# Лекции на ЛШСМ (А. Толпыго)

Лекции получили общее название «Математические этюды», и были посвящены разным темам. Лектор сделал попытку (кажется, не вполне удачную) провести через них тему единства математики, показать на примерах, как задачи одного какого-то раздела науки «плавно переходят» в совершенно другие.

## *Тема 1. «Цзяньшицзы», среднее гармоническое и обмотки тора*

*На эту тему я, собственно говоря, написал статью, но я ее отдал в «Квант» и еще не потерял надежду, что они ее опубликуют. Поэтому посылать статью я не хочу, посылаю только тезисы.*

В игру «Выбирание камней» («Цзяньшицзы») китайцы играли со времен глубокой древности. Правила игры просты. Имеется две кучи камней. Играют двое, ходят по очереди. Игрок за один ход может либо взять любое количество камней из одной кучи (даже всю кучу), либо взять камни сразу из двух куч, но обязательно поровну. Выигрывает тот, кто берет последний камень.

Зададим обычный вопрос: как следует играть в подобной игре, и кто выигрывает?

Последовательное описание множества проигрышных позиций. Два доказательства. Одно из них использует понятие гармонического среднего. Краткое обсуждение этого понятия.

Рассмотрение множества проигрышных позиций естественным образом приводит к следующей задаче:

Всегда ли для данных чисел $a$, $b$ можно найти такие целые положительные $m$, $n$, что
**(*)** $[ma]=[nb]$

Если числа $a$, $b$ удовлетворяют некоторому равенству вида
**(**)** $k/a + l/b = 1$,
то это не так. Доказательство прямого утверждения несложно.

Однако верно и обратное:

**Теорема.** Пусть даны два положительных иррациональных числа $a$, $b$. Всегда равносильны два утверждения:

(а) для некоторых $k$, $l$ выполняется равенство **(**)**,

(б) ни для каких $m$, $n$ не выполняется равенство **(*)**.

Для доказательства нужно вначале рассмотреть задачу для произвольных вещественных $m$, $n$ (не обязательно целых). Очевидно, равенство (*) выполняется на цепочке прямоугольников в плоскости $(m, n)$, стороны прямоугольника равны $1/a$, $1/b$.

Требуется выяснить, лежит ли в этой цепи хоть одна целая точка.

Нетрудно «доказать», что целые точки, если их сдвигать на вектор $\{1/a, 1/b\}$, плотно заполняют всю плоскость. Однако поскольку это неверно, надо искать ошибку в доказательстве. Оказывается, что ошибка есть тогда и только тогда, когда выполняется (**). Попутно обсуждается вопрос о том, что такое обмотка тора, и смежные вопросы.

**Задачи по теме «Цзяньшицзы».**

1. Есть две кучи камней. Двое играющих по очереди берут камни из куч, выигрывает тот, кто берет последний камень. При этом:

(а) Разрешается брать либо любое число камней из одной кучи, либо из обеих, но поровну.

(б) То же самое, но разрешается также брать из одной кучи на 1 камень больше, чем из другой.

(в) То же самое, что в (б), но брать поровну не разрешается.

Для каждого из этих случаев найдите множество проигрышных позиций.

2. В игре (а):

- найдите выигрывающий ход в позиции (1789, 1492),
- докажите, что в любой позиции существует не более трех выигрывающих ходов,
- найдите какую-нибудь позицию, в которой имеется три выигрывающих хода.

3. Дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Чему равно среднее гармоническое его корней?

4. Дана трапеция. Проведем через точку пересечения ее диагоналей прямую параллельно основаниям. Пусть K, L - точки пересечения этой прямой с боковыми сторонами трапеции.

Докажите, что длина KL есть среднее гармоническое длин оснований.

5. Пусть даны какие-то числа r, s. Рассмотрим всевозможные точки ({nr}, {ns}), n = 1, 2, 3, 4…; все они лежат в единичном квадрате.

Докажите, что эти точки плотно заполняют весь квадрат в том и только в том случае, если данные числа r, s не удовлетворяют никакому равенству вида kr + ls = m, где k, l, m – натуральные.

