1

Летняя школа
Ратмино, 20-24.07.2017

Арифметика и алгебра многогранников по Эрхарту

Лекция 1

Формула Пика

$\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ целоч. решетка

$P \subset \mathbb{R}^2$ многоуг. с вершинами в $\mathcal{L}$
(целоч. мн-к)

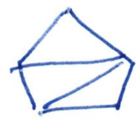
I — число целых точек (строго) внутри P

B — // — // на границе P

~~G.A.~~ Pick, 1899: Площадь P равна

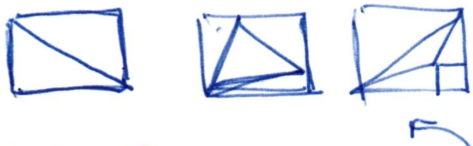
$$\boxed{A = \underbrace{I + \frac{B}{2} - 1}_{R}} \quad (\star)$$

~~Упр. Докажите её~~

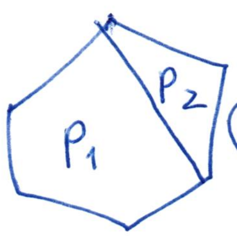


Идея док-ва: ① Правая часть аддитивна:

$R = R_1 + R_2$



P



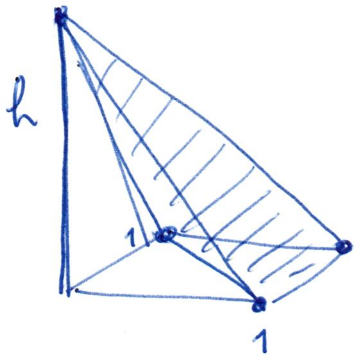
② $(\star)$ Верно для прямоуг.

③  $\Rightarrow$ для прямоуг. Δ-ков

 $\Rightarrow$ для всех Δ-ков

Обобщения для многогранников?

Не существует: ~~пример~~ <u>Тетраэдр Рива</u> T_h



$$I = 0, \quad B = 4$$

$$\mathrm{Vol}\, T_h = h/6$$

Что делать?

<u>Теория Эрхарта</u> (E. Ehrhart, 1962)

$$\mathcal{L} = \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$$

P — выпуклый мн-к (<u>политоп</u>) с вершинами в $\mathcal{L}$

$$P = \mathrm{conv}\{v_1, \dots, v_N\} := \{x_1 v_1 + \dots + x_N v_N : x_1 + \dots + x_N = 1,\ x_i \geq 0\}$$

вып. оболочка — conv

<u>вершины</u> — $v_1, \dots, v_N$

<u>Опр</u>. <u>Многочлен Эрхарта</u> $L_P(t)$ ~~$L(t)$~~ опр как число целых точек в tP, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$L_P(t) := |tP \cap \mathcal{L}|, \quad t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

<u>Ряд Эрхарта</u>

$$\boxed{\mathrm{Ehr}_P(z) = \sum_{t=0}^{\infty} L_P(t)\, z^t}$$

Производ. ф-ия мн-ов Эрхарта

Ehrhart:

Эрхарт ~~(1960s)~~: $L_P(t)$ – многочлен по t степени d:

$$L_P(t) = \mathrm{Vol}\, P \cdot t^d + \ldots + 1,$$

$\mathrm{Vol}\, P$ – объем P.

Stanley:

~~Стенли~~: $$\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{h_d z^d + \ldots + h_0}{(1-z)^{d+1}}$$

где $h_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $h_0 = 1$.

Дуальность Эрхарта-Макдональда

Пусть $P^\circ = P \setminus \partial P$ – открытый многогр. (без границы), тогда

$$L_{P^\circ}(t) = (-1)^d L_P(-t) \qquad \text{ЭМ1}$$

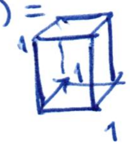
$$\mathrm{Ehr}_{P^\circ}(z) = (-1)^{d+1} \mathrm{Ehr}_P\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{ЭМ2}$$

(Д-ва на след. лекции).

④

⓪ $d=2 \overset{}{\underset{\text{Pick}}{\Rightarrow}} L_P(t) = At^2 + \frac{B}{2}t + 1$

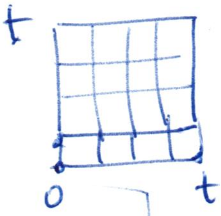
$\mathrm{Ehr}_P(z) = \dfrac{Iz^2 + (I+B-3)z + 1}{(1-z)^3}$ (Пров.!)



