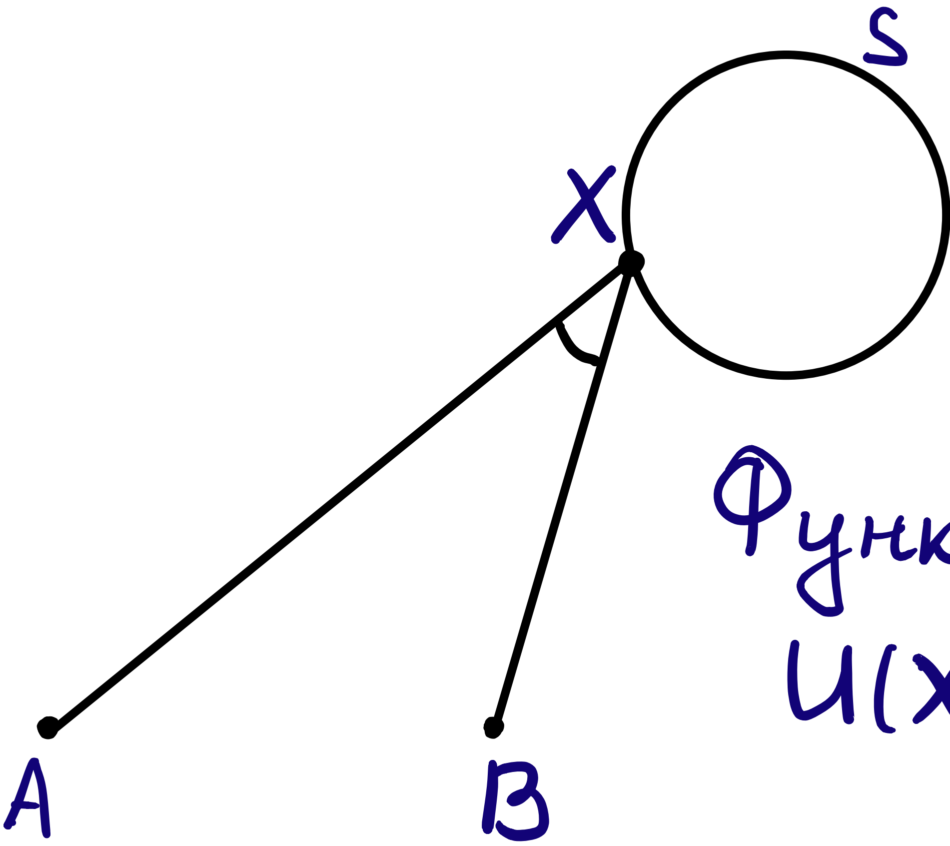
Гармонические функции и парадоксы вокруг теоремы Лиувилля.

А. Логунов (Принстон)

Математические вечера ЛШСМ
(июль 2020)



Функция угол
$$u(X) = \angle AXB$$

Окружность S не пересекает прямую AB.

Свойство о среднем значении.

Среднее значение u на S равно значению в центре S.

Обозначение. $\dfrac{\int_S u(x)}{\text{длина } S} =: \fint_S u$

$$\fint_S u = u(\text{центр } S)$$

Гармонические функции на плоскости.

Непрерывная функция называется **гармонической** в области O, если

Опр. 1 $\displaystyle \fint_{B_r(y)} u = u(y)$

для любого шара $B_r(y) \subset O$

(шар радиуса r с центром в y)

Опр. 2 $\displaystyle \fint_{\partial B_r(y)} u = u(y)$ для любой сферы $\partial B_r(y)$

$B_r(y) \subset O$

Оператор Лапласа в n-мерном пространстве.

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}$$

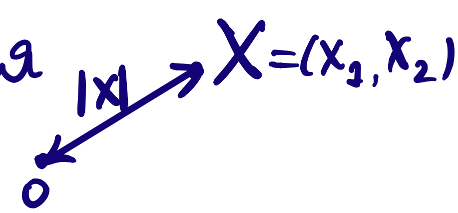
Опр. 3 (стандартное).

u гармоническая, если $\Delta u = 0$.
(в области O)

Пример. Линейная функция гармонична.

