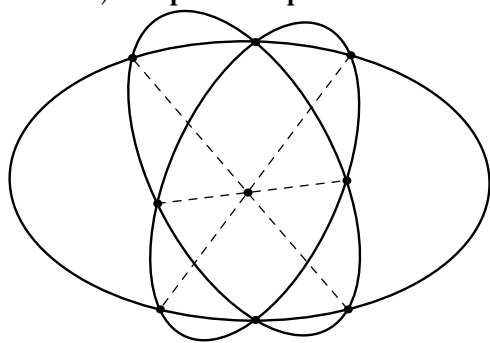
11.1.15)



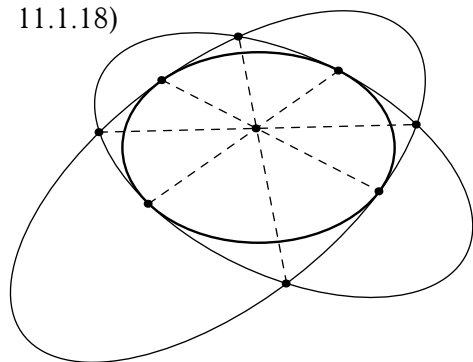
11.1.17)



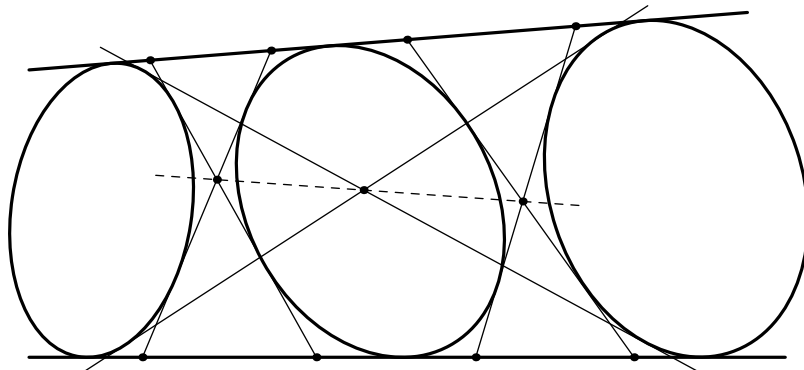
11.1.16) Теорема о трёх кониках



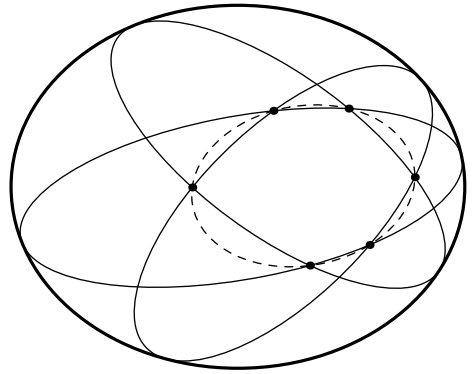
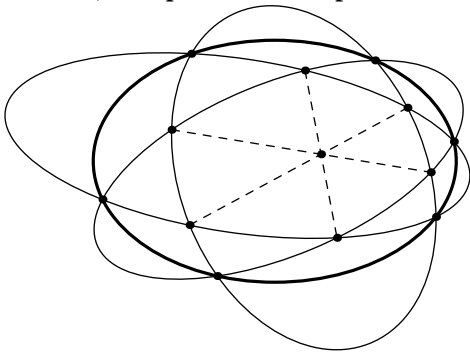
11.1.18)



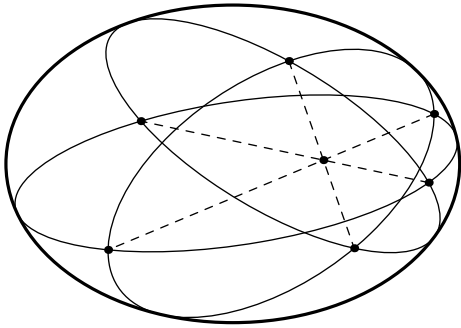
11.1.19) Двойственная теорема о трёх кониках



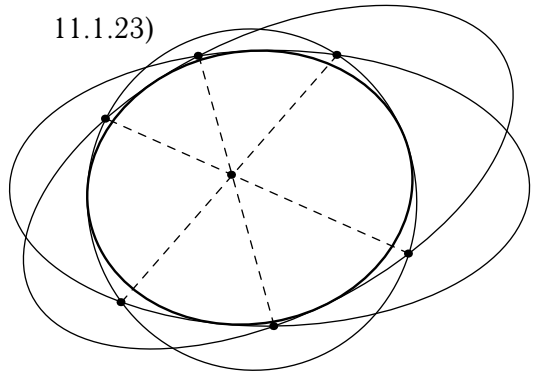
11.1.20) Теорема о четырёх кониках 11.1.21)



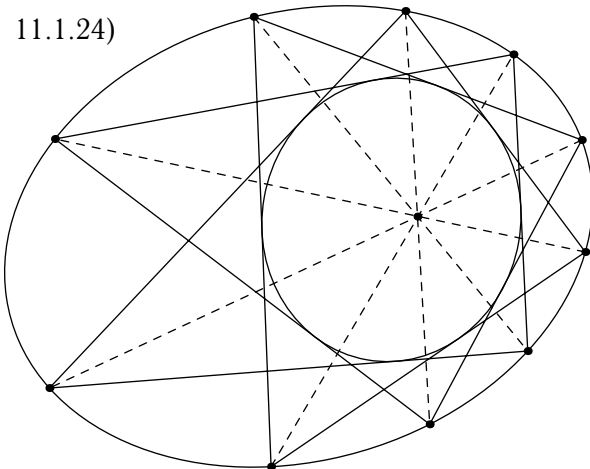
11.1.22)