Примеры

① $P = \square_d = [0,1]^d$ — d-мерный куб

$t\,\square_d = [0,t]^d$



$$\boxed{L_{\square_d}(t) = (t+1)^d = \sum_{k=0}^{d} C_d^k t^k}$$

$$\mathrm{Ehr}_{\square_d}(z) = \sum_{t\geq 0} (t+1)^d z^t = \frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\infty} j^d z^j$$

$$= \frac{1}{z} D^d \left(\frac{1}{1-z}\right), \quad D = z\frac{d}{dz}$$

$$= \frac{A_d(z)}{(1-z)^{d+1}}, \quad A_d(z) = \sum_{k=0}^{d-1} A(d,k) z^k$$

мн-н Эйлера (1755) числа Эйлера ($\pi(i) < \pi(i+1)$)

$$A(d,k) = \#\{\pi \in S_d : \text{число подъемов равно } k\}$$

$A_1 = 1$

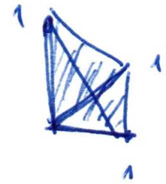
$A_2 = z+1$

$A_3 = z^2 + 4z + 1$

$A_4 = z^3 + 11z^2 + 11z + 1$

.....

(5) (2) $P = \Delta_d$ − d-мерный симплекс



$$\Delta_d = \{ (x_1, \dots, x_d) : \ x_1 + \dots + x_d \le 1, \ x_i \geq 0 \}$$

$$t\Delta_d = \{ (x_1, \dots, x_d) : \ x_1 + \dots + x_d \le t, \ x_i \geq 0 \} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_d + x_{d+1} = t \\ x_i \geq 0 \end{array}$$

$$\boxed{L_{\Delta_d}(t) = C^d_{d+t} = \frac{(t+d)\dots(t+1)}{d!}}$$

$$\boxed{Ehr_{\Delta_d}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} C^d_{d+t} z^t = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}}$$

Действ., $(1-z)^{-(d+1)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k_{-(d+1)} (-z)^k$

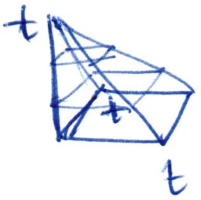
где $C^k_a := \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$ (Ньютон)

$$C^k_{-(d+1)} = \frac{(-(d+1))(-d-2)\dots(-d-\cancel{1}-k+\cancel{1})}{k!} = (-1)^k \frac{(d+k)\dots(d+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k C^k_{d+k}$$

6

3 $P = P_d$ — пирамида над ~~(d−1)~~ кубом $\square_{d-1}$
с вершиной в $(0,\dots,0,1)$



$$\boxed{L_{P_d}(t) = \sum_{k=1}^{t+1} k^{d-1} = S_{d-1}(t+2)}$$

$$S_m(x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^{k} B_k x^{m+1-k}$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(x) - B_{m+1}\right)$$

мн-ны числа Бернулли

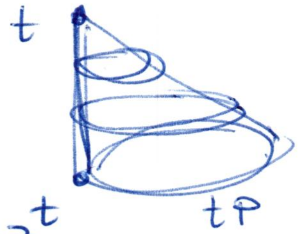
$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$$

мн-ны Эйлера

$$\boxed{\mathrm{Ehr}_{P_d}(z) = \frac{\mathrm{Ehr}_{\square_{d-1}}(z)}{(1-z)} = \frac{A_{d-1}(z)}{(1-z)^{d+1}}}$$

Лемма. Для пирамиды P над Q

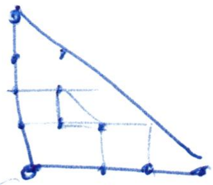
$$\boxed{\mathrm{Ehr}_P(z) = \frac{\mathrm{Ehr}_Q(z)}{1-z}}$$



Д-во $\mathrm{Ehr}_P(z) = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{t} L_Q(j)\right) z^t$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} L_Q(j) \sum_{t\geq j} z^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{L_Q(j) z^j}{1-z} = \frac{\mathrm{Ehr}_Q(z)}{1-z} \quad \square.$$

7 Проверим дуальность:



$$L_{P_d^\circ}\#(t) = \sum_{k=1}^{t-2} k^{d-1} = S_{d-1}(\overset{x}{\overset{\parallel}{t-1}}) \quad \left(= L_P(t-3)\right)$$

$$\overset{\cancel{?}}{=} (-1)^d L_{P_d}(-t) = (-1)^d S_{d-1}(\overset{1-x}{\overset{\parallel}{-t+2}})$$

$$\boxed{B_d(x) = (-1)^d B_d(1-x)} \qquad (!)$$

$$Ehr_{P_d^\circ}(z) = \sum_{t=3}^{\infty} L_P(t-3)\, z^t = z^3\, Ehr_{P_d}(z)$$

$$\overset{?}{=} (-1)^{d+1} Ehr_{P_d}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{z^3 A_{d-1}(z)}{(1-z)^{d+1}} \overset{?}{=} (-1)^{d+1} \frac{A_{d-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{d+1}}$$

$$z^3 A_{d-1}(z) = z^{d+1} A_{d-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\boxed{A_{d-1}(z) = z^{d-2} A_{d-1}\left(\frac{1}{z}\right)} \leftarrow \text{палиндром}$$

$$A(d,k) = A(d, d-k-1) \qquad \checkmark$$

8

Упражнения

(1) ~~Проверьте дуальность~~ ок

1. Проверьте дуальность ЭМ в посчитанных примерах

2. Найдите $L_P(t)$, $Ehr_P(z)$ для

тетраэдра Рива T_h

a) ~~мн-ка P на мн-м (в терминах~~ I, B

b) октаэдра с верш. $\pm e_i$, $i = 1, 2, 3$

c) его многом. аналога $\Diamond_d = \mathrm{conv}(\pm e_i)$, $i = 1, .., d$

(кросс-политопа)

II

3.* Докажите "локальную" гипотезу Римана.