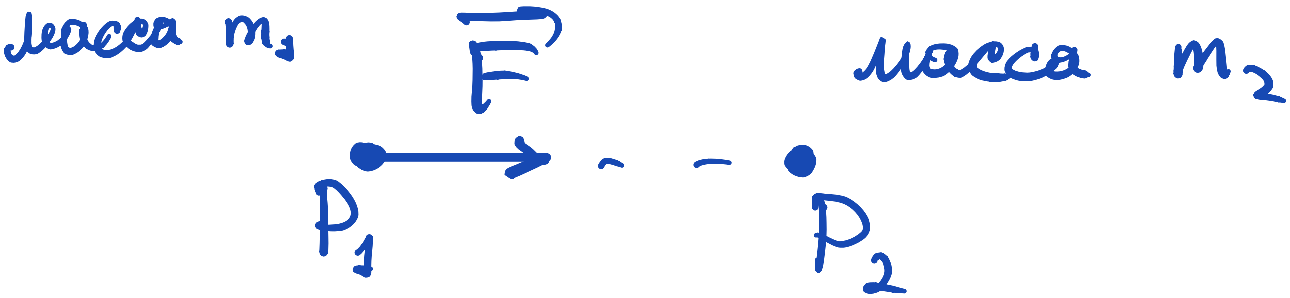
<u>Теорема.</u> Определения равносильны.

<u>Упр.</u> $\ln|x|$ - гармоническая функция в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



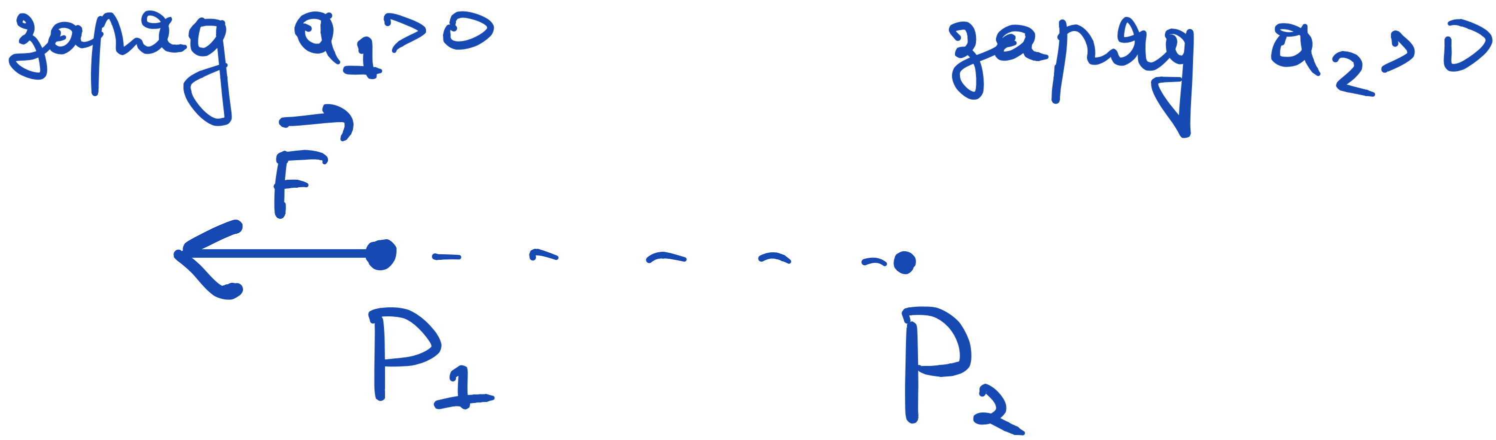
(нужно продифференцировать $\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$)

Сила притяжения между двумя точечными массами.



$$|\vec{F}| = c \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|P_1 - P_2|^2}$$

Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами



$$|\vec{F}| = \tilde{c} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|P_1 - P_2|^2}$$

Есть конечный набор точечных масс m_i в точках p_i

Ньютоновский потенциал в $\mathbb{R}^3$.

$$u(x) = \sum \frac{m_i}{|x-p_i|}$$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}^3 \setminus \{p_i\}$

Сила гравитационного поля равна (с точностью до массы и константы)

$$\nabla u(x) = \sum \frac{m_i(p_i - x)}{|x-p_i|^3}$$

Потенциал электростатического поля тоже есть гармоническая функция.

Гипотеза Максвелла

Пусть есть n точечных положительных зарядов в $\mathbb{R}^3$.

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{|x-p_i|}$$ — потенциал.

$$a_i > 0$$

Количество критических точек функции u не больше $(n-1)^2$.