11.1.23)

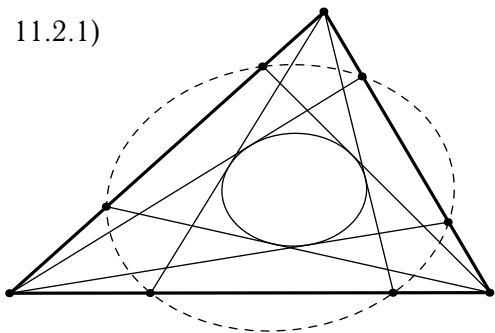


11.1.24)

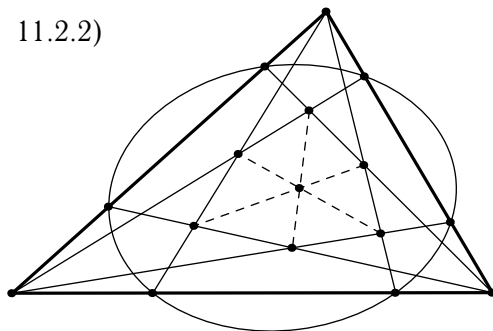


11.2 Коники, пересекающие треугольник

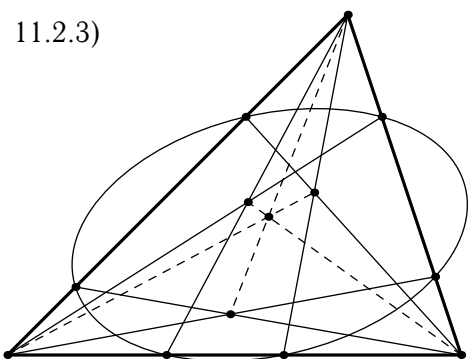
11.2.1)



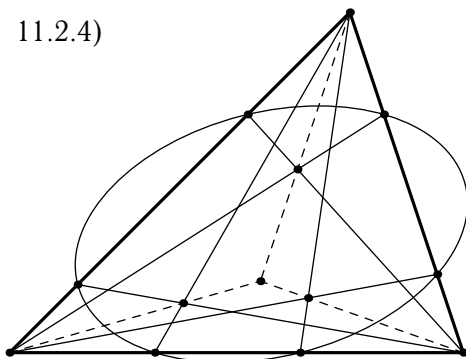
11.2.2)



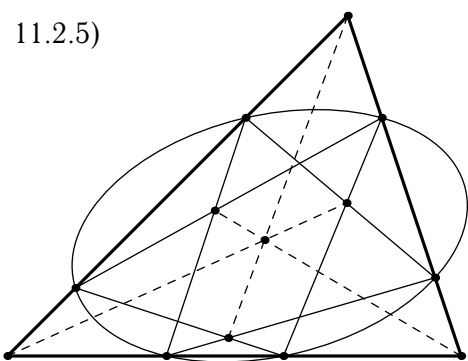
11.2.3)



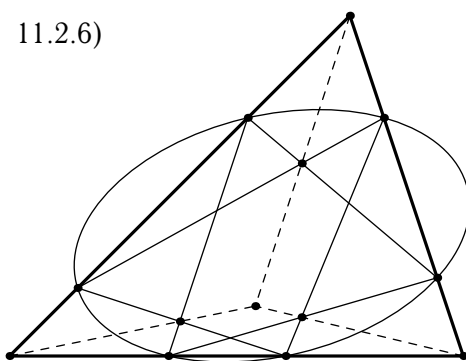
11.2.4)



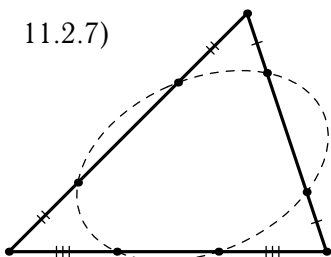
11.2.5)



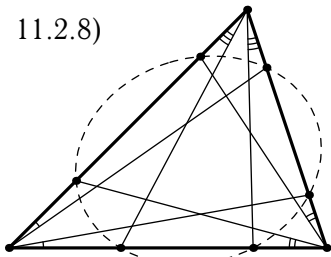
11.2.6)



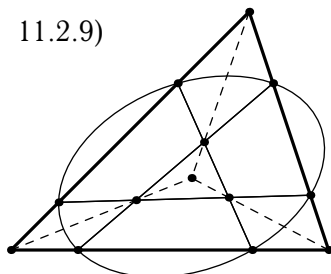
11.2.7)



11.2.8)

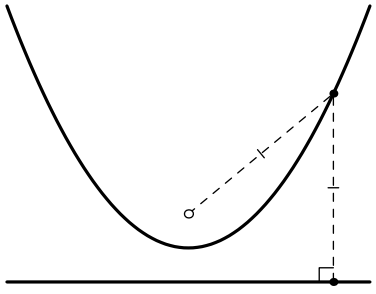


11.2.9)

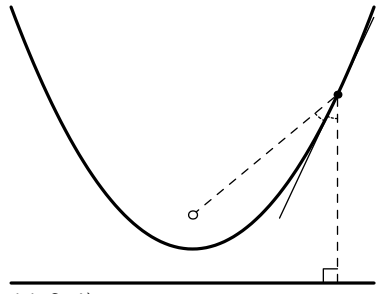


11.3 Замечательные свойства параболы

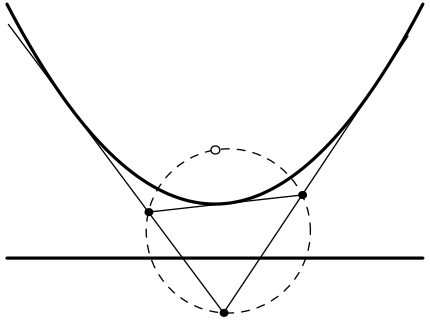
11.3.1)