Нули $L_{\Diamond_d}(t)$ лежат на прямой

$$\mathrm{Re}\, t = -\frac{1}{2}$$

a) для $d = 3$

b)* для любого d.

Лекция 2

Производящая ф-ия мн-ва

$S \subset \mathbb{R}^d$ определяется как

$$\boxed{\sigma_S(z) := \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^d} z^m}$$

$z = (z_1, \ldots, z_d)$
$m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$
$z^m = z_1^{m_1} \ldots z_d^{m_d}$

Пример $S = [0, \infty) \subset \mathbb{R}^1$

$$\sigma_S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} \qquad (z = z_1)$$

$$\sigma_{[a,b]}(z) = z^a + \ldots + z^b = \frac{z^a - z^{b+1}}{1-z}$$

Рациональный конус $K \subset \mathbb{R}^d$

$$K = \{ v + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_N w_N, \ \lambda_i \geq 0 \}$$

$v \in \mathbb{R}^d$ - вершина, $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{Z}^d$ - образующие

K - симплициальный, если $N = d$.

Для симпл. K $\sigma_K(z)$ можно вычислить явно след. образом.

Опр. $\exists$ фунд. паралл-д Π конуса K

$$\Pi := \{ \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_d w_d : 0 \leq \lambda_i < 1 \}$$

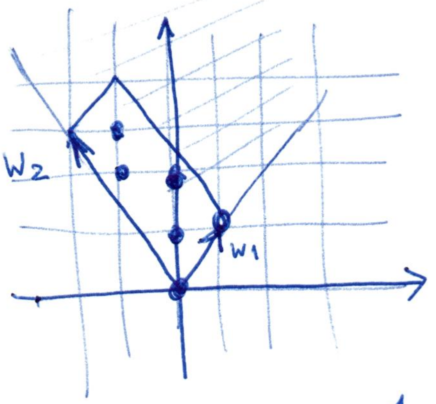
Тогда

$$\boxed{\sigma_K(z) = \frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{(1 - z^{w_1}) \ldots (1 - z^{w_d})}} \qquad (1)$$

Пример

$d=2$, $w_1=(1,1)$, $w_2=(-2,3)$

$v=0$



Решетка $\mathcal{L}=\langle w_1,w_2\rangle$

дает вклад

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} z^{m_1w_1+m_2w_2} = \frac{1}{(1-z^{w_1})(1-z^{w_2})}$$

$$= \frac{1}{(1-z_1z_2)(1-z_1^{-2}z_2^3)}$$

$$\boxed{\sigma_K(z)=\frac{1+z_2+z_2^2+z_1^{-1}z_2^2+z_1^{-1}z_2^3}{(1-z_1z_2)(1-z_1^{-2}z_2^3)}}$$

Пусть $P\subset\mathbb{R}^d$ — вып. целоч. мн-к

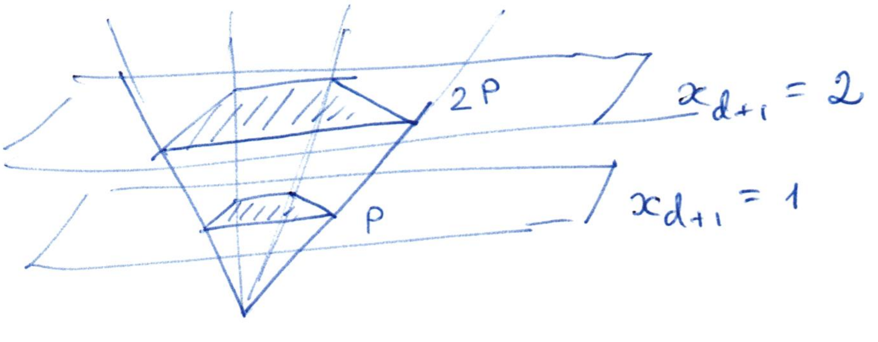
Вложим его в $\mathbb{R}^{d+1}$, добавив $x_{d+1}=1$ и рассмотрим конус $K(P)$ над ним:

$K(P):=\{\lambda_1w_1+\dots+\lambda_Nw_N,\ \lambda_i\geq 0\}$,

$w_i=(v_i,1)\in\mathbb{R}^{d+1}$, $v_1,\dots,v_N$ — вершины P

Ключевое наблюдение:

$$(2)\quad \boxed{\sigma_{K(P)}(1,\dots,1,z)=\mathrm{Ehr}_P(z)}$$

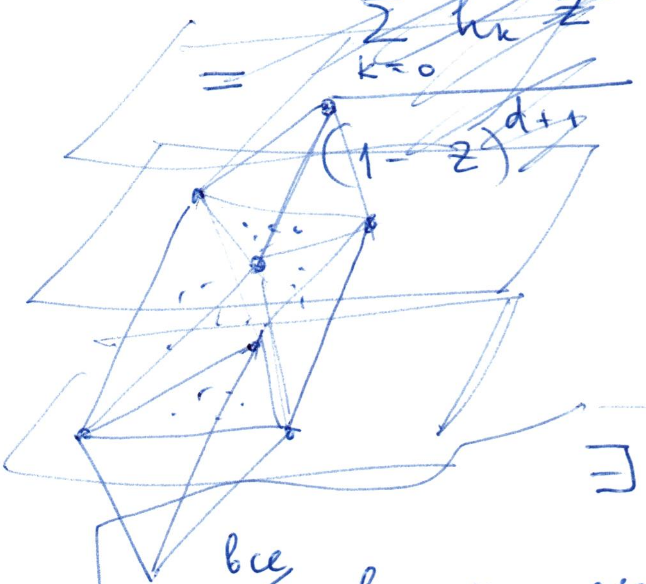


11

Следствие: теорема Стенли для симплекса Δ

$$\mathrm{Ehr}_{\Delta}(z) = \frac{\sigma_{\Pi}(1,\dots,1,z)}{(1-z)^{d+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{d} h_k z^k}{(1-z)^{d+1}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{d} h_k z^k}{(1-z)^{d+1}}, \qquad h_k = \#\{\Pi \cap \mathbb{Z}^{d+1} \cap x_{d+1}=k\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$



~~Для~~ В общем случае разобьем P на симплексы $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ и восп. след. тех. леммой:

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^d: \ (v + K(P)) \cap \mathbb{Z}^d = K(P) \cap \mathbb{Z}^d$$

и все соотв. конусы $K(\Delta_i)$ не имеют целых точек на границе. (общее положение)

Тогда $\sigma_{K(P)}(z) = \sigma_{v+K(P)}(z) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{v+K(\Delta_i)}(z)$

$\Rightarrow$ Теорема Стенли.

Для вывода отсюда теоремы Эрхарта нужна только ~~восп.~~

Лемма. Коэф. Тейлора a_k рац. ф-ии

$$\frac{p(z)}{(1-z)^{d+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad p(1) \neq 0, \ \deg p = d$$

явл. многочленами по k степени d.

Упр.: Докажите! $\cancel{\frac{1}{(1-z)^{d+1}} \neq \mathbb{Z}}$

$$\left(\frac{1}{(1-z)^{d+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{d+k}^{d} z^k \right)$$

$$\Rightarrow L_P(t) = c_d t^d + \dots + c_0, \quad c_0 = 1$$

Из теории интеграла Римана

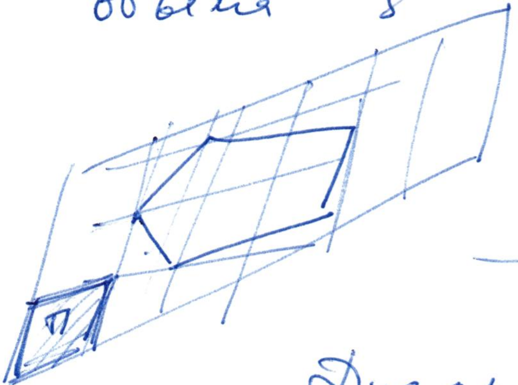
$$\mathrm{Vol}\, P = \lim_{N\to\infty} \frac{\left|P \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^d\right|}{N^d} = \lim_{N\to\infty} \frac{\left|NP \cap \mathbb{Z}^d\right|}{N^d}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{L_P(N)}{N^d} = c_d .$$

Зам. Можно доказать так же, что

$$\boxed{c_{d-1} = \frac{1}{2}\, \text{"Vol"}\, \partial P}$$

где в каждой грани единица объема задается соотв. фунд. ячейкой.



Геом. смысл остальных коэф. не известен (мне).

Дуальность Стенли

Пусть K рац. конус с вершиной в 0

Th. (Stanley) $\sigma_K\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_d}\right) = (-1)^d \sigma_{K^\circ}(z_1 \dots z_d)$

понимаемое как ~~где~~ равенство соотв. рац. функций.