$$\#\{x: \nabla u(x)=0\} \le (n-1)^2$$

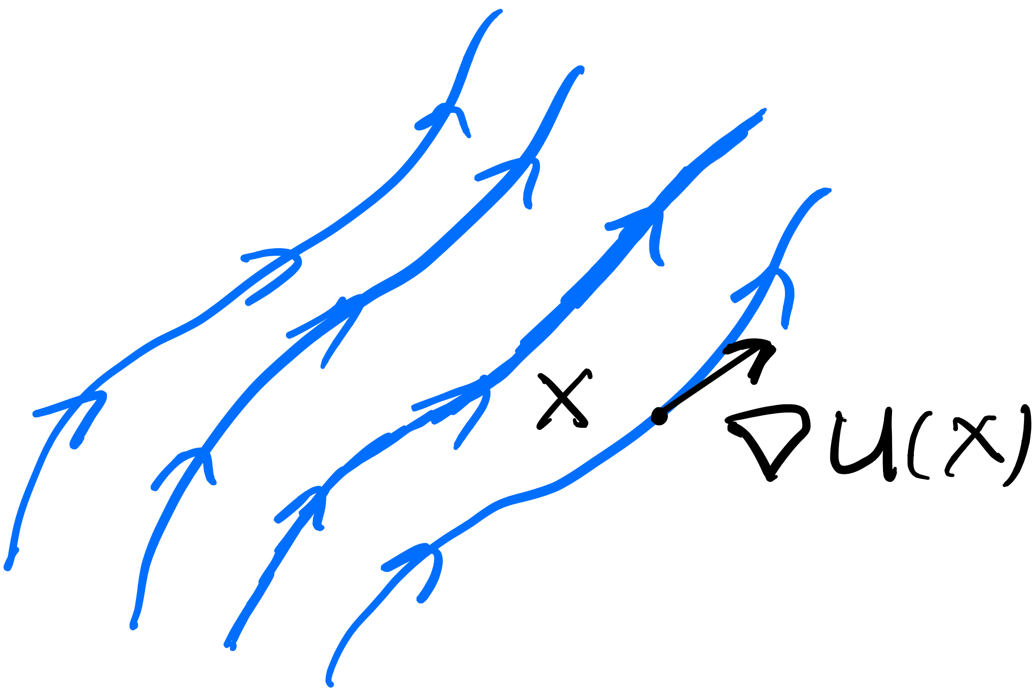
Обзор А. Еременко: неизвестно почему # крит. точек функции u конечно.

Гармонические функции и потоки идеальной несжимаемой жидкости.

градиент гармонической ф-ции

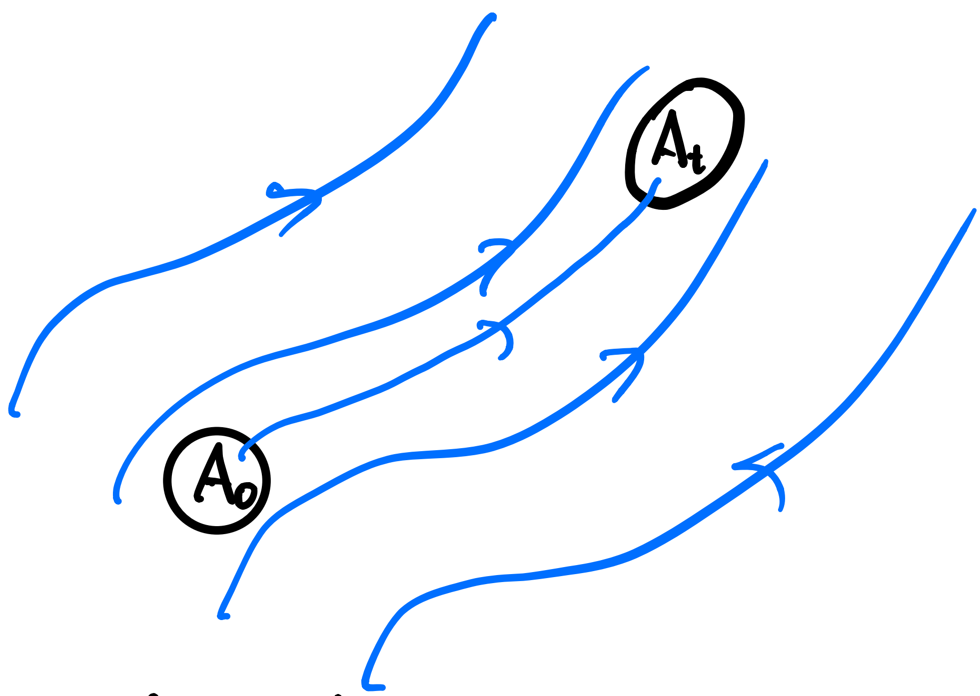
||

поле скоростей жидкости.



Поток градиента гармонической функции сохраняет объем.

(в двумерии площадь)



A_t = {множество, куда придут точки из A_0 через время t}

Площадь A_t = Площадь A_0

(если поток определен все время)

Теорема Лиувилля.