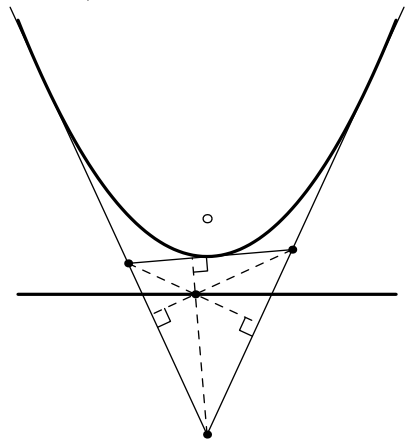
11.3.2) Оптическое свойство



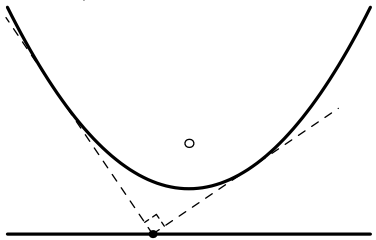
11.3.3)



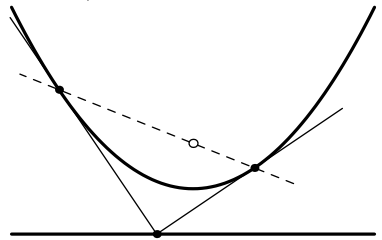
11.3.4)



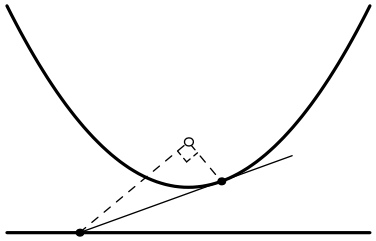
11.3.5)



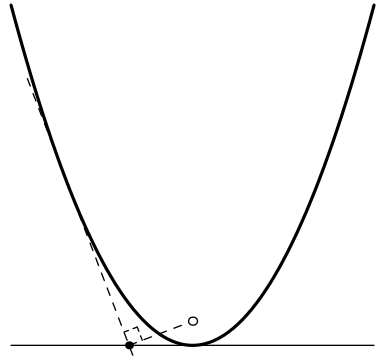
11.3.6)



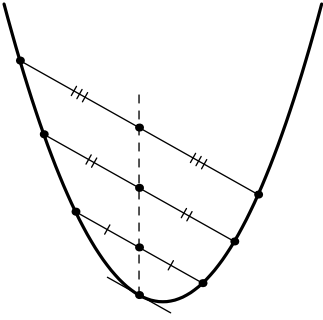
11.3.7)



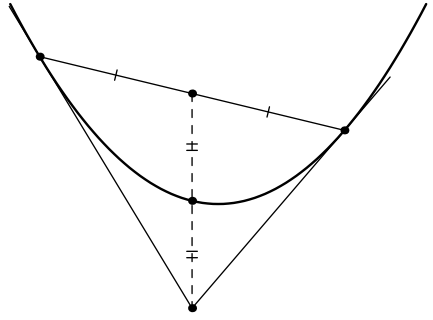
11.3.8)



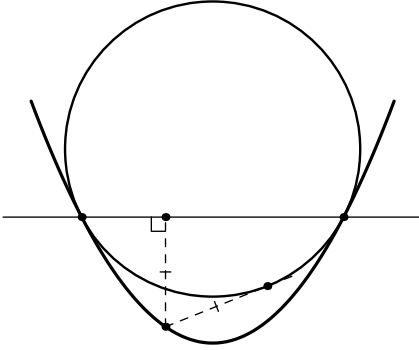
11.3.9)



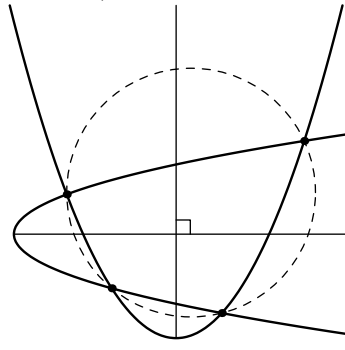
11.3.10)



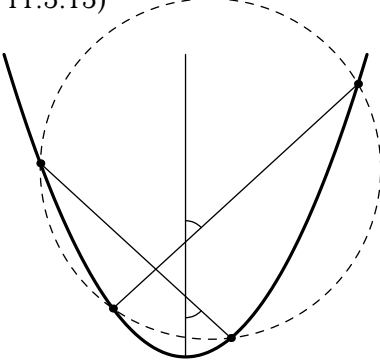
11.3.11)



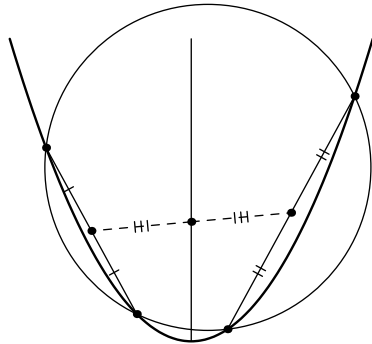
11.3.12)



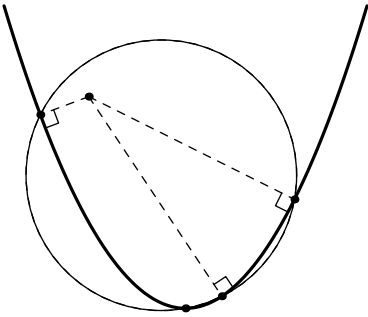
11.3.13)