## *Тема 2. Теория рядов; как ускорить сходимость ряда.*

Тезис 1: никакой суммы ряд не имеет и иметь не может, т.к. нельзя сложить бесконечное число членов. Зато можно дать определение: суммой ряда называется то-то и то-то. Поскольку это определение, а не утверждение, его можно дать как угодно. («Преимущества воровства перед честным трудом»). Но за все надо платить: это означает, что «сумма ряда» может и не удовлетворять самым очевидным, казалось бы, свойствам.

Определение суммы ряда (стандартное).

Пункт 2: ряд примеров, где сумму ряда можно найти в конечном виде.

Тезис 3: я опять вас неверно сориентировал. Я намеренно создал у вас ошибочное представление, что часто можно найти сумму ряда в конечном виде. На самом деле это редкий и крайне нетипичный случай. Общее же правило состоит в том, что ряд надо просто «суммировать до посинения».

Тезис 4: Но поскольку «суммировать до посинения» трудно и скучно, крайне важно (и, в определенном смысле, важнее всего) научиться ускорять сходимость ряда, чтобы можно было обойтись 10-ю, а не миллионом членов.

Далее рассматривается ряд примеров: как это можно сделать.

А. Допустим, что члены ряда задаются некой формулой вида $a_n = f(n)$. Тогда можно взять несколько членов ряда, а его «хвост» оценить, как интеграл:

$S \approx a_1 + a_2 + ... + a_n + \int_n^\infty f(x)dx$, причем часто этот интеграл удается взять. Более точная формула получится, если в качестве нижнего предела брать не n, а n+1/2. Тем не менее иногда выгоднее все-таки взять нижним пределом n – если эту формулу удается итерировать. На эту тему см. задачи 7, 8.

Б. Другие приемы: число π можно вычислять как арктангенс: $\pi/4 = arctg1$. Но сама по себе эта формула непрактична, т.к. ряд сходится медленно – однако см. задачу 5.

*Дополнения: то, что я планировал (надеялся) рассказать, да не успел.*

О числе π.

Чем, собственно говоря, примечательно это число? И вообще, что такое π?

Сказать, что это 3,14 ? – Это, разумеется, неверный ответ. Потому что если бы так – то почему бы не 4,13 ? Чем число 3,14 лучше?

Тогда сказать, что это отношение длины окружности к диаметру? Ну, ладно, допустим… Но почему так уж важно знать это отношение?

Ну, уточним: это отношение длины окружности к диаметру, **которое одно и то же для любой окружности**.

(Мне когда-то рассказывала учительница математики, что однажды она, пытаясь эту мысль внушить школьникам, и терпя неудачу – с отчаяния пообещала пятерку в четверти и в году тому, кто принесет ей окружность, для которой l/d=5.

«И что тут началось! – рассказывала она. – Школьники меряли тазы, днища чайников; родители приходили в школу и просили ее «ну, подскажите, какую именно окружность надо брать»; а директор возмущался: «что же вы, Элеонора Владимировна, будете делать, когда такую окружность принесут?» - и аргумент, что я ничем не рисковала, не помогал…»)

Но ведь можно, аналогичным образом, посчитать отношение длины эллипса к его большой оси. Оно тоже будет одинаковым для всех эллипсов, у которых данное соотношение осей; например, если оно равно 2, то получится – я посчитал – приблизительно 2,422. Может быть, это число тоже важно?

Нет.

Дело, разумеется, в том, что π возникает еще и в других задачах. Прежде всего, оно позволяет вычислить не только длину окружности, но также площадь круга, поверхность сферы и так далее. Но и это не главное! Оно же встречается во множестве других задач. Об одной я упоминал – это вычисление суммы обратных квадратов; для числа π можно дать и такое определение:

«Просуммируем все обратные квадраты от 1 до бесконечности, и умножим эту сумму на 6. Число π есть корень квадратный из того, что получилось».

А вот еще две задачи.

А. Допустим, мы хотим решить дифференциальное уравнение y’’ + y = 0 с начальными данными y(0) = 0, y’(o) = 1.

Тем, кто плохо знаком с дифференциальным исчислением, не надо пугаться: все достаточно просто. Можно считать, что игрек – это пройденный путь (в начальный момент он, что довольно естественно, равен нулю), y’ – это производная пути, то есть его изменение за единицу времени, то есть скорость; y’’ – изменение скорости, т.е. ускорение.

Итак, согласно условию, вначале пройденный путь равен 0, а скорость – единице.

Соответственно, пройденный путь будет изображаться прямой. (Рис.) Путь пропорционален расстоянию.

Да, но так оно бы было, если бы скорость была постоянной. Но вначале она, действительно, постоянна, т.к. из уравнения видно, что ускорение равно 0.

Но когда путь станет положительным, ускорение, согласно условию, будет отрицательным, т.е. скорость будет убывать… В какой-то момент она, как легко сообразить, станет сначала равной 0, а потом отрицательной, т.е. мы поедем в обратную сторону. (Простая и наглядная модель: игрушечный грузовик разогнали до скорости 1, и он должен подниматься в гору; он будет подниматься, но при этом он сначала затормозит, а потом поедет обратно, причем, если пренебречь трением – на каждом участке ровно с той же скоростью, с какой поднимался).

Итак, функция вначале возрастает, в какой-то момент достигнет максимума, потом начнет убывать, и нетрудно сообразить, что еще через некоторое время она станет равной нулю, меньше нуля: график пересечет ось иксов.

**А в какой момент??**

Вот тут-то необходимо включить более высокую математику. Вплоть до этого момента всё можно себе представить «на пальцах», но найти первый ноль нашей функции «на пальцах» нельзя. Надо решить дифференциальное уравнение, и тогда оказывается, что функция пересекает ось иксов как раз в точке $\pi$. И здесь оно!!

Б. В качестве еще одного примера я хочу разобрать задачу о формуле Стирлинга.

Допустим, мы бросаем монету 1000 раз. Сколько выпадет орлов? – Примерно половина, т.е. около 500. А вот что значит «около»?

Поставим вопрос немного иначе: какова вероятность того, что выпадет ровно 500 орлов?

Понятно, что она больше 0,001. С другой стороны, она, наверно, не очень велика.

Первое – потому, что она во всяком случае больше других вероятностей, да к тому же большая часть вероятностей близка к нулю. Второе – потому что вероятность получить 500 мало отличается от вероятности получить 501, 499 и т.п. По-видимому, она не больше 1/10; наверное, меньше.

Так сколько же?

Методами комбинаторики нетрудно найти формулу: $p = \frac{C_{1000}^{500}}{2^{1000}} = \frac{1000!}{2^{1000} \cdot (500!)^2}$. Это формула точная, но от нее вроде бы мало проку: в числителе и знаменателе стоят колоссальные числа, и как их сравнить – непонятно. (Если вы полагаете, что за вас сосчитает калькулятор – возьмите не тысячу, а миллиард).

Чтобы их сравнить, нужно уметь оценить факториал. А это можно сделать следующим приемом.

Рассмотрим интеграл от ln x. С одной стороны, его можно точно вычислить методами интегрального исчисления; ответ равен lnn-n+1. С другой, его можно приближенно сосчитать как сумму ln1+ln2+…+lnn. (Лучше взять (ln1)/2+ln2+…+(lnn)/2 ).

Сравнивая, мы получаем, что ln(n!)≈nlnn-n+(lnn)/2+1, или $n! \approx (\frac{n}{e})^n \cdot e\sqrt{n}$.

Положим, мы считали не очень точно. И на самом деле в последнем множителе должно стоять не *e*, а немножко меньше: $\sqrt{2\pi} = 2{,}50...$. Разница невелика, поскольку e=2,718...

(Если взять n=4, то факториал равен 24, а по формуле Стирлинга получается приблизительно 23,44).

Упражнение: докажите, что мы не случайно, а закономерно получили формулу *С ИЗБЫТКОМ*.

Остается подставить то, что получилось, в формулу для вероятности. И мы видим, что почти все гигантские числа сокращаются, и остается $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ . Конкретно, для n=500 выходит, что вероятность получить ровно 500 успехов приблизительно равна 1/40.

Теперь – о философском смысле всего сказанного.

Суть дела в том, что если вы вводите какое-то число, или какое-то определение, или новую теорию – это будет очень ценно, если это число или определение можно встретить сразу в различных ситуациях. И это малоинтересно, если с его помощью решается только одна задача (ну, разве что задача очень важная).

Примеры из другой науки: из экономики.

А. Что такое «**прибавочная стоимость**»? Маркс ввел такое понятие. Но насколько оно плодотворно? Опять-таки:

- если можно определить «прибавочную стоимость» разными способами, причем все способы дают одно и то же (ну, пусть приблизительно одно и то же) число – это вещь очень ценная,

- если же «прибавочная стоимость» есть просто разность между издержками и доходом от продажи, а других определений нет – это чисто пропагандистское понятие.

Что из двух верно – это уж надо разбираться по существу, здесь это неуместно. Посмотрим другой пример:

Б. **Индекс инфляции**. Что это такое?

Экономисты вам расскажут, как именно вычисляется этот индекс. Но они, скорее всего, не скажут вам самого главного: получается ли всегда одно и то же, или же есть много разных индексов.

На самом деле речь идет о следующем. Имеется многомерное пространство, точка в котором – набор цен на все имеющиеся в данной стране товары, а ее координаты, соответственно – это цена на свинину, цена на баранину, цена на яйца и так далее – количество координат, как видите, устрашающее.

Проходит год, и все эти цены немного меняются – как правило, в сторону увеличения. Но цена на яйца выросла на 20%, цена на гречку – только на 5%, а цена на свинину вообще снизилась на 4%. Какова же инфляция?

Экономисты хотят привести все эти цифры к ОДНОЙ. Как это сделать? Они пользуются самым примитивным приемом: проектируют этот многомерный вектор на некую прямую.

Для примера: допустим, что как-то уже вычислен индекс инфляции для разных групп товаров по отдельности. Тогда экономисты полагают, что «истинный» индекс инфляции есть их сумма с такими коэффициентами: индекс инфляции по продовольствию – с коэффициентом 0,5; индекс по одежде и подобным товарам – с коэффициентом 0,3; по всем прочим – с коэффициентом 0,2.

Задача. На какую прямую при этом проектируется вектор (i-prod, i-odej, i-prochee) ?

Но правильно ли выбрана эта прямая? (На самом деле есть и другие индексы инфляции, например, индекс цен производителей; там проекция делается на другую прямую).

Задача. Исходя из выше сказанного, разберитесь: можно ли определить индекс инфляции за 3 года, зная этот индекс за каждый год в отдельности? Если нет, то почему его все-таки вычисляют, и получают не абсурдные выводы?

**Задачи по теме «Ряды».**

1. Найти сумму ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}$

2. Найти сумму ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)(m+2)...(m+k)}$, k задано.

3. Найти сумму ряда $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-2}{k!}$.

4. Подобрать число $\boldsymbol{x}$ такое, чтобы ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-x}{k!}$ можно было просуммировать в конечном виде, а суммой было бы рациональное число.

5. Докажите, что $4arctg\,{}^1\!/_5 - arctg1/239 = arctg1$.

6. Ускорить сходимость ряда из обратных пятых степеней с помощью «интегрального хвоста».

7. Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot C_{2n}^n}$.

8. Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\cdot C_{2n}^n}$.

## *Тема 3. Неевклидова геометрия*

Представим себе, что мы общаемся с существами из иной вселенной. Нет, не с другой планеты, а именно из другой вселенной, где нет пространства в нашем понимании, и вообще, всё не как у нас. Впрочем, мы все-таки дадим себе поблажку. И скажем, что хотя эти наши собеседники не имеют ни зрения, ни осязания (у них какие-то другие органы чувств), но математику они знают. И что такое числовая прямая – знают.

И вот мы хотим объяснить им, что такое классическая евклидова геометрия. Как нам быть?

Очевидно, проще всего построить модель евклидовой геометрии. И как это сделать – придумал еще Декарт.

Первое: надо сказать, что в геометрии есть два основных объекта: *(1) точки* и *(2) прямые*. По определению точка – это пара чисел, а прямая – линейное уравнение; и точка лежит на прямой, если ее координаты удовлетворяют этом уравнению.

Что нам еще нужно? Очевидно, *(3) расстояние*. С ним тоже нет никаких трудностей: по формуле Пифагора, квадрат расстояния равен сумме квадратов разностей координат.

Достаточно ли этого?

Ответ вот какой. Формально – да, этого достаточно, из этого уже всё остальное можно вывести. (Например, углы в треугольнике можно сосчитать по формуле косинусов; окружность – множество точек на данном расстоянии от данной точки, и т.д.). Но на самом деле – что еще нужно?

Во-первых, нужно дать определение равных (конгруэнтных) фигур. Можно, конечно, сказать, что требуется взаимно однозначное соответствие между точками этих фигур, причем если А→а, В→в, то расстояние между А и В равно расстоянию между а и в. Формально это вроде бы удовлетворительно, но во-первых, долго и трудно проверять, а во-вторых, из такого определения непонятно, есть ли такие фигуры вообще, и много ли их (а суть геометрии как раз в том, что их МНОГО!!)

Поэтому намного лучше исходить из *(4) понятия движения*. Мы находим те отображения плоскости на себя, которые сохраняют расстояние. Очевидно, это:

- во-первых, параллельные сдвиги (причем достаточно рассматривать два типа сдвигов: вдоль оси абсцисс и вдоль оси ординат),

- во-вторых, поворот на произвольный угол φ (пишем формулы поворота; отметим, что достаточно брать повороты вокруг начала координат),

- в-третьих, отражения. Опять-таки, достаточно ОДНОГО отражения: $(x, y) \to (y,x)$.

То, что сдвиги и данное отражение сохраняют расстояния между точками – очевидно. То, что это верно для поворота – не очевидно, но доказывается без особых трудностей.

Теперь мы ОБЪЯВЛЯЕМ, что две фигуры равны, если их можно перевести одну в другую одним из этих преобразований, или их композицией.

Всё? Нет. Есть еще один очень важный момент: прямая есть кратчайший путь между точками, это основа всей геометрии.

Пока что мы не можем этого даже сформулировать, поскольку не знаем, что такое длина пути.

Соответственно, мы вводим *(5) элемент длины пути* $ds^2 = dx^2 + dy^2$, определяем длину произвольного пути как предел суммы, и *(6) доказываем, что прямая – кратчайшая*. Самое простое доказательство следующее. Пусть даны две точки, отрезок между ними и произвольный путь. Повернем так, чтобы отрезок стал параллелен оси. Теперь ясно, что при разбиении на малые отрезочки каждый наклонный отрезочек длиннее, чем соответствующий ему вертикальный. (Этот прием следует запомнить, ибо он будет в дальнейшем использован, чтобы доказать тот же факт в неевклидовой геометрии).

Резюмирую. Чтобы построить геометрию, нужно:

(1, 2) определить, что такое точки и прямые (впрочем, со вторым, может быть, лучше подождать),

(3) задать формулу расстояния (опять-таки и с этим в каком-то смысле лучше не торопиться),

(4) найти достаточно много движений,

(5) написать формулу ЭЛЕМЕНТА длины и

(6) доказать, что прямая – кратчайший путь.

Если всю эту программу можно выполнить, мы вправе говорить, что построили геометрию. Подчеркну: ключевой момент – то, что существует достаточно много равных фигур, или, как говорят, группа движений достаточно велика. Если этого нет, у нас нет настоящей геометрии: так например, с точки зрения теории поверхностей, эллипсоид почти что ничем не хуже сферы, однако сферическую геометрию строить можно, а «геометрия эллипсоида» смысла не имеет. Нет или почти нет движений.

Теперь мы можем взяться за построение геометрии Лобачевского.

Для начала мы возьмем самую обыкновенную, евклидову плоскость. Это создаст нам некоторые трудности понимания: надо следить, где мы будем говорить об евклидовых свойствах, а где – о неевклидовых. Для удобства будем в первом случае говорить и писать о е-объектах (е-прямых, е-расстоянии и т.п.), во втором – о л-объектах.

Итак, по определению:

*Точками плоскости Лобачевского* (л-точками) являются все точки верхней полуплоскости, то есть е-точки (x, y), у которых $y > 0$.

Сразу дадим дополнительное определение: *ось абсцисс (y=0) называется АБСОЛЮТОМ плоскости Лобачевского (ПЛ)*. Это, так сказать, бесконечно удаленные точки ПЛ.

*Л-прямыми*, по определению, являются полуокружности и полупрямые, е-ортогональные абсолюту.

*Расстояние*. Написать формулу для расстояния между произвольными двумя точками, конечно, можно, но она достаточно громоздка. Поэтому мы пойдем иным (кстати, более правильным) путем, и введем не расстояние, а *элемент расстояния*. Положим $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

То есть элемент длины тем больше, чем ближе точки лежат к абсолюту. Отсюда, между прочим, видно, что абсолют недостижим. В самом деле, допустим, что мы хотим из какой-то точки выйти на абсолют. Но для этого (как нас учат Ахиллес и черепаха) надо сначала пройти половину пути, потом четверть, одну восьмую и так далее. Между тем все эти отрезки одинаковой длины. Так что, если с Ахиллесом и черепахой это просто софизм, то тут всё по-честному: не дойдете.

Теперь выясним, какие *движения* имеет наша л-плоскость.

Достаточно очевидно, что это, во-первых, сдвиги вдоль оси абсцисс: при них $y$ не меняется, так что здесь, по сути, нет никакой разницы с евклидовой геометрией.

Сдвиги вдоль оси ординат, очевидно, не годятся. Зато есть е-гомотетия: растяжение с центром где-нибудь на абсолюте.

Впрочем, достаточно взять ОДНО семейство растяжений: $(x, y) \to (ax, ay)$, $a>0$. Любое другое можно получить композицией этого растяжения (при подходящем $a$) и сдвига. Ясно, что при этом евклидов элемент длины увеличивается в $a$ раз, ордината – тоже в $a$ раз, так что дробь не меняется.

Этими двумя типами движений мы можем, например, перевести любую л-точку в любую.

Но для геометрии этого мало; нужно еще иметь повороты вокруг данного центра или что-то вроде этого. Как быть?

Оказывается, есть еще одно движение (и этого уже хватает на все случаи жизни). Это <u>инверсия</u>. (Она сохраняет углы, а также л-расстояние между точками).

Теперь нужно *доказать, что л-прямая есть кратчайший л-путь между двумя точками*. Это доказывается точно так же, как я показывал в евклидовом случае: делаем такое движение плоскости, чтобы л-прямая стала е-полупрямой (все прямые равноправны, так что такое движение существует, и все расстояния и длины кривых при этом не меняются), а дальше очевидно.

Таким образом, наша «обязательная программа» выполнена. К этому мы добавим, что:

Если считать, что наша исходная е-плоскость – это плоскость комплексных чисел, то движения можно записать, как дробно-линейные функции. При этом коэффициенты – вещественные.

В заключение был разобран вопрос о том, что такое л-окружность. Оказывается, это е-окружность, правда, со смещенным центром.

Для доказательства нужно сделать дробно-линейное преобразование, переводящее полуплоскость в круг. Конкретно подходит преобразование $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

Движениями круга будут, очевидно, также дробно-линейные преобразования (но другие!), и в частности – поворот круга. Отсюда следует, что все точки окружности $|z|=r$ равно отстоят от центра круга. Дальнейшее просто.

*Дополнения: то, что я планировал рассказать, да не успел.*

(а) Классификация линий.

На евклидовой плоскости имеется два наиболее характерных вида линий: прямая и окружность.

На плоскости Лобачевского их больше. В самом деле, мы положили по определению, что прямая – это е-окружность (часть окружности), перпендикулярная абсолюту. Выше было сказано, что е-окружность, целиком лежащая в л-плоскости – это л-окружность.

Но ведь бывают еще два типа е-окружностей: те, которые касаются абсолюта, и те, которые пересекают абсолют, но не под прямым углом.

Первый тип называется орициклом; это предельное положение окружности, когда ее центр уходит на бесконечность.

Второй тип – эквидистанта; это линия, все точки которой равноудалены от некоторой данной прямой. (Конкретно нужно взять ту прямую, которая проходит через те же 2 точки абсолюта, что и наша эквидистанта).

Замечу, что в евклидовом случае и орицикл, и эквидистанта – это просто-напросто прямая.

(б) Классификация движений.

Как уже сказано, движение можно записать, как дробно-линейную функцию с вещественными коэффициентами.

Для классификации удобно посмотреть, какие неподвижные точки имеет данное движение, а главное – сколько их.

Неподвижные точки движения – это решения уравнения f(z) = z. Это квадратное уравнение, и возможны три случая (только три!): D > 0, D =0 и D < 0.

- Как ни странно, третий случай – самый простой и удобный. Имеется два корня, один посторонний. Т.е. на плоскости есть ровно одна неподвижная точка. Отсюда следует, что наше движение есть вращение вокруг этой точки (расстояния сохраняются!)

То есть тут полная аналогия с евклидовым случаем.

- Если D > 0, то есть два корня, и оба лежат на абсолюте; на плоскости Лобачевского нет ни одной неподвижной точки. То есть это что-то вроде параллельного сдвига. Так оно и есть; но какого?

Раз сохраняются две бесконечно удаленные точки, то сохраняется прямая с этими концами. Но только она одна!

Более простой вариант: пусть одна из этих точек есть бесконечность. Сохраняется вертикальная прямая, она движется по себе: движение $z \to az$, $a>0$.

Другие прямые не сохраняются (разъезжаются). Но зато сохраняются эквидистанты. (Так называемое вращение вокруг идеального центра).

- Наконец, если D=0, то сохраняется одна точка на абсолюте. Самый удобный пример - $z \to z+b$. Имеется двойная неподвижная точка бесконечность. При этом не сохраняется ни одна прямая, но зато сохраняются орициклы. (Вращение вокруг бесконечно удаленного центра).

(в) Кое-что о дефекте многоугольника. Основной тезис: при объединении двух фигур площади, очевидно, складываются. Но складываются также и дефекты! Отсюда следует (гм! – это, конечно, надо еще доказать…), что дефект пропорционален площади. Для модели, которая была рассказана, коэффициент пропорциональности равен 1.

(г) Длина окружности на плоскости Лобачевского значительно больше, чем на евклидовой плоскости, и выражается через *гиперболические функции*. Я дам несколько нестандартное определение этих функций – зато из него будет понятно, при чем тут гипербола.

Итак, нарисуем гиперболу $x^2 - y^2 = 1$. Для произвольной ее точки мы примем, что координаты этой точки (x, y) есть соответственно гиперболический косинус и гиперболический синус… только вот – какого аргумента?

Угла?

Нет, брать за аргумент угол нехорошо. Давайте обратимся к обычным синусу и косинусу, т.е. обычной окружности, и заметим, что аргументом можно считать не только угол, но также и площадь, точнее, удвоенную площадь.

Если $S = \alpha/2$, то $x = \cos 2S, y = \sin 2S$.

Вот это определение и нужно перенести на гиперболу: точно так же, если $S = \alpha/2$, то $x = ch2S, y = sh2S$.

**Задача.** Найдите более удобную формулу для гиперболических синуса и косинуса.

Формула довольно простая. Но чтобы ее вывести, надо все-таки владеть интегральным исчислением: не просто знать, что такое интеграл, а немножко уметь его вычислять.

**Задачи по неевклидовой геометрии.**

1. Докажите, что через две точки можно провести прямую, и притом только одну.

2. Докажите, что к любым двум расходящимся прямым можно провести общий перпендикуляр, и притом ровно один.

3. *Утверждение.* Дан угол и точка внутри него. Тогда через эту точку можно провести прямую, пересекающую обе стороны данного угла.

Верно ли оно?

4. Плоскость разбита на правильные 7-угольники, в каждой вершине сходятся 7 семиугольников. Чему равна площадь одного 7-угольника?

5. Докажите, что сумма углов любого треугольника меньше 2π.

6. Выведите формулы: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.