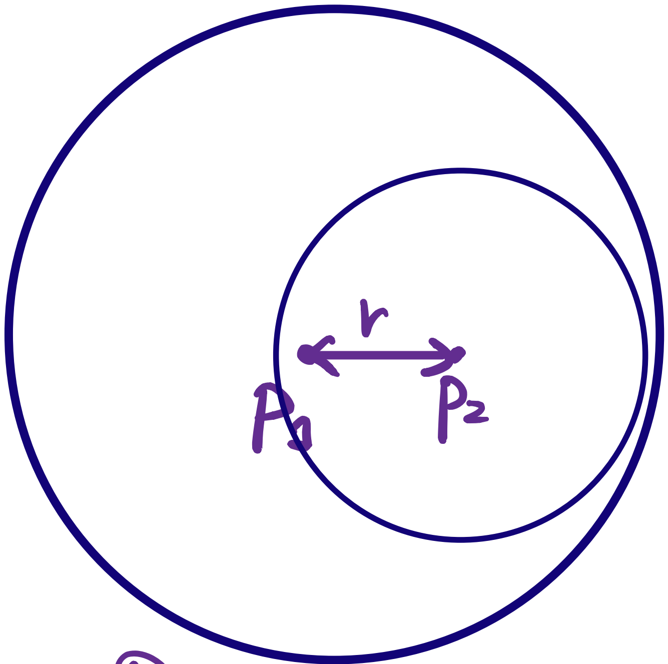
Если u - гармоническая функция на плоскости, $|u| \leq 1$, то $u \equiv const$.

Вторая теорема Лиувилля для положительных гармонических функций в $\mathbb{R}^2$.

Если $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^2$ и $u > 0$. Тогда $u \equiv const$.

Первая т-ма следует из второй. (к ограниченной ф-ции всегда можно добавить константу, чтобы она стала положительной)

Д-во т-мы Лиувилля



$$u(P_1) \overset{?}{=} u(P_2)$$

Докажем, что $u(P_1) \geq u(P_2)$

Пусть $r = |P_1 - P_2|$

Рассмотрим 2 шара

$$B_{R+r}(P_1) \supset B_R(P_2)$$

$$|B_{R+r}| \cdot u(P_1) = \int\limits_{B_{R+r}(P_1)} u \geq \int\limits_{B_R(P_2)} u = |B_R| \cdot u(P_2)$$

Итак, $u(P_1) \geq \dfrac{|B_R|}{|B_{R+r}|} u(P_2) \xrightarrow{R \to +\infty} u(P_2)$

Теорема Лиувилля влечет, что любая непостоянная гармоническая функция в $\mathbb{R}^2$ имеет хотя бы один ноль.

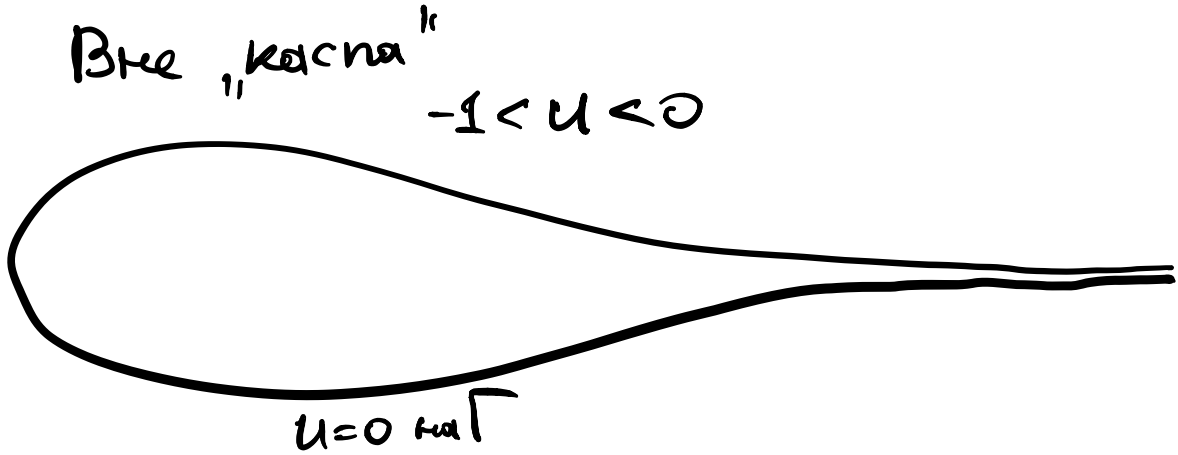
Структура нулевых множеств в $\mathbb{R}^2$.

Нулевое множество гармонической функции на плоскости — это объединение гладких кривых, у которых концы убегают на бесконечность.