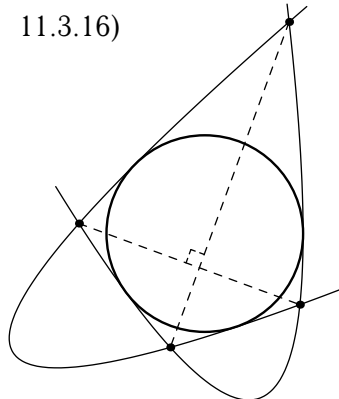
11.3.14)



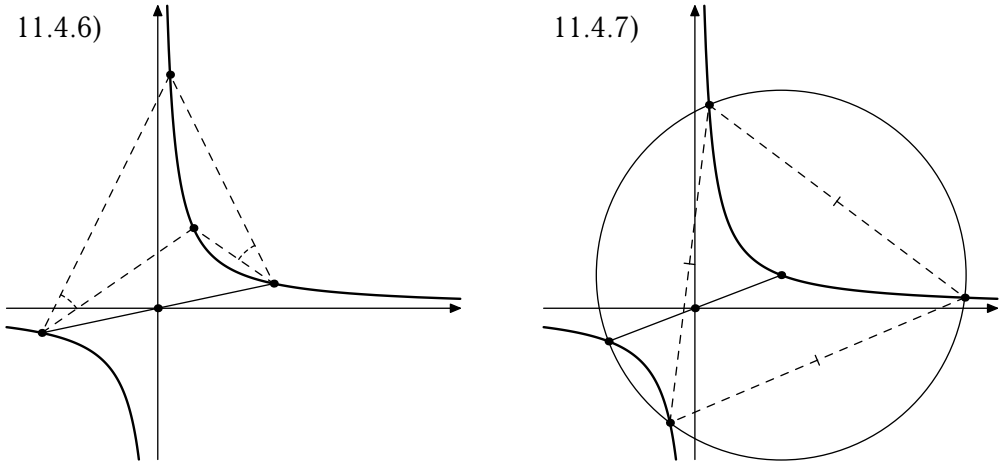
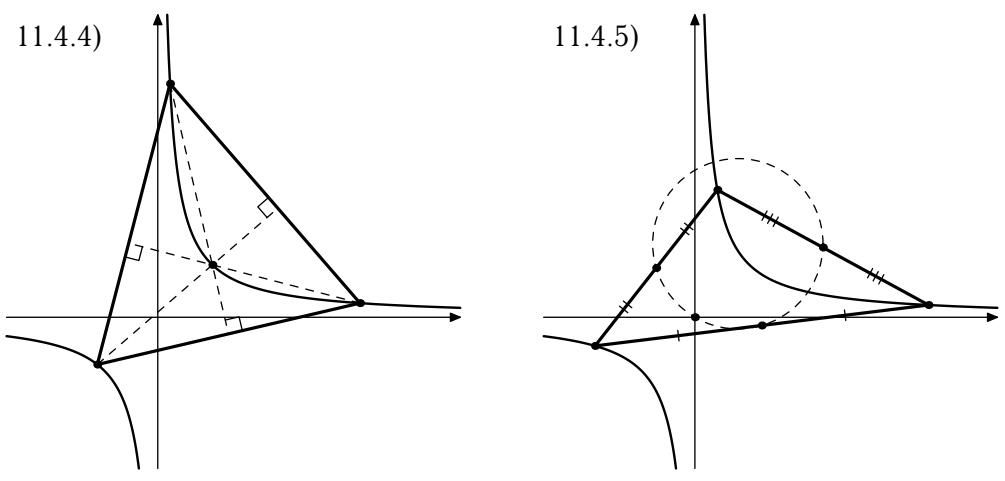
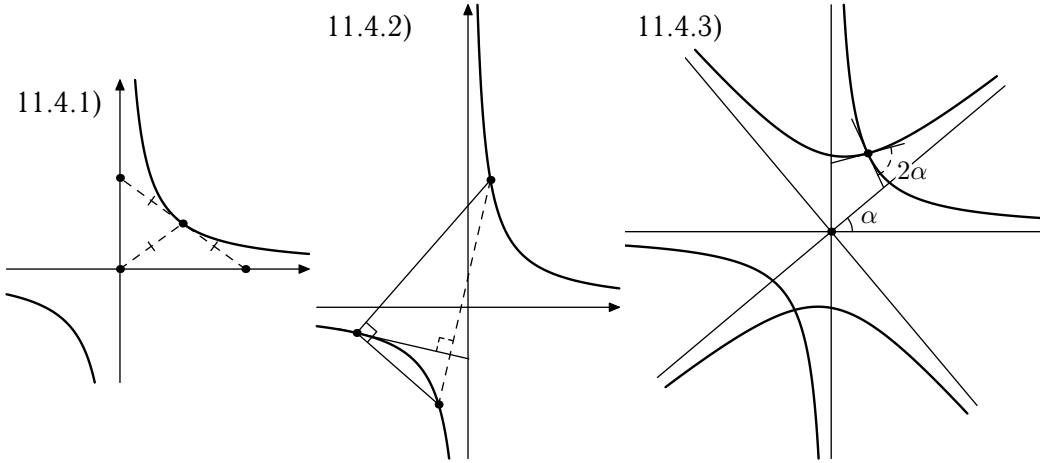
11.3.15)



11.3.16)



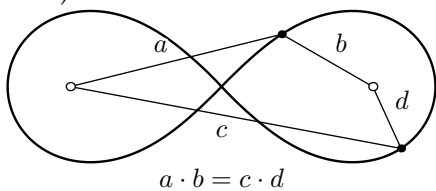
11.4 Замечательные свойства равносторонней гиперболы



