Простые особые точки и соответствие Маккея

Евгений Шиндер, Константин Шрамов

Содержание

1 Введение

1.1 О чём эти лекции

Пусть задана конечная подгруппа $G \subset SL_2(\mathbb{C})$. Тогда естественно рассмотреть фактор $\mathbb{C}^2$ по её действию; такой фактор $X = \mathbb{C}^2/G$ будет комплексно-двумерен, но не будет многообразием: начало координат будет особой точкой. К этой особой точке можно применить стандартную процедуру разрешения особенностей и получить неособое многообразие Y и регулярное отображение $Y \to X$.

Простейший пример получается при $G = \mathbb{Z}/2$, которая действует на $\mathbb{C}^2$ по формуле $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. При этом факторпространство $X = \mathbb{C}^2/G$ оказывается квадратичным конусом $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ в $\mathbb{C}^3$ (так называемая невырожденная особая точка или особенность типа A_1), а разрешение особенности $Y \to X$ раздувает вершину этого конуса, вклеивая вместо неё одну рациональную кривую.

Когда разрешение особенностей требует несколько шагов, вклеиваемые кривые могут пересекаться, задавая граф (в простейшем случае выше это одноточечный граф A_1). С другой стороны, по представлениям группы G можно построить *граф Маккея*. Соответствие Маккея состоит в изоморфизме этих двух графов.

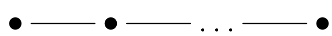
В данных лекциях изложение отчасти следует замечательной книге Долгачёва [D].

1.2 ADE классификация

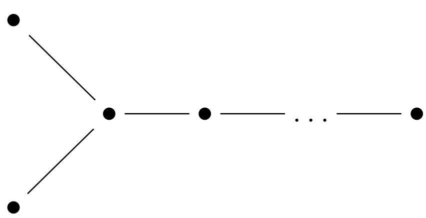
В алгебре, геометрии и теории представлений очень часто классификация каких-то объектов с точностью до изоморфизма даёт несколько бесконечных серий и несколько исключительных объектов. Обычно такая классификация оказывается связанной с диаграммами Дынкина.

ADE диаграммы Дынкина это следующие диаграммы[1]:

A_n (число вершин $n \geq 1$)

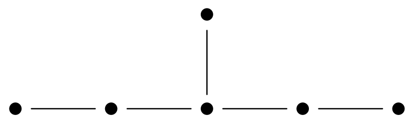


D_n (число вершин $n \geq 4$)

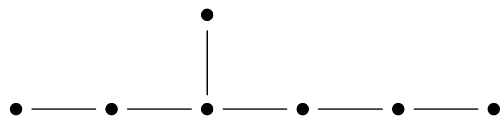


[1]В теории алгебр Ли появляются также диаграммы B_n, C_n, G_2, F_4 с множественными рёбрами. Таких диаграмм у нас не будет.

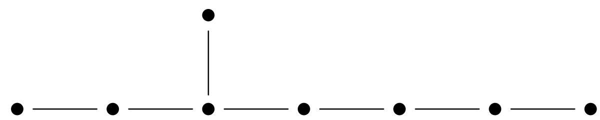
E_6



E_7



E_8



Диаграммы E_6, E_7, E_8 называются исключительными.

К этим диаграммам следует относиться творчески. Например, несмотря на то что D_n определены при $n \geq 4$ часто удобно рассматривать также D_3 и D_2. При этом $D_3 = A_3$, а D_2 состоит из двух несвязных вершин, то есть $D_2 = 2A_1$. Кроме того, иногда удобно считать, что $E_5 = D_5$. Наконец, A_0 имеет смысл пустой диаграммы!

Старейшая ADE классификация это описание Платоном правильных многогранников. С современной точки зрения правильные многогранники классифицируются их группами симметрий. При этой классификации тетраэдр это E_6, октаэдр и куб это E_7, а икосаэдр и додэкаэдр это E_8 (см. формулировку Теоремы 2.1 и Упражнение 2.2).