Конструкция имени Рунге (без док-ва)

Существует гармоническая функция u на плоскости:
(непостоянная)

$-1 < u < 0$ на почти всей плоскости
(везде кроме мн-ва конечной площади)

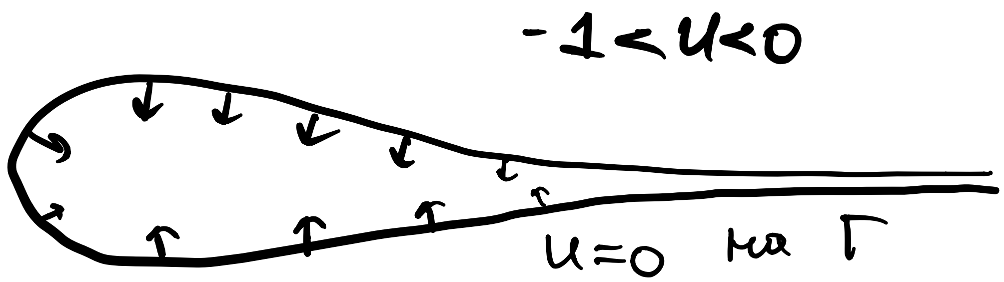


Внутри „каспа“ функция ведёт себя дико: бешенно растет и меняет знак.

Ньюман: явные формулы, которые задают подобную ф-цию.

Теорема Рунге $\Rightarrow$ существование такой ф-ции.

Пример имени Рунге VS гидродинамика
(по беседе с Д. Салливаном и С.К. Смирновым.)

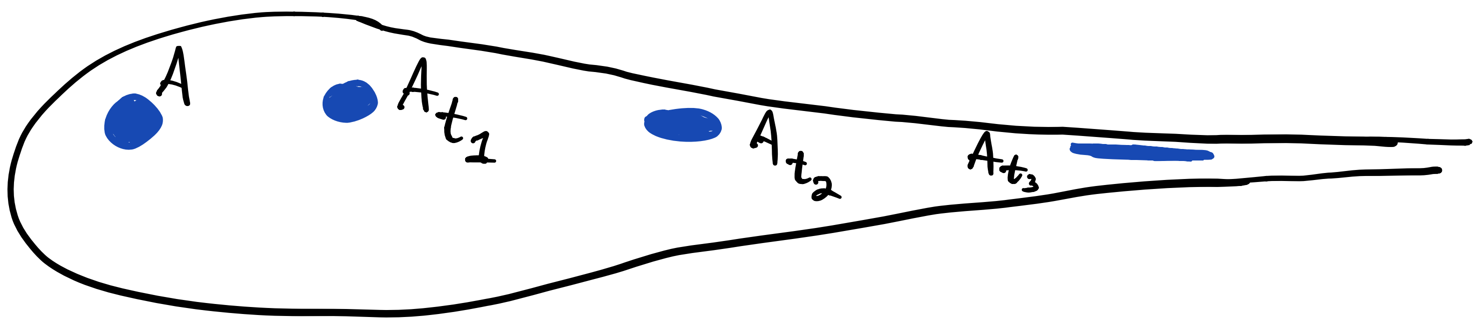


∇u направлен внутрь „каспа"
Поток ∇u сохраняет площадь.

Д. Салливан:

Есть полная ванна конечной площади.
Вода не выходит через стенки ванны, а только входит, но при этом жидкость несжимаема.

Вопрос от С.К. Смирнова



Почему нельзя взять ограниченное подмножество A внутри каспа и выбрать моменты времени

$t_1 << t_2 << t_3 \ldots$

так чтобы

$A_{t_1}, A_{t_2}, A_{t_3} \ldots$ не пересекались?

$A_{t_1}, A_{t_2}, A_{t_3}$ имеют одинаковую площадь

А ванна имеет конечную площадь.

Вдоль градиентного потока

значение функции растёт к $+\infty$.

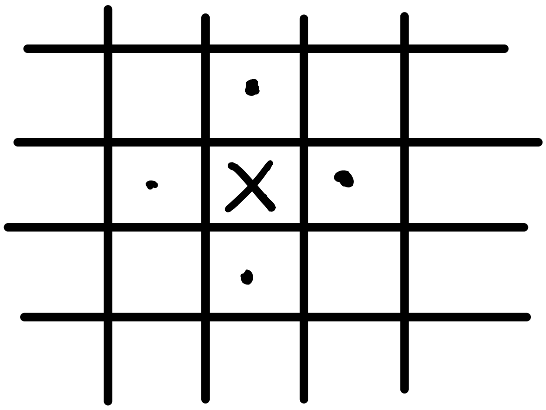
(за исключением ситуации, когда попали в критическую точку, а таких траекторий мало.

Такие траектории занимают нулевую площадь.

Дискретный мир.

Гармонические ф-ции на $\mathbb{Z}^2$

(на клетчатой плоскости)



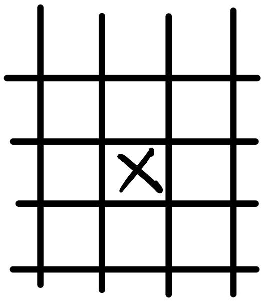
$$u(x) = \frac{\sum\limits_{y\text{-сосед } x} u(y)}{\#\text{соседей}}$$

x имеет 4 соседа по стороне

Дискретный оператор Лапласа.

$$\Delta u(x) = \sum_{y\text{-сосед } x} u(y)/4 - u(x)$$

Дискретная теорема Лиувилля на $\mathbb{Z}^2$.



u – гармоническая функция на $\mathbb{Z}^2$.

$$u(x)=\frac{\sum\limits_{y\text{ - сосед }x} u(y)}{4}$$

Если $|u|\le 1$ на $\mathbb{Z}^2$, то $u\equiv 0$.