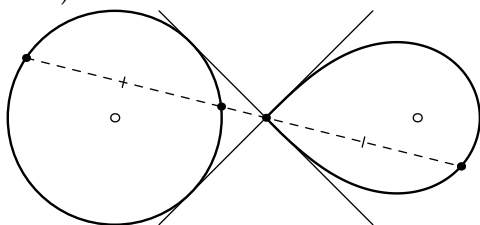
12 Замечательные кривые

Лемниската Бернулли

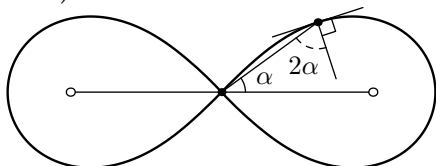
12.1)



12.2)

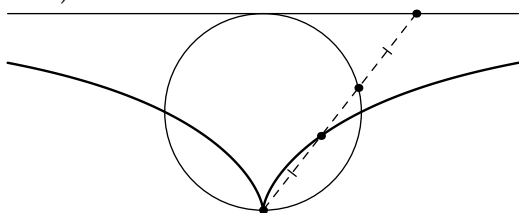


12.3)

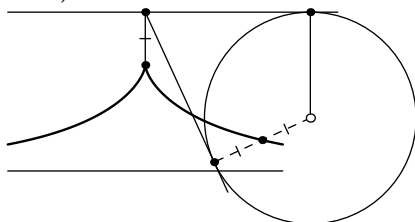


Циссоида Диоклеса

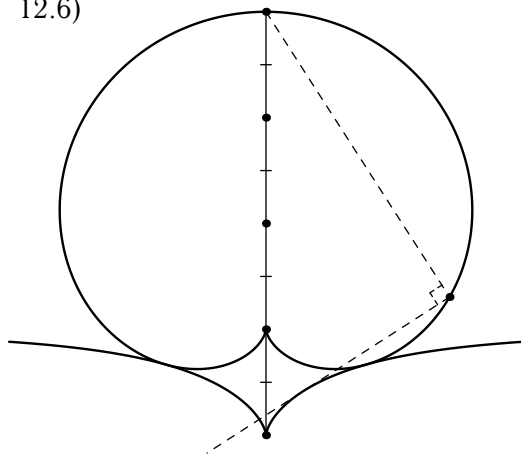
12.4)



12.5)

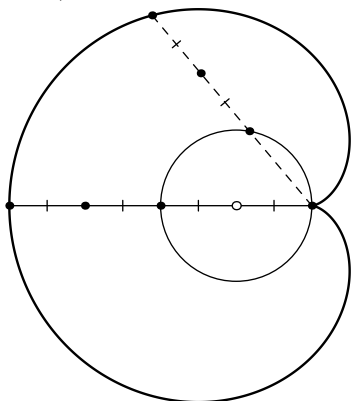


12.6)

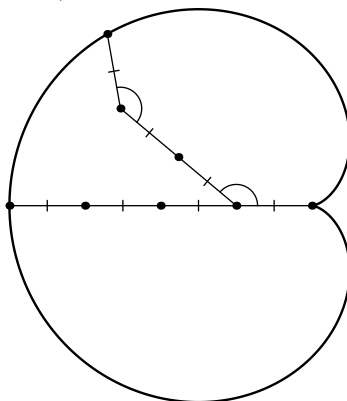


Кардиоида

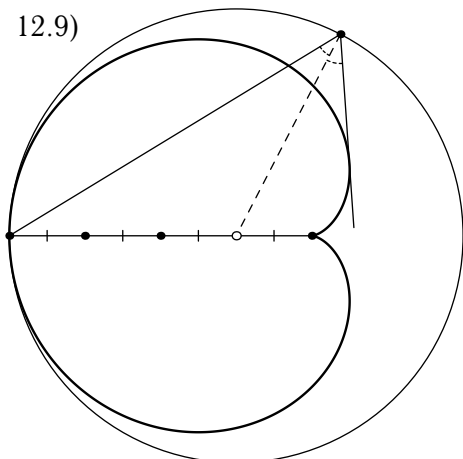
12.7)



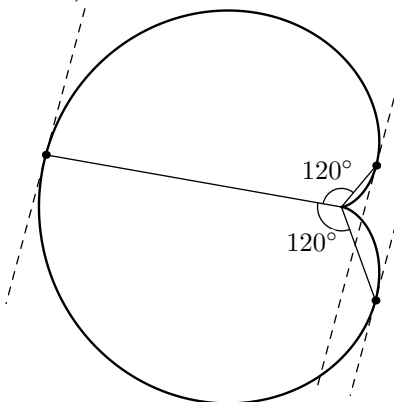
12.8)



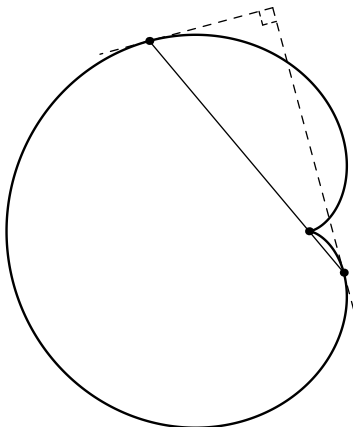
12.9)



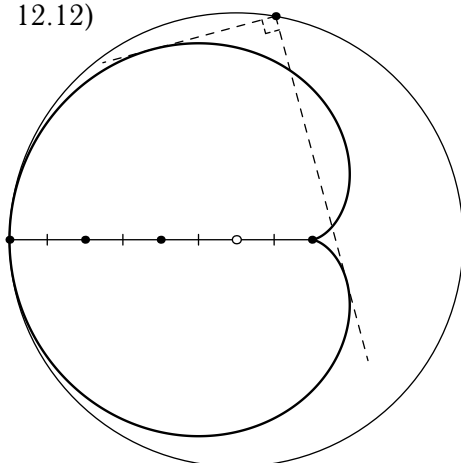
12.10)