Д-во ~~Разоб~~ **Лемма** Для симпл. конуса K и v общего положения

$$\boxed{\sigma_{v+K}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^d \sigma_{-v+K}(z)}$$

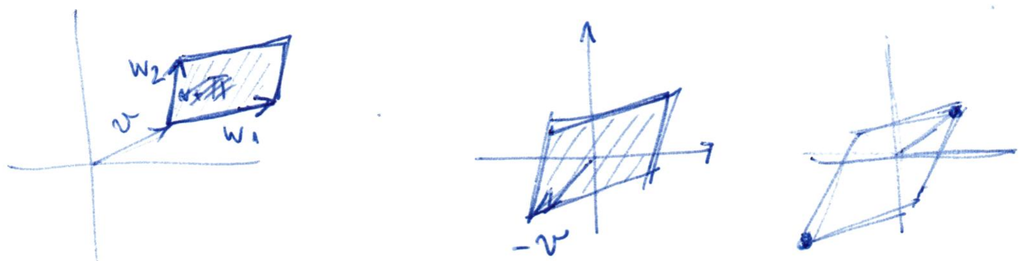
(13)

Действ.,

$$\sigma_{v+K}(z) = \frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{\prod_{k=1}^{d}\left(1 - z^{w_k}\right)}$$

$$\sigma_{-v+K}(z) = \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)}{\prod_{k=1}^{d}\left(1 - z^{w_k}\right)}$$

Но $\boxed{v+\Pi = -(-v+\Pi) + (w_1 + \ldots + w_d)}$



$v+\Pi$ $\qquad$ $-v+\Pi$ $\qquad$ $-(-v+\Pi)$

$$\sigma_{v+\Pi}(z) = \sigma_{-(-v+\Pi)}(z) \cdot \prod_{k=1}^{d} z^{w_k}$$

$$= \sigma_{-v+\Pi}\left(\frac{1}{z}\right) \prod_{k=1}^{d} z^{w_k}$$

$$\sigma_{v+K}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sigma_{v+\Pi}\left(\frac{1}{z}\right)}{\prod_{k}\left(1 - z^{-w_k}\right)} = \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)\prod_{k=1}^{d} z^{-w_k}}{\prod_{k=1}^{d}\left(1 - z^{-w_k}\right)}$$

$$= \frac{\sigma_{-v+\Pi}(z)}{\prod_{k=1}^{d}\left(z^{w_k} - 1\right)} = (-1)^d \, \sigma_{-v+K}(z). \quad \square$$

(14)

Д-во ~~теор~~ дуальности Стенли:

разобьем K на симпл. конусы

$K = K_1 \cup \ldots \cup K_m$

Сущ. $v \in \mathbb{R}^d$ общего положения, такое что

$$(v + K) \cap \mathbb{Z}^d = K \cap \mathbb{Z}^d$$

$$(-v + K) \cap \mathbb{Z}^d = K^0 \cap \mathbb{Z}^d$$

$$\sigma_K\left(\frac{1}{z}\right) = \sigma_{+v+K}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{+v+K_j}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Лемма

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^d \sigma_{-v+K_j}(z) = (-1)^d \sigma_{-v+K}(z) = (-1)^d \sigma_{K^0}(z).$$

$\square$

Следствие дуальность ЭМ

$$\boxed{\begin{aligned} &(3)\quad Ehr_{P^0}(z) = (-1)^{d+1} Ehr_P\left(\frac{1}{z}\right) \quad (ЭМ2) \\ &(4)\quad L_{P^0}(t) = (-1)^d L_P(-t) \quad (ЭМ1) \end{aligned}}$$

Неочевидно теперь только ~~последнее~~ (ЭМ1). Нужна

Лемма Для любого мн-на $Q(t)$ ряды

$$R_+ = \sum_{t \geq 0} Q(t) z^t, \quad R_- = \sum_{t<0} Q(t) z^t = \sum_{t>0} Q(-t) z^{-t}$$

задают рац. ф-ии, удовл.

$$R_+ + R_- \equiv 0.$$

(15) <u>Д-во</u> Для $Q \equiv 1$

$$R_+ = \sum_{t \geq 0} z^t = \frac{1}{1-z}$$

$$R_- = \sum_{t<0} z^t = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}. \quad \checkmark$$

Для $Q = t^k$ применим к обеим частям D^k, $D = z\frac{d}{dz}$.

Д-во 4 (ЭМ1). Имеем

$$\mathrm{Ehr}_{P^\circ}(z) := \sum_{t \geq 0} L_{P^\circ}(t) z^t \overset{\text{лемма}}{=} -\sum_{t \geq 0} L_{P^\circ}(-t) z^{-t}$$

$$\mathrm{Ehr}_P\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{t \geq 0} L_P(t) z^{-t} = -$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{P^\circ}(-t) = (-1)^d L_P(t)} \qquad \square$$