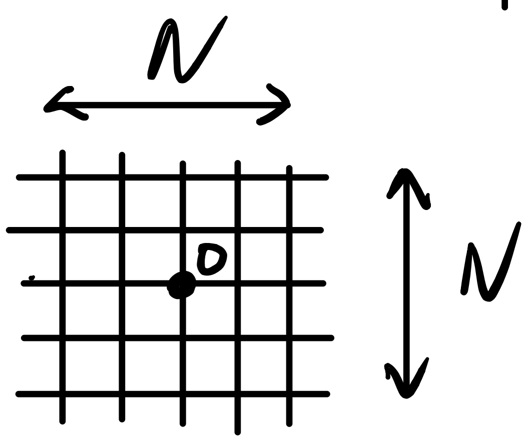
Теорема (Л. Буховский, А.Л., Е. Малинникова, М. Содин)
(улучшение теоремы Лиувилля на $0{,}0000001\%$)

Если u гармоническая на $\mathbb{Z}^2$,
$|u|\le 1$ на 99.9999999%
доли $\mathbb{Z}^2$, то $u\equiv \text{const}$.

Мы будем говорить, что $|u| \le 1$ на $(1-\varepsilon)$ доле $\mathbb{Z}^2$, если

$$\frac{|Q_N \cap \{|u|>1\}|}{|Q_N|} \le \varepsilon$$

при $N \ge N_0$



Q_N – квадрат $N \times N$ с центром в нуле.

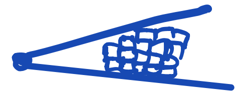
Пример. $u(x,y) = e^{ay} \sin \frac{\pi}{2} x$ $\qquad x, y \in \mathbb{Z}$

a – решение $e^a + e^{-a} = 4$

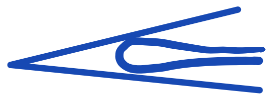
0		0		0
0	$-e^{2a}$	0	e^{2a}	0
0	$-e^{a}$	0	e^{a}	0
0	-1	0	1	0
0	$-e^{-a}$	0	e^{-a}	0
0		0		0

$|u| \le 1$ на $\frac{3}{4}$ $\mathbb{Z}^2$

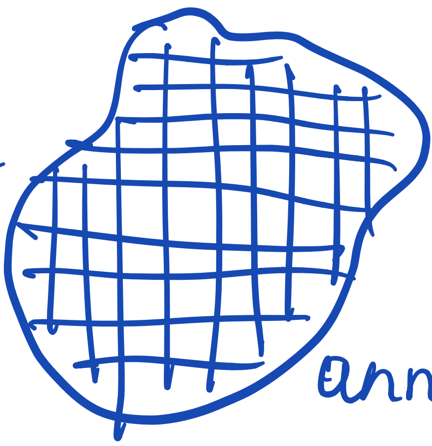
$|u| = 0$ на половине $\mathbb{Z}^2$

Следствие. Если гармоническая ф-ция на $\mathbb{Z}^2$ ограничена вне угла  раствора $< \frac{1}{10^{10}}$, то она константа.

Непрерывный аналог теоремы неверен.
(примеры имени Рунге)



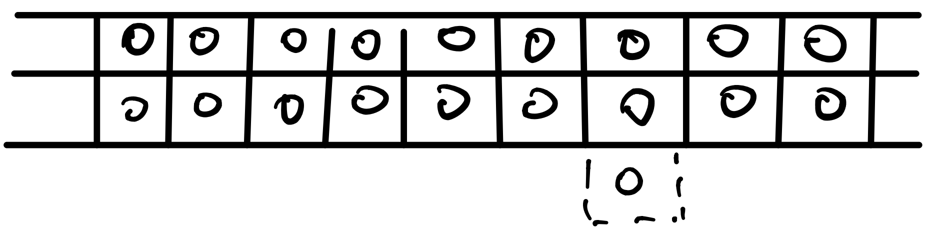
Теорема (Курант, Леви, Фридрихс, 1928)

Ω 

непрерывную гармоническую функцию u в гладкой ограниченной области Ω можно аппроксимировать дискретными гармоническими ф-циями u_k на $\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}^2$ так, что $u_k \rightrightarrows u$.