При построении соответствия Маккея мы сперва покажем, что конечные подгруппы $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ классифицируются диаграммами Дынкина ADE. Потом мы опишем геометрию фактор пространств $\mathbb{C}^2/G$ – это особые алгебраические поверхности. Наконец мы покажем как разрешать особенности поверхностей с ADE особенностями и увидим, что граф исключительных кривых разрешения это соответствующая диаграмма Дынкина.

Заметим, что при таком доказательстве не видно концептуальной связи между классифицируемыми объектами: представлениями групп G и разрешением особенности $\mathbb{C}^2/G$. Вообще говоря, в чём заключается концептуальная связь между различными ADE-классификациями это вопрос, заданный В.И. Арнольдом. Для соответствия Маккея концептуальное доказательство существует, но требует перехода к категориям пучков на $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^2/G$ и на разрешении особенностей, и их производным категориям.

2 Конечные подгруппы $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ и их графы Маккея

2.1 Классификация конечных подгрупп в $PSL_2(\mathbb{C})$ и в $SL_2(\mathbb{C})$

Напомним, что $SL_2(\mathbb{C})$ это группа обратимых 2×2 матриц с определителем единица, а $PSL_2(\mathbb{C})$ это её факторгруппа по центру ± 1.

Нас интересуют конечные подгруппы в этих группах с точносью до сопряжённости, то есть с точностью до замены координат в $\mathbb{C}^2$.

Теорема 2.1. *С точностью до сопряжённости конечные подгруппы $G \subset PSL_2(\mathbb{C})$ это*

(a) *Циклическая группа $\mathbb{Z}/n$, порождённая* $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$

(b) *Группа диэдра D_{2n} порядка $2n$ порождённая* $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) *Группа тетраэдра $T_{12} = A_4$ порядка* 12

(d) *Группа октаэдра $O_{24} = S_4$ порядка* 24

(e) *Группа икосаэдра $I_{60} = A_5$ порядка* 60

Доказательство. Напомним, что группа $PSL_2(\mathbb{C})$ действует преобразованиями Мёбиуса на сфере Римана

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

На сфере Римнана есть координата z которая может обращаться в бесконечность; действие матрицами из $PSL_2(\mathbb{C})$ задано как

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Заметим что в этой формуле подразумевается, что $z = -d/c$ переходит в бесконечность, а бесконечность переходит a/c (предел при $z \to \infty$).

Заметим что действие $PSL_2(\mathbb{C})$ определено корректно, поскольку умножение матрицы на скаляр не меняет действия.

Главный шаг в доказательстве теоремы - вывод формулы связывающей порядки стабилизаторов точек и порядок группы. Этот шаг очень напоминает доказательство Леммы Бёрнсайда о действиях конечной группы на конечном множестве (число орбит равно среднему числу неподвижных точек элементов группы). Разница лишь в том что у нас множество на котором действует группа - бесконечно.

Рассмотрим следующее конечное множество:

$$S = \{(x \in \mathbb{P}^1, g \in G) : g(x) = x, g \neq e\}$$

и подсчитаем количество элементов в S двумя способами. Пусть $n = |G|$. С одной стороны, неподвижные точки элемента $g \in G$ это в точности направления его собственных векторов. Любой нетривиальный элемент g имеет конечный порядок, и значит диагонализуем, то есть имеет два различных собственных вектора. Поэтому

$$|S| = 2(n-1).$$

С другой стороны, пусть $O_1, \ldots, O_k$ - это исключительные орбиты, то есть орбиты длины меньшей n, а e_i - порядок стабилизатора любой точки $x \in O_i$ (стабилизаторы точек в одной орбите сопряжены, а значит, имеют один и тот же порядок $e_i = \frac{n}{|O_i|} \geq 2$).