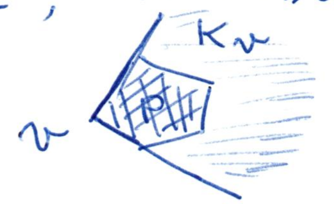
Лекция 3

Теорема Бриона

позволяет вычислить $\sigma_P(z)$ для вып. целоч. мн-ков P

Опр. касательный конус в вершине $v \in P$

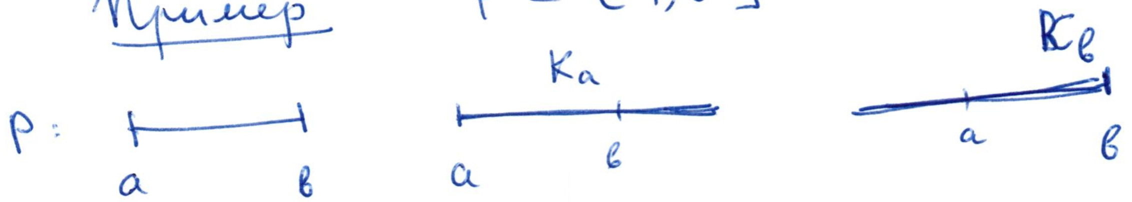
$$K_v := \{ v + \lambda(x - v) : x \in P,\ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$$



Th. (M. Brion, 1988)

$$\boxed{\sigma_P(z) = \sum_{v\text{ - верш. } P} \sigma_{K_v}(z)}$$ (как рац. ф-ия).

Пример $P = [a, b]$



$$\sigma_{K_a} = \sum_{m \geq a} z^m = z^a \frac{1}{1 - z}$$

$$\sigma_{K_b} = \sum_{m \leq b} z^m = z^b \left(1 + \frac{1}{z} + \dots\right) = z^b \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

$$= \frac{z^{b+1}}{z - 1}$$

$$\sigma_{[a,b]} = z^a + z^{a+1} + \dots + z^b = z^a \left(1 + z + \dots + z^{b-a}\right)$$

$$= z^a \frac{1 - z^{b-a+1}}{1 - z} = \frac{z^a - z^{b+1}}{1 - z} = \sigma_{K_a}(z) + \sigma_{K_b}(z) \quad \text{V.}$$

17

Ключевое "тождество"

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m \equiv 0}$$

(В Фурье анализе)

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx} = \delta(x)}$$

Решения задач и комментарии

1 Дуальность ЭМ

1) Для мн-ков на плоскости:

$$L_P(t) = At^2 + \frac{B}{2}t + 1$$

$$L_P(-t) = At^2 - \frac{B}{2}t + 1 = L_P(t) - Bt = L_{P^\circ}(t) \checkmark$$

2) Для куба $\square_d$

$$L_{\square_d}(t) = (t+1)^d, \quad L_{\square_d}(-t) = (-t+1)^d = (-1)^d (t-1)^d \checkmark$$

$$L_{\square_d^\circ}(t) = (t-1)^d = (-1)^d L_{\square_d}(-t).$$

3) Для пирамид P_d

$$L_{P_d}(t) = \sum_{k=1}^{t+1} k^{d-1} = S_{d-1}(t+2)$$

$$S_{d-1}(x) = \frac{1}{d}\left(B_d(x) - B_d\right)$$

$$L_{P_d^\circ}(t) = \sum_{k=1}^{t-2} k^{d-1} = S_{d-1}(t-1)$$

$$S_{d-1}(\overset{1-x}{\overset{\|}{-t+2}}) \overset{?}{=} (-1)^d S_{d-1}(\overset{x}{\overset{\|}{t-1}})$$

$$S_{d-1}(1-x) = (-1)^d S_{d-1}(x)$$

$$\boxed{B_d(1-x) = (-1)^d B_d(x)} \leftarrow$$

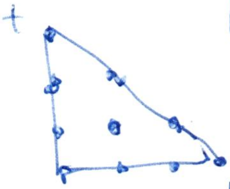
Дуальность ЭМ

$\Updownarrow$

Симметрия отн $x = \frac{1}{2}$

(18)

4) Для симплекса Δ_d



$$L_{\Delta_d}(t) = C^d_{d+t} = \frac{(t+d)(t+d-1)\dots(t+1)}{d!}$$

$$\cancel{L_{\Delta^\circ_d}(t) = C^d_{d+t-3} = \frac{(t+d-3)\dots(t-2)}{d!}}$$

$$L_{\Delta_d}(-t) = \frac{(d-t)(d-1-t)\dots(-t+1)}{d!}$$

$$= (-1)^d \frac{(t-d)(t-d+1)\dots(t-1)}{d!} = (-1)^d C^d_{t-1}$$

$$\cancel{C^d_{d+t-3} \overset{?}{\neq} C^d_{t-1}}$$

$$L_{\Delta^\circ_d}(t) = \#\{m \in \mathbb{Z}^d_{>0} : m_1 + \dots + m_d < t\}$$

$$= \#\{m \in \mathbb{Z}^{d+1}_{>0} : m_1 + \dots + m_{d+1} = t\}$$

$$\#\{m \in \mathbb{Z}^{d+1}_{\geq 0} : m_1 + \dots + m_{d+1} = t-d-1\}$$

$$= C^d_{t-1}$$

$$Ehr_{\Delta_d}(z) = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$$

$$Ehr_{\Delta^\circ_d}(t) = \sum_{t \geq 1} C^d_{t-1} z^t = \sum_{t \geq d+1} C^d_{t-1} z^t$$