12.11)



12.12)



13 Комментарии

- 2.8) А. Г. Мякишев, Четвёртая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2008 г., Заочный тур, Задача 10.
- 2.32) Точка Лемуана будет центром получившейся окружности.
- 3.9) На рисунке изображена перпендикулярность прямой Обера и прямой Гаусса.
- 4.1.2) А. А. Полянский, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Заключительный этап, 10-ый класс, Задача 6.
- 4.1.3) Л. А. Емельянов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2009–2010 гг., Региональный этап, 9-ый класс, Задача 6.
- 4.1.9) В. В. Астахов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2006–2007 гг., Заключительный этап, 10-ый класс, Задача 3.
- 4.1.17) См. также 5.7.9.
- 4.1.19) А. В. Смирнов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2005 г., II тур, 10-ый класс, Задача 6.
- 4.1.20) Д. В. Прокопенко, Пятая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2009 г., Заочный тур, Задача 20.
- 4.1.21) А. А. Полянский, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2010–2011 гг., Заключительный этап, 10-ый класс, Задача 6.
- 4.1.23) M. Chirija, Romanian Masters 2006, Областной тур, 7-ой класс, Задача 4.
- 4.2.6) Из материалов международной олимпиады по математике, 1996 г. Задачу предложила Великобритания.
- 4.3.6) Р. Козарев, Национальная олимпиада Болгарии, 1997 г., Четвёртый тур, Задача 5.
- 4.3.8) Московская математическая олимпиада, 1994 г., 11-ый класс, Задача 5.
- 4.3.10) D. Şerbănescu и V. Vornicu, Международная олимпиада по математике, 2004 г., Задача 1.
- 4.3.14) Л. А. Емельянов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2009–2010 гг., Заключительный этап, 10-ый класс, Задача 6.
- 4.3.17) И. И. Богданов, Шестая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2010 г., Финальный тур, 8-ой класс, Задача 4.
- 4.3.19) Д. В. Прокопенко, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2009–2010 гг., Региональный этап, 10-ый класс, Задача 3.
- 4.3.21) М. Г. Сонкин, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1999–2000 гг., Окружной этап, 8-ой класс, Задача 4.
- 4.4.6) А. А. Заславский и Ф. К. Нилов, Четвёртая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2008 г., Финальный тур, 8-ой класс, Задача 4.
- 4.4.7) Из материалов международной олимпиады по математике, 1970 г. Задачу предложила Франция.
- 4.5.5) Из материалов международной олимпиады по математике, 1979 г. Задачу предложили США.
- 4.5.12) Двадцать первый Турнир Городов, 1999–2000 гг., Осенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 4.

- 4.5.14) М. А. Кунгожин, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2010–2011 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 8.
- 4.5.15) Сообщил Л. А. Емельянов.
- 4.5.16) Из материалов международной олимпиады по математике, 1996 г. Задачу предложила Болгария.
- 4.5.20) Ф. Л. Бахарев, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2005 г., II тур, 10-ый класс, Задача 6.
- 4.5.22) Из материалов международной олимпиады по математике, 2006 г. Задачу предложила Бразилия. Здесь жирная линия параллельна основанию треугольника.
- 4.5.23) А. А. Полянский, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2006–2007 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 2. Здесь жирная линия параллельна основанию треугольника.
- 4.5.29) Частный случай 6.3.3.
- 4.5.31) Данная конструкция из окружностей не является редкой. См. рис. 10.15.
- 4.5.35) Д. В. Швецов, Шестая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2010 г., Заочный тур, Задача 8.
- 4.5.36) М. Г. Сонкин, Из материалов летней конференции Турнира Городов, «Окружности, вписанные в сегменты, и касательные», 1999 г.
- 4.5.37) М. Г. Сонкин, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1998–1999 гг., Заключительный этап, 9-ый класс, Задача 3.
- 4.5.38, 4.5.39) По мотивам задачи, предложенной Болгарией на Международную Олимпиаду по Математике, 2009 г.
- 4.5.40) D. Djukić и А. В. Смирнов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2005 г., II тур, 9-ый класс, Задача 6. Обобщение Н. И. Белухова.
- 4.5.41) Л. А. Емельянов, Двадцать третий Турнир Городов, 2001–2002 гг., Весенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 5.
- 4.5.43) В. А. Шмаров, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 7.
- 4.6.2) А. И. Бадзян, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2004–2005 гг., Окружной этап, 9-ый класс, Задача 4.
- 4.6.4) В. П. Филимонов, Московская математическая олимпиада, 2008 г., 11-ый класс, Задача 4.
- 4.6.6) В. Ю. Протасов, Третья геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2006 г., Заочный тур, Задача 15.
- 4.7.6) Обобщение 4.7.1.
- 4.7.8) Национальная математическая олимпиада Ирана, 1999 г.
- 4.7.9) Национальная математическая олимпиада Ирана, 1997 г., Четвёртый тур, Задача 4.
- 4.7.18) Nguyen Van Linh, С форума www.artofproblemsolving.com, Тема “A concyclic problem”, от 27 мая 2010 г.
- 4.7.16) Сообщили К. В. Иванов.
- 4.8.5) Сообщили Л. А. Емельянов и Т. Л. Емельянова.
- 4.8.7) Сообщил Ф. А. Ивлев.
- 4.8.8) Китай, Отбор на международную олимпиаду, 2011 г.
- 4.8.9) Л. А. Емельянов, Сборник «Математическое просвещение», Третья серия, Выпуск 7, 2003 г., Задачный раздел, Задача 8.