Считаем:

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in O_i} (e_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} |O_i|(e_i - 1) = nk - \sum_{i=1}^{k} |O_i|.$$

Сравнивая два выражения для $|S|$ и деля на n получаем

$$2 - \frac{2}{n} = k - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{e_i}$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{e_i} = k - 2 + \frac{2}{n}.$$

Поскольку левая часть положительна и не превосходит $k/2$, то легко видеть, что k (количество исключительных орбит) может быть равно только 2 или 3.

Легко видеть, что если $k = 2$, то $e_1 = e_2 = n$, то есть группа из n элементов неподвижно действует на двух точках $P, Q \in \mathbb{P}^1$, а в остальном действует свободно. Применяя автоморфизм $\mathbb{P}^1$ можно считать, что $P = 0, Q = \infty$. Элементы из $PSL_2(\mathbb{C})$ которые фиксируют эти две точки это преобразования $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}^*$, то есть имеем $G \subset \mathbb{C}^*$, и значит $G = \mathbb{Z}/n$ циклическая группа порядка n состоящая из корней n-ой степени из единицы.

Пусть теперь $k = 3$. Наше уравнение имеет вид

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

Будем считать, что $e_1 \leq e_2 \leq e_3$. Заметим, что $e_1 = 2$, иначе $e_1, e_2, e_3 \geq 3$, что ведёт к противоречию. Предположим, что $e_2 = 2$. В таком случае получаем

$$(e_1, e_2, e_3, n) = (2, 2, l, 2l).$$

Покажем, что G будет группой диэдра D_{2l}. Пусть $0, \infty$ - исключительная орбита у которой стабилизаторы имеют порядок l. Рассмотрим какой-то элемент $g \in G$, который не сохраняет 0. Поскольку орбита 0 состоит из двух точек имеем $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$. Это значит, что $g(z) = \frac{a}{z}$, и после замены координаты можно считать, что $a = 1$. С другой стороны, стабилизатор H точки 0 имеет индекс 2 в G, то H будет нормальной подгруппой. Значит H фиксирует 0 и ∞, а значит будет состоять из корней из единицы степени n, и получаем, что G это группа диэдра.

Легко видеть, что оставшиеся случаи это

$$(e_1, e_2, e_3, n) = (2, 3, 3, 12), (2, 3, 4, 24), (2, 3, 5, 60).$$

Описание соответствующих групп см. в [D, 1.1]. □

Упражнение 2.2. *Найти тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр и додэкаэдр в доказательстве теоремы о конечных подгруппах в $PSL_2(\mathbb{C})$. Проанализировать группы вращений тетраэдра, октаэдра (или куба), икосаэдра (или додэкаэдра) и попытаться показать что это A_4, S_4, A_5 соответственно. Ответить на вопрос, что же такое диэдр (у которого группа вращений D_{2n})?*

Теорема 2.3. *С точностью до сопряжённости конечные подгруппы $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ это*

(a) Циклическая группа $\mathbb{Z}/n$:

$$\mathbb{Z}/n = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

(b) Бинарная группа диэдра BD_{4n} порядка $4n$:

$$BD_{4n} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{2n} & 0 \\ 0 & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(c) Группа тетраэдра BT_{24} порядка 24:

$$BT_{24} = \left\langle BD_8, \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) Группа октаэдра BO_{48} порядка 48:

$$BO_{48} = \left\langle BD_{16}, \frac{1}{1-i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

(e) Группа икосаэдра BI_{120} порядка 120*:*

$$BI_{120} = \left\langle BD_{20}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5 - \zeta_5^4 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^2 - \zeta_5^3 & -\zeta_5 + \zeta_5^4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Доказательство. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм

$$\pi : SL_2(\mathbb{C}) \to PSL_2(\mathbb{C})$$

Если G конечная подгруппа $SL_2(\mathbb{C})$, то её образ $\overline{G} \subset PSL_2(\mathbb{C})$ это одна из подгрупп в предыдущей теореме. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $G \to \overline{G}$. Либо это изоморфизм, либо у него есть ядро порядка 2.

Заметим, что если $\overline{G}$ абелева, то $\overline{G}$, а значит и G диагональна, то есть изоморфна $\mathbb{Z}/n$. Предположим, что $\overline{G}$ небелева и покажем, что $G \to \overline{G}$ не является изоморфизмом, то есть будет нетривиальным расширением

$$\{\pm 1\} \to G \to \overline{G}.$$

Для этого заметим, что из классификации следует, что в группе $\overline{G}$ всегда есть нецентральный элемент порядка 2. С другой стороны, в $SL_2(\mathbb{C})$ единственный элемент порядка 2 будет -1, и это центральный элемент. Следовательно G и $\overline{G}$ не могут быть изморфны. □

Заметим, что заданные подгруппы лежат в группе унитарных матриц $SU(3) \subset SL(\mathbb{C})$

$$SU(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b^2| = 1 \right\},$$

которая изоморфна группе единичных кватернионов

$$\mathbb{H}_1 = \{x + yi + zj + wk : |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |w|^2 = 1\},$$

а значит конечные подгруппы $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ можно интерпретировать как группы кватернионов.

Упражнение 2.4. *Покажите что $BD_4 = \mathbb{Z}/4$, а BD_8 изоморфна группе из восьми кватернионов:*

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Упражнение 2.5. *Покажите что BT_{24} изоморфна группе:*

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\} \subset \mathbb{H}_1.$$

Упражнение 2.6. *С бинарными группами иногда удобнее работать в другом базисе. Найдите замену переменных которая не меняет диагональные матрицы, а матрицу*

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

переводит в

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.7. *Найти образующие и соотношения конечных подгрупп $G \subset SL_2(\mathbb{C})$.*

Упражнение 2.8. *Вычислить абелианизации конечных подгрупп $G \subset SL_2(\mathbb{C})$.*

2.2 Представления конечных групп

Представлением группы G называется её линейное действие на конечномерном векторном пространстве V, или что тоже самое гомоморфизм групп $G \to GL_(V)$.

Подпредставление это такое линейное подпространство $W \subset V$, которое сохраняется действием группы, то есть $G(W) \subset W$. Представление называется неприводимым, если оно не имеет нетривиальных подпредставлений (тривиальные это 0 и V).

Напомним следующие базовые факты из теории комплексных представлений конечных групп. Любое представление единственным с точностью до изоморфизма образом раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений. Отсюда в частности следует, что между неизоморфными неприводимыми представлениями нет ненулевых отображений. Неприводимых представлений конечное число. Если $r_1, \ldots, r_k$ это их размерности, то выполняются следующие условия:

$$r_1^2 + \cdots + r_k^2 = |G|,$$

и все r_j делят порядок группы $|G|$.

2.3 Графы Маккея

Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ конечная группа, и пусть Q это естественное n-мерное представление G. Предположим, что Q самодвойственно, то есть $Q^* \simeq Q$. Расширенный граф Маккея для (G, Q) это граф у которого множество вершин это множество неприводимых комлексных представлений $Irr(G)$, и между V, V' есть m рёбер в случае если $V \otimes Q$ содержит V' с кратностью

m. Заметим что V и V' в этой конструкции симметричны поскольку Q самодвойственно. В нашем случае $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ между представлениями будет не более одного ребра.

Графом Маккея называется расширенный граф Маккея из которого удалена вершина соответствующая тривиальному одномерному представлению.

Теорема 2.9. *Графы Маккея для конечных подгрупп $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ это:*

(a) A_{n-1} для циклической группы $\mathbb{Z}/n$

(b) D_{n+2} для бинарной циклической группы BD_{4n}

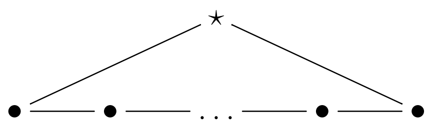
(c) E_6 для бинарной группы тетраэдра BT_{24}

(d) E_7 для бинарной группы октаэдра BO_{48}

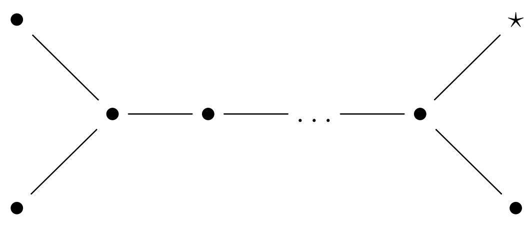
(e) E_8 для бинарной группы икосаэдра BI_{120}

Более того в доказательстве мы увидим что соответвующий расширенный граф Маккея это соответвующая расширенная диаграмма Дынкина. Расширенные диаграммы Дынкина получаются добавлением одной вершины, которая соответствует тривиальному одномерному представлению и отмечена звёздочкой, к диаграммам ADE следующим образом:

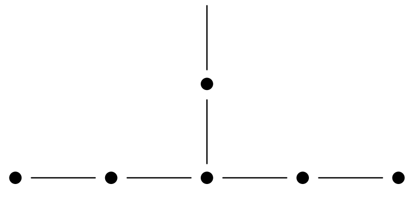
$\widetilde{A}_n$ ($n \geq 1$, общее число вершин $n+1$)



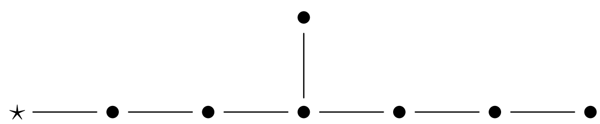
$\widetilde{D}_n$ ($n \geq 4$, общее число вершин $n+1$)



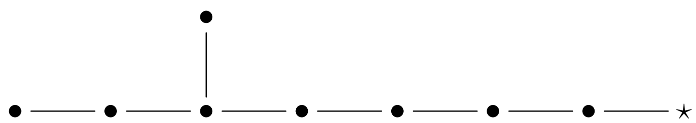
$\widetilde{E}_6$



$\widetilde{E}_7$



$\widetilde{E}_8$



Расширенные диаграммы Дынкина также называются аффинными. Заметим, что если мы проигнорируем маркировку дополнительной вершины звёздочкой, то расширенные диаграммы будут иметь больше симметрий, чем обычные.

В описании графов Маккея подгрупп $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ нам пригодится следующая лемма.

Лемма 2.10. *Двойственная группа $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{C}^*)$ действует автоморфизмами на расширенном графе Маккея.*

2.4 Циклическая группа

Пусть $G = \mathbb{Z}/n$ действует на $\mathbb{C}^2$ с весами $(1, -1)$. Поскольку G абелева, то все её неприводимые представления одномерны, а значит имеют вид

$$\chi_j : G \to \mathbb{C}^*,\ \chi_j(\overline{k}) = \zeta^{jk},\ j \in \mathbb{Z}$$

где ζ это примитивный корень степени n из единицы. На самом деле достаточно рассматривать представления $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$. В этих терминах естественное представление Q это

$$Q = \chi_1 \oplus \chi_{n-1}.$$

Имеем

$$\chi_j \otimes Q = \chi_j \otimes \big(\chi_1 \oplus \chi_{n-1}\big) = \chi_{j+1} \oplus \chi_{j-1}.$$

Получаем, что расширенный граф Маккея для G, Q это цикл из n вершин, то есть это диаграмма $\widetilde{A}_{n-1}$), а значит граф Маккея для G, Q, это A_{n-1}.

2.5 Бинарная циклическая группа

Бинарной группой диэдра или дициклической группой называется группа со следующим представлением:

$$BD_{4n} = \langle \sigma, \tau : \sigma^{2n} = 1, \sigma^n = \tau^2, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$

Легко видеть, что элемент $\epsilon := \sigma^n = \tau^2 \in BD_{4n}$ является центральным элементом порядка два. Факторгруппа $BD_{4n}/\langle\epsilon\rangle$ имеет представление

$$\langle \sigma, \tau : \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}\rangle,$$

то есть является обычной группой диэдра D_{2n}. Значит имеется *центральное расширение*

$$\mathbb{Z}/2 \cdot \epsilon \to BD_{4n} \to D_{2n}.$$

Отсюда в частности следует, что порядок группы BD_{4n} равен $4n$. В явном виде элементы бинарной группы диэдра записываются как

$$\tau^i\sigma^j,\ i = 0, 1;\ j = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Упражнение 2.11. *Покажите, что абелианизация бинарной группы группы диэдра имеет вид:*

$$(BD_{4n})^{ab} = \begin{cases} \mathbb{Z}/4, & n \text{ нечётно} \\ \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, & n \text{ чётно} \end{cases}$$

В первом случае элементы абелианизации это $1, \tau, \tau^2, \tau^3$ (при этом $\sigma = \epsilon = \tau^2$), а во втором случае $1, \tau, \tau\sigma, \sigma$ (при этом $\epsilon = 1$).

Выведите, что существует ровно 4 одномерных представления $BD_{4n} \to \mathbb{C}^*$ и опишите эти представления $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ явно.

Бинарная группа диэдра имеет естественное двумерное комлексное представление:

$$V_1 : \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_{2n} & \\ & \zeta_{2n}^{-1} \end{pmatrix},\ \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

где $\zeta_{2n} = \exp(\frac{2\pi i}{2n})$.

Также рассмотрим представления $V_j, 0 \le j \le n$ заданные по формулам:

$$V_j : \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_{2n}^j & \\ & \zeta_{2n}^{-j} \end{pmatrix},\ \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i^j \\ i^j & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $j \neq 0, n$ эти двумерные представления неприводимы, а при $j = 0, n$ они распадаются на сумму двух одномерных. При этом полученные одномерные представления попарно различны:

$$V_0 = \chi_1 \oplus \chi_2,\ V_n = \chi_3 \oplus \chi_4.$$

Предложение 2.12. *Представления χ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ и V_j, $j = 1, \ldots, n-1$ задают полный список различных неприводимых представлений BD_{4n}.*

Доказательство. Поскольку сумма квадратов размерностей представлений составляет
$$4 \cdot 1^2 + (n-1) \cdot 2^2 = 4n,$$
то есть равна порядку группы BD_{4n}, то достаточно проверить, что данные представления попарно неизоморфны. Для одномерных представлений это понятно.

Для представлений V_j заметим, что пары собственных чисел элемента $\sigma \in BD_{4n}$
$$\zeta_{2n}^{j}, \zeta_{2n}^{-j}$$
различны для разных $j = 1, \ldots, n-1$, а значит при разных j представления неизоморфны. $\square$

Упражнение 2.13. *Определим двумерные представления V_j для всех $j \in \mathbb{Z}$ по той же формуле. Проверьте, что*
$$V_{-j} \simeq V_j, \ V_{2n+j} \simeq V_j.$$

Предложение 2.14. *Для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ выполняется*
$$V_j \otimes V_k \simeq V_{j+k} \oplus V_{j-k}.$$

Предложение 2.15. *Граф Маккея группы BD_{4n} по отношению к представлению V_1 это расширенный граф Дынкина $\widetilde{D}_{n+2}$.*

2.6 Исключительные группы

Заметим, что если $\pi : G \to \overline{G}$ сюръективный гомоморфизм групп, то каждое неприводимое представление группы $\overline{G}$ даёт неприводимое представление группы G. Точнее, есть естественная биекция между неприводимыми представлениями $\overline{G}$ и теми неприводимыми представлениями G, на которых ядро $Ker(\pi)$ действует тривиально.

Упражнение 2.16. *Проверить, что размерности неприводимых представлений $T_{12} = A_4$ это $1, 1, 1, 3$, и что размерности неприводимых представлений BT_{24} это $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$. Используя $\mathbb{Z}/3$-симметрию, проверить, что расширенный граф Маккея для BT_{24} это $\widetilde{E}_6$, а значит граф Маккея для BT_{24} это E_6.*

Упражнение 2.17. *Проверить, что размерности неприводимых представлений $O_{24} = S_4$ это $1, 1, 2, 3, 3$, и что размерности неприводимых представлений BO_{48} это $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$. Используя $\mathbb{Z}/2$-симметрию, проверить, что расширенный граф Маккея для BO_{48} это $\widetilde{E}_7$, а значит граф Маккея для BO_{48} это E_7.*

Для следующего упражнения нужна таблица характеров группы BI_{120}, см. [D, Example 5.2.4].

Упражнение 2.18. *Проверить, что размерности неприводимых представлений $I_{60} = A_5$ это $1, 3, 3, 4, 5$, и что размерности неприводимых представлений BI_{120} это $1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6$. Проверить, что расширенный граф Маккея для BI_{60} это $\widetilde{E}_8$, а значит граф Маккея для BI_{120} это E_8.*

3 Уравнения ADE особенностей

3.1 Аффинные многообразия

Пусть k алгебраически замкнутое поле, например $k = \mathbb{C}$.

Пусть $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ полиномы от n переменных над полем k. Рассмотрим множество общих решений этих полиномов:

$$V(f_1, \ldots, f_r) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ для всех } i\}.$$

Множество вида $V(f_1, \ldots, f_r)$ называется аффинным алгебраическим многообразием. Например, векторное пространство k^n является аффинным многообразием, и как алгебраическое многообразие оно называется n-мерным аффинным пространством и обозначается $\mathbb{A}^n = k^n$.

Пример 3.1. *На аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ любое конечное множество точек $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} \subset \mathbb{A}^1$ это алгебраическое многообразие. Действительно, X является множеством решений уравнения*

$$f(x) = \prod_{j=1}^{t}(x - \alpha_j).$$

С другой стороны, любое алгебраические многообразие $X \subset \mathbb{A}^1$ это конечное множество точек, за исключением двух тривиальных случаев $X = \emptyset$ (когда $f(x) = 1$), $X = \mathbb{A}^1$ (когда $f(x) = 0$).

Пример 3.2. *Если $r = 1$, $n = 2$, $f \neq const$, то есть мы рассматриваем множество*

$$X = V(f) = \{(x, y) \in k^2 : f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{A}^2,$$

то это (аффинная алгебраическая) плоская кривая. Например, если степень $\deg(f) = 1$, то X это прямая. Если степень $\deg(f) = 2$, то X называется плоской коникой, если $\deg(f) = 3$, то называется плоской кубикой и так далее.

Пример 3.3. *Если $r = 1$, $n = 3$, то есть мы рассматриваем множество*

$$V(f) = \{(x, y, z) \in k^3 : f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{A}^3,$$

то это (аффинная алгебраическая) поверхность в трёхмерном пространстве. Например $V(xyz) = V(x) \cup V(y) \cup V(z)$ это объединение трёх координатных плоскостей.

Если $r = 2$, $n = 3$, то мы рассматриваем множество

$$V(f, g) = \{(x, y, z) \in k^3 : f(x, y, z) = 0,\ g(x, y, z)\} = V(f) \cap V(g) \subset \mathbb{A}^3.$$

Это – пересечение двух поверхностей, то есть как правило кривая, за исключением случая когда f и g имеют общий сомножитель.

В более общем случае, когда $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ любое множество полиномов (конечное или бесконечное), мы можем рассмотреть $X = V(S) \subset \mathbb{A}^n$.

Лемма 3.4. *(a) Пусть $J = \langle S \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ это идеал порождённый множеством S (то есть пересечение всех идеалов, содержащих S). Тогда $V(J) = V(S)$.*

(b) Если $J = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, то $V(J) = V(f_1, \ldots, f_r)$.

Более того, поскольку по теореме Гильберта о базисе, любой идеал в кольце полиномов конечно порождён, то для любого множества полиномов $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, $V(S) = V(\langle S \rangle) = V(f_1, \ldots, f_r)$ будет алгебраическим многообразием.

Упражнение 3.5. *Проверьте следующие свойства операции V:*

(a) Для любых идеалов $I, J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, имеем

$$I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J),$$

$$V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J).$$

(b) Для любого набора идеалов $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ имеем

$$V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda).$$

Покажите, что (a) неверно для бесконечных пересечений идеалов.

Операция V позволяет строить алгебраические многообразия по идеалам в кольце полиномов. Теперь покажем как строить идеалы по многообразиям.

Лемма 3.6. *Если $X \subset \mathbb{A}^n$ произвольное подмножество, то*

$$I(X) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ для всех } (a_1, \ldots, a_n) \in X\}$$

это радикальный идеал в кольце полиномов $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Напомним, что если R кольцо, то идеал $I \subset R$ называется *радикальным* если он равен своем радикалу:

$$I = \sqrt{I} = \{f \in R : f^s \in I \text{ для некоторого } s \in \mathbb{N}\}.$$

Например идеал $(x^2, y) \subset k[x, y]$ не радикальный, потому что его радикал это (x, y).

Упражнение 3.7. *Покажите что идеал $I \subset R$ радикальный тогда и только тогда когда фактор кольцо R/I не содержит нильпотентных элементов (то есть элементов $f \neq 0$ таких что $f^s = 0$ для некоторого s).*

Упражнение 3.8. *Покажите, что $I(\mathbb{A}^n) = 0$ (в доказательстве используется, что поле k алгебраически замкнуто, а следовательно бесконечно.)*

Упражнение 3.9. *(a) Для множеств $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n$, имеем $I(X) \supset I(Y)$.*

(b) Для любого набора $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ подмножеств $\mathbb{A}^n$, имеем

$$I(\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} I(X_\lambda).$$

Определение 3.10. *Если $X \subset \mathbb{A}^n$ алгебраическое многообразие, то фактор-кольцо*

$$k[X] := k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

называется кольцом регулярных функций на X.

Заметим, что $k[X]$ является не только кольцом, но также k-алгеброй.

Смысл этого определения такой. В алгебраической геометрии мы рассматриваем алгебраические многообразия и полиномиальные функции на них. Например, регулярные функции на аффинном пространстве это полиномы:

$$k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \ldots, x_n].$$

Если мы хотим ограничивать полиномиальные функции $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ на подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n$, то такое ограничение не будет инъективным:

разные $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ могут ограничиваться на X как одна и та же функция. Точнее говоря:

$$\begin{aligned} f\big|_X = g\big|_X &\iff f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \text{ для всех } (a_1, \ldots, a_n) \in k^n \iff \\ &\iff (f-g)(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ для всех } (a_1, \ldots, a_n) \in k^n \iff \\ &\iff f - g \in I(X). \end{aligned}$$

Значит элементы факторкольца $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]$ задают регулярные (то есть полиномиальные) функции на X.

Многообразие называется приводимым, если можно представить в виде нетривиального объеденения многообразий $X = X_1 \cup X_2$, и неприводимым в противном случае. Можно показать, что любое многообразие представляется единственным образом в виде конечного объеденения подмногообразий

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k.$$

В таком случае многообразия X_j называются неприводимыми компонентами для X.

Упражнение 3.11. *Пусть $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Разложите $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ на неприводимые компоненты.*

Упражнение