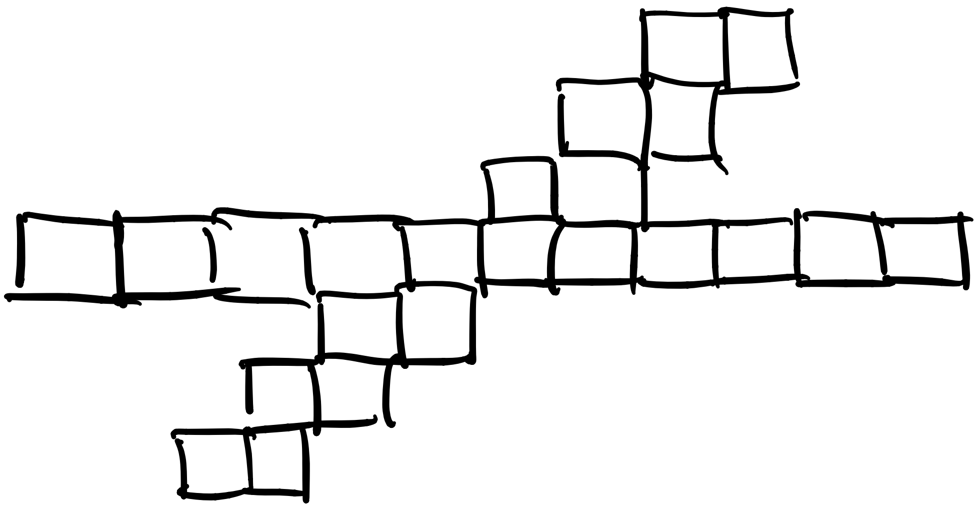
Более простой вопрос:
если $u=0$ на $(1-\varepsilon)$ доли $\mathbb{Z}^2$,
u - гармонична, то $u \equiv const$.

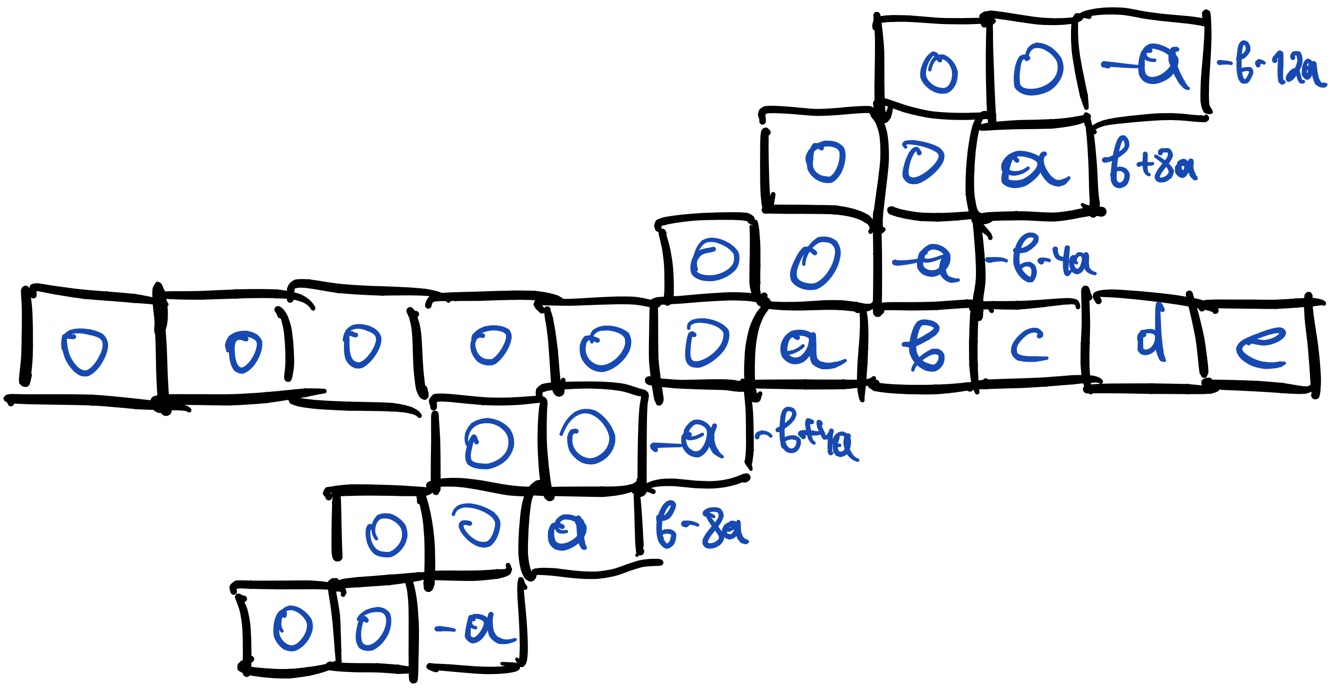
Пример. Если $u=0$ на
двух горизонталях



то $u \equiv 0$.