- 4.8.13) А. В. Смирнов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2009 г., II тур, 10-ый класс, Задача 7.
- 4.8.15) Г. Б. Фельдман, Седьмая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2011, Заочный тур, Задача 22.
- 4.8.16) Л. А. Емельянов и Т. Л. Емельянова, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2010–2011 гг., Заключительный этап, 9-ый класс, Задача 2.
- 4.8.20) А. В. Грибалко, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Окружной этап, 10-ый класс, Задача 2.
- 4.8.21) Частный случай 4.8.23.
- 4.8.27) В. П. Филимонов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Окружной этап, 9-ый класс, Задача 7.
- 4.8.29) Китай, Отбор на международную олимпиаду, 2010 г.
- 4.8.30) Т. Л. Емельянова, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2010–2011 гг., Региональный этап, 10-ый класс, Задача 2.
- 4.8.32) А. В. Акопян, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Заключительный этап, 10-ый класс, Задача 3.
- 4.8.33) Д. Скробот, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2007–2008 гг., Окружной этап, 10-ый класс, Задача 8.
- 4.8.38) Ф. К. Нилов, Частный случай задачи с четвёртой геометрической олимпиады имени И. Ф. Шарыгина, 2008 г., Финальный тур, 10-ый класс, Задача 7.
- 4.8.39) В. П. Филимонов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2006–2007 гг., Заключительный этап, 9-ый класс, Задача 6.
- 4.9.1) Построенная точка называется *изогонально сопряжённой относительно треугольника*.
- 4.9.3) Построенная точка называется *изотомически сопряжённой относительно треугольника*.
- 4.9.20) Получающаяся точка будет изогонально сопряжённой относительно треугольника. См. рис. 4.9.1.
- 4.9.26) А. А. Заславский, Третья геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2007 г., Финальный тур, 9-ый класс, Задача 3.
- 4.10.4) Д. В. Швецов, Шестая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2010 г., Заочный тур, Задача 2.
- 4.10.6) А. В. Смирнов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2005 г., II тур, 10-ый класс, Задача 2.
- 4.11.2) Д. В. Прокопенко, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2009–2010 гг., Региональный этап, 9-ый класс, Задача 4.
- 4.11.9) С. Л. Берлов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2007 г., II тур, 9-ый класс, Задача 2.
- 4.12.2) Данная конструкция является обобщением теоремы Бланшета. См. рис. 4.12.1.
- 4.12.3) А. В. Смирнов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2004 г., II тур, 9-ый класс, Задача 6.
- 4.12.4) Здесь жирная линия параллельна основанию треугольника.
- 4.12.7) Из материалов международной олимпиады по математике, 1982 г. Задачу предложил СССР.
- 5.1.1) М. А. Волчкевич, Восемнадцатый Турнир Городов, 1996–1997 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 5.

- 5.1.2) Л. А. Емельянов, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2000–2001 гг., Окружной этап, 9-ый класс, Задача 3.
- 5.1.4) М. В. Смуров, Девятнадцатый Турнир Городов, 1997–1998 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 2.
- 5.1.5) В. Ю. Протасов, Вторая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2006 г., Финальный тур, 8-ой класс, Задача 3.
- 5.1.9) Л. А. Емельянов и Т. Л. Емельянова, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2010–2011 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 2.
- 5.2.3) С. В. Маркелов, Шестнадцатый Турнир Городов, 1994–1995 гг., Весенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 3.
- 5.2.5) А. А. Заславский, Первая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2005 г., Финальный тур, 10-ый класс, Задача 3.
- 5.2.8) А. А. Заславский, Третья геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2007 г., Заочный тур, Задача 14.
- 5.2.10) А. В. Акопян, Московская математическая олимпиада, 2011 г., Задача 9.5.
- 5.2.2) Более общая конструкция в 5.4.16.
- 5.3.2) Из материалов международной олимпиады по математике, 1979 г. Задачу предложила Великобритания.
- 5.4.1–5.4.4) Частный случай 5.4.5.
- 5.4.7) М. Г. Сонкин, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1998–1999 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 3.
- 5.4.9) И. Вайнштейн.
- 5.4.10) А. А. Заславский, Четвёртая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2008 г., Заочный тур, Задача 10.
- 5.4.13) Данную конструкцию тоже можно назвать двойственной теоремой о бабочке. См. 6.4.3 и 6.4.4.
- 5.5.2) Ф. В. Петров, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2006 г., II тур, 11-ый класс, Задача 3.
- 5.5.3) W. Rопре, Международная олимпиада по математике, 2004 г., Задача 5.
- 5.5.8) М. И. Исаев, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2006–2007 гг., Окружной этап, 10-ый класс, Задача 4.
- 5.5.9) П. А. Кожевников, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 2009–2010 гг., Заключительный этап, 11-ый класс, Задача 3.
- 5.6.1, 5.6.2) И. Ф. Шарыгин, Международная олимпиада по математике, 1985 г., Задача 5.
- 5.6.10) Сообщил Л. А. Емельянов.
- 5.6.17) А. А. Заславский, Двадцатый Турнир Городов, 1998–1999 гг., Весенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 2.
- 5.7.4) Из материалов международной олимпиады по математике, 1966 г. Задачу предложила Польша.
- 6.1.7) П. А. Кожевников, Международная олимпиада по математике, 1999 г., Задача 5.
- 6.2.10) R. Gologan, Румыния, Отбор на международную олимпиаду, 2004 г.
- 6.5.9) В. Б. Мокин. XIV Кубок памяти Колмогорова, 2010 г., Личная олимпиада, Старшая лига, Задача 5.
- 6.6.3) А. А. Заславский, Вторая геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2006 г., Финальный тур, 8-ой класс, Задача 3.

- 6.7.9) Двадцать четвёртый Турнир Городов, 2002–2003 гг., Весенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 4.
- 6.8.11) Данная конструкция из окружностей не является редкой. См. рис. 10.8.
- 6.9.1) И. Ф. Шарыгин, Международная олимпиада по математике, 1983 г., Задача 2.
- 6.9.6) П. А. Кожевников, Девятнадцатый Турнир Городов, 1997–1998 гг., Осенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 4.
- 6.9.9) М. А. Волчкевич, Семнадцатый Турнир Городов, 1995–1996 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 2.
- 6.10.1) М. Г. Сонкин, Всероссийская олимпиада школьников по математике, Региональный этап, 1994–1995 гг., 9-ый класс, Задача 6.
- 6.10.3) А. А. Заславский, П. А. Кожевников, Московская математическая олимпиада, 1999 г., 10-ый класс, Задача 2.
- 6.10.4) П. А. Кожевников, Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1997–1998 гг., Окружной этап, 9-ый класс, Задача 2.
- 6.10.7) Dînu Şerbănescu, Румыния, Отбор на Балканскую олимпиаду.
- 6.10.8) Из материалов международной олимпиады по математике, 2002 г. Задачу предложила Франция.
- 6.10.10) Двадцать пятый Турнир Городов, 2003–2004 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 4.
- 6.10.12) Китай, Отбор на международную олимпиаду, 2009 г.
- 6.10.13) И. Нагель, Пятнадцатый Турнир Городов, 1993–1994 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 2. См. также 4.3.15.
- 6.10.20) В. Ю. Протасов, Третья геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина, 2007 г., Финальный тур, 10-ый класс, Задача 6.
- 6.10.21) Из материалов международной олимпиады по математике, 1984 г. Задачу предложили США.
- 6.10.23) Сообщил Е. А. Авксентьев. Данную конструкцию можно воспринимать как лёгкий способ решения задачи Аполлония.
- 7.2) Получающаяся прямая называется *трилинейной полярной точки относительно треугольника*.
- 8.1.1) Здесь подразумевается, что точку отразили относительно сторон.
- 8.1.4) Из материалов международной олимпиады по математике, 1966 г. Задачу предложила Болгария. См. также 6.1.10.
- 8.1.11) Из материалов международной олимпиады по математике, 1971 г. Задачу предложила Венгрия.
- 8.1.12) Е. Пржевальский, Шестнадцатый Турнир Городов, 1994–1995 гг., Осенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 3.
- 8.1.13) И. Нагель, Двенадцатый Турнир Городов, 1990–1991 гг., Осенний тур, Основной вариант, Старшие классы, Задача 2.
- 9.1) Если треугольники строить во внутреннюю сторону, то получившуюся аналогичным образом точку называют *второй точкой Наполеона*.
- 9.2) Из материалов международной олимпиады по математике, 1983 г. Задачу предложила Колумбия.
- 9.3) См. также 2.9 и 2.10.
- 9.9) Национальная олимпиада Венгрии и Израиля, 1997 г., Второй день, Задача 2.
- 9.16) Из материалов международной олимпиады по математике, 1970 г. Задачу предложила Бельгия. См. также 4.12.9.

- 9.20) Двадцать седьмой Турнир Городов, 2005–2006 гг., Весенний тур, Основной вариант, Младшие классы, Задача 3.
- 9.21) Из материалов международной олимпиады по математике, 1983 г. Задачу предложила Бельгия.
- 10.4) Данная конструкция эквивалентна теореме Паппа.
- 10.7) Сообщил Ф. В. Петров.
- 10.13) Сообщил В. А. Шмаров.
- 10.14) Обобщение предыдущей задачи.
- 11.4) Сообщил Ф. К. Нилов.
- 11.9) Сообщил В. Б. Мокин.
- 11.10) Сообщил П. А. Кожевников.
- 11.19, 11.20) Сообщил Ф. К. Нилов.
- 11.21) Сообщил Ф. К. Нилов.
- 11.22) Сообщил Ф. К. Нилов.
- 11.1.13) Данная прямая называется *полярной точки относительно коники*.
- 11.1.24) Аналогичное утверждение верно для любого вписанно-описанного чётно-угольника.
- 11.2.1, 11.2.2) Сообщил А. А. Заславский.
- 11.3.10) К. А. Сухов, Санкт-Петербургская олимпиада школьников по математике, 2005 г., Отборочный тур, 10-ый класс, Задача 1.
- 11.3.11) Сообщил Ф. К. Нилов.
- 11.3.16) Сообщил Ф. К. Нилов.

Конструкции, обнаруженные автором: 4.5.24, 4.5.25, 4.5.28, 4.5.31, 4.5.42, 5.4.17, 6.8.5, 6.8.6, 6.8.12, 10.8, 10.9, 10.11, 10.14, 11.4.2.

Литература

1. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы, М.: МЦНМО, 2010.
2. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
3. Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984.
4. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.
5. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦМНО, 2006.
6. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Планиметрия. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
7. Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N. The IMO compendium. Springer, 2006.
8. Evelyn C. J. A., Money-Coutts G. B., Tyrrell J. A. The seven circles theorem and other new theorems. Stacey International Publishers, 1974.
9. Johnson R. A. Advanced Euclidean Geometry. 2007.
10. Walser H. 99 Points of Intersection: Examples-Pictures-Proofs. The Mathematical Association of America, 2006.