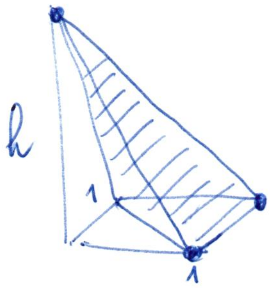
$t = d+1+k$

$$= z^{d+1} \sum_{k \geq 0} C^d_{d+k} z^k = \frac{z^{d+1}}{(1-z)^{d+1}} = (-1)^{d+1} Ehr_{\Delta_d}\left(\frac{1}{z}\right)$$

2 Вычисление $L_P(t)$, ~~...~~ $Ehr_P(z)$

1) $P = T_h$ — тетраэдр Рива

$$L_{T_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + At^2 + Bt + 1$$



$$\begin{cases} L_{T_h}(1) = 4 = \frac{h}{6} + A + B + 1 \\ L_{T_h}(-1) = (-1)^3 L_{T_h^\circ}(1) = 0 = -\frac{h}{6} + A - B + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 = 2A + 2 \qquad A = 1, \quad B = 2 - \frac{h}{6}$$

$$L_{T_h}(t) = \frac{h}{6}t^3 + t^2 + \left(2 - \frac{h}{6}\right)t + 1$$

Заметим, что $2 - \frac{h}{6} < 0$ при $h > 12$,

а коэфф. при t^2 $1 = \frac{1}{2}$"Vol" ∂T_h.

$$Ehr_{T_h}(t) = \sum_{t \geq 0} L_{T_h}(t) z^t = \frac{h}{6}\sum t^3 z^t + \sum t^2 z^t$$

$$+ \left(2 - \frac{h}{6}\right)\sum t z^t + \sum z^t = \frac{h}{6} D^3 \frac{1}{1-z} + D^2 \frac{1}{1-z}$$

$$+ \left(2 - \frac{h}{6}\right) D \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z} = \cancel{\frac{h}{6}}$$

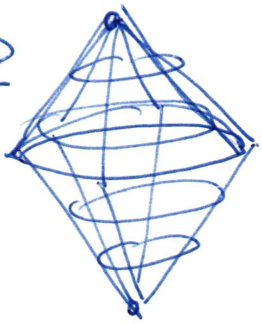
$$= \frac{h}{6}\frac{z^3 + 4z^2 + z}{(1-z)^4} + \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} + \left(2 - \frac{h}{6}\right)\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}$$

20

2) $P = \Diamond_d = \mathrm{conv}\{\pm e_i,\ i = 1, \dots, d\}$

кросс-политоп

$\Diamond_d$ — это бипирамида на $\Diamond_{d-1}$



P Q

<u>Лемма</u> Если P — бипирамида над Q, то

$$\mathrm{Ehr}_{P\,\cancel{\mathrm{BiPyr}\,Q}}(z) = \frac{1+z}{1-z}\mathrm{Ehr}_Q(z)$$

<u>Д-во</u>

$$L_P(t) = L_Q(t) + 2L_Q(t-1) + \dots + 2L_Q(1) + 2$$

$$\mathrm{Ehr}_P(z) = \sum_{t\geq 0} L_P(t) z^t = \sum_{t\geq 0}\left[\sum_{j=0}^{t-1} 2L_Q(j) + L_Q(t)\right] z^t$$

$t \geq 1 + j$

$$= \mathrm{Ehr}_Q(z) + 2\sum_{j=0}^{\infty} L_Q(j) \sum_{t=j+1}^{\infty} z^t = \mathrm{Ehr}_Q(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2z^{j+1} L_Q(j)}{1-z}$$

$$= \mathrm{Ehr}_Q(z) + \frac{2z}{1-z}\mathrm{Ehr}_Q(z) = \frac{1+z}{1-z}\mathrm{Ehr}_Q(z). \quad \square$$

След-но $$\mathrm{Ehr}_{\Diamond_d}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^d \mathrm{Ehr}_{\Diamond_0}(z) = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^d}$$

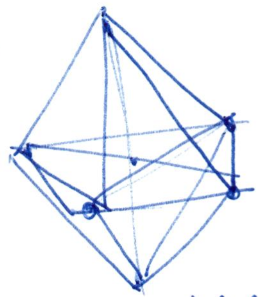
$$\Rightarrow \cancel{L_{\Diamond_d}(t)} = \left(\sum_{k=0}^{d} C_d^k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_{d+j}^d z^j\right)$$

$k + j = t$

$$= \sum_{t\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{d} C_d^k C_{t-k+d}^d\right)}_{= L_{\Diamond_d}(t)} z^t.$$

(21) Для $d = 3$ — (октаэдра)

P

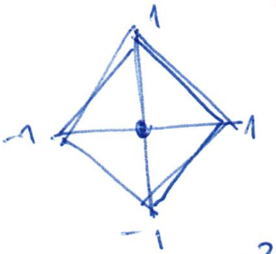


$$L_P(t) = \frac{4}{3}t^3 + At^2 + Bt + 1$$

$$L_P(1) = 7 = \frac{4}{3} + A + B + 1$$

$$L_P(-1) = -1 = +\frac{4}{3} - A + B - 1$$

$$\mathrm{Vol}\, P = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$



$$\begin{cases} A + B = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \\ -A + B = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 2 \\ B = \frac{8}{3} \end{matrix}$$

$$L_{\Diamond_2}(t) = 2t^2 + 2t + 1$$

$$L_{\Diamond_3}(t) = \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + \frac{8}{3}t + 1$$

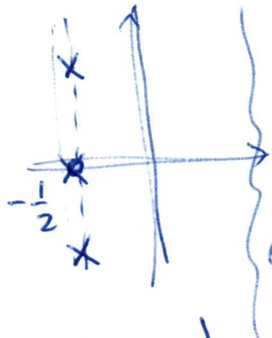
Общий факт: $\boxed{L_{\Diamond_d^\circ}(t) = L_{\Diamond_d}(t-1)}$

$$\Rightarrow L_{\Diamond_d^\circ}(-t) = L_{\Diamond_d}(-t-1) = (-1)^d L_{\Diamond_d}(t)$$

$$L_{\Diamond_3}(+t) = -L_{\Diamond_3}(-t-1) \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{L_{\Diamond_d}(t) = (-1)^d L_{\Diamond_d}(-t-1)}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + \frac{8}{3}t + 1 & t + \frac{1}{2} \\ -\ \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 & \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2 \\ \quad \frac{4}{3}t^2 + \frac{8}{3}t & \\ -\ \frac{4}{3}t^2 + \frac{2}{3}t & \end{array}$$



?

$$L_{\Diamond_3}(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2\right) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{4}{3}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

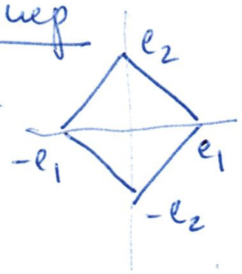
(22) **Обобщение – рефлексивные политопы**

Дуальность для вып. многогранников:

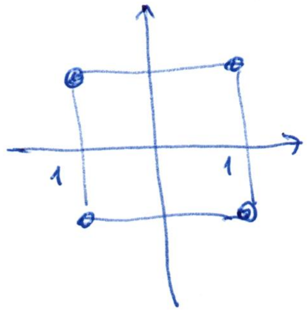
$P = \mathrm{conv}(v_1, \dots, v_m) \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in P$

$$P^* = \{x : (v_i, x) \le 1,\ i = 1, \dots, m\}$$

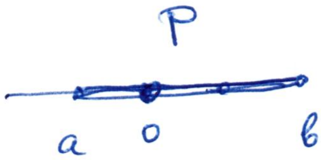
Пример

$P =$ 

P^*: $x_1 \le 1$, $-x_1 \le 1$, $x_2 \le 1$, $-x_2 \le 1$; $\quad -1 \le x_1 \le 1$, $-1 \le x_2 \le 1$



Опр. Целоч. P наз **рефлексивным**, если его дуальный P^* тоже целоч.

$d = 1$ 

рефл. $\Longleftrightarrow$ $a = -1$, $b = 1$

$P = \Diamond_d \qquad P^* = [-1, 1]^d$ куб.

Лемма Для рефлекс. P

2) $(t+1)P^\circ \cap \mathbb{Z}^d = tP \cap \mathbb{Z}^d$

1) 0 – единств. целая точка внутри P.

Обратно, если P удовл. 1), 2), то P – рефл.

Следствие Для рефлекс. P

$$\boxed{L_{P^\circ}(t) = L_P(t-1)}$$

23

Th. (Hibi) 1992 P рефлекс. $\Longleftrightarrow$

$$Ehr_P(z) = \frac{h_d z^d + \ldots + h_0}{(1-z)^{d+1}}$$

где $h_k = h_{d-k}$ для всех $0 \le k \le d/2$.

Пример ~~Крос~~ $P = \Diamond_d$, $Ehr_P(z) = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}}$

~~$P = [-1,1]$~~

Bey, Henk, Wills, 2006:

Если все корни $L_P(t)$ лежат на прямой $Re\, t = -\frac{1}{2}$, то P - рефлекс. объема $\le 2^d$

Обратное ~~вообще говоря~~ неверно в разм. $d \ge 4$.

Батырев, 1994: Для рефлекс. P соотв. торическое мн-ие X_P ~~Ф~~ явл. Фано, а его общая гиперповерхность - Калаби-Яо.

Рефлексивные ~~м~~ политопы классифицир. в разм. $d=2$ (16), $d=3$ (4319), ~~$d=4$~~ $d=4$ (473 800776) (по мод. $SL_d(\mathbb{Z})$)

В разм. ~~2~~ 2 и 3 все такие P удовл. "лок. RH", но в разм. 4 вычисления показывают, что из 1561 рефл. симплексов только 574 удовл. "лок. RH". Вопрос остался...