Пример. Гармоническая ф-ция и однозначно задается своими значениями на 2-ух соседних диагоналях и 1-ой горизонтали.





Спасибо за внимание !

Реклама для абитуриентов.

https://math-cs.spbu.ru

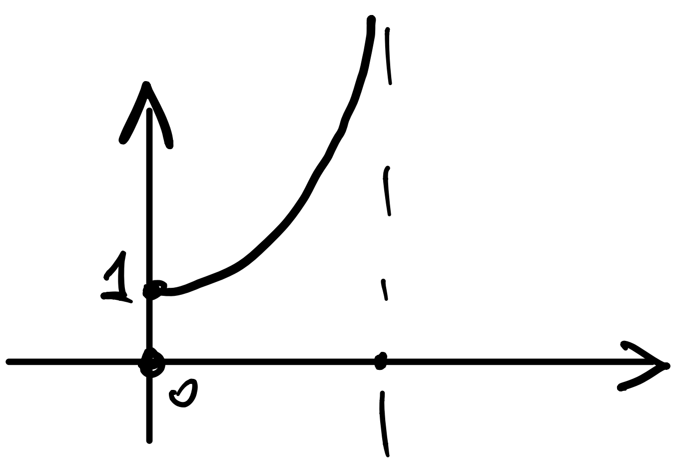
Ответ к парадоксу с ванной.

Жидкость убегает на бесконечность за конечное время.

Замечание (без д-ва).
Решение уравнения

$$\frac{d}{dt} u = u^2 \quad , \quad u(0) = 1$$

взрывается (доходит до $+\infty$) за конечное время.

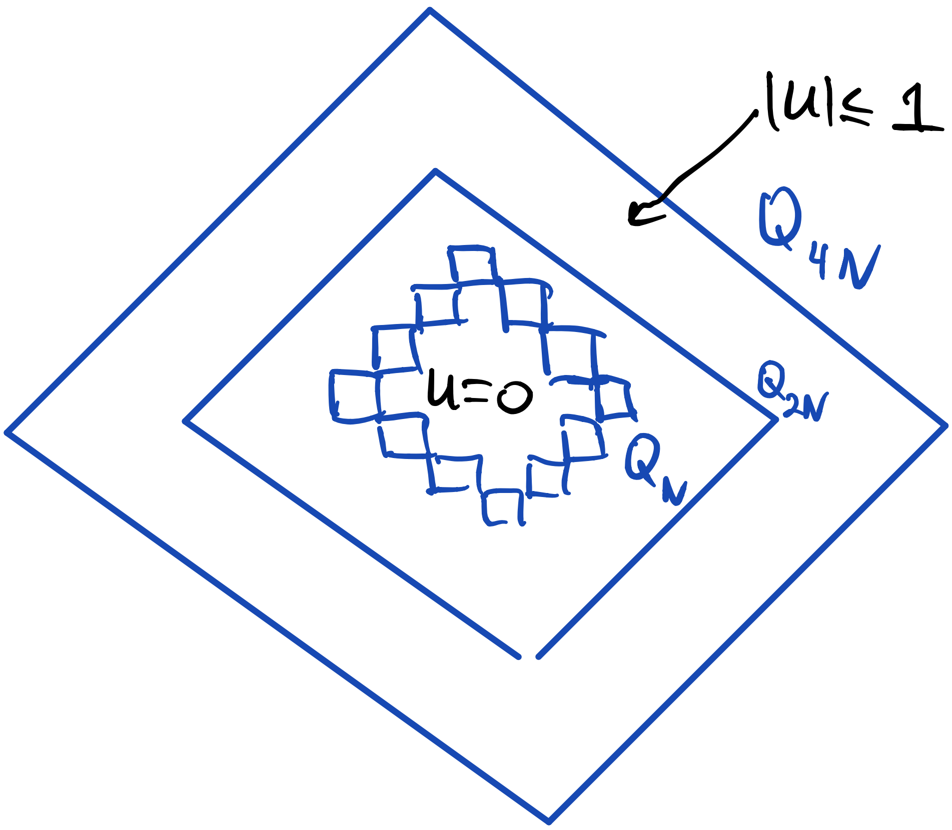


Открытый вопрос в $\mathbb{Z}^2$.

$$\Delta u(x) + V(x)\cdot u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{Z}^2$$

$$|V(x)| < \frac{1}{1000}$$

$u(x) =$ среднее соседей $\cdot \left(1 \pm \frac{1}{1000}\right)$.



Известно, что $u = 0$ в повернутом квадрате Q_N ($N \times N$),

$|u| \le 1$ в Q_{4N}.

Доказать / опровергнуть, что

$|u| \le e^{-cN}$ в Q_{2N} (или другую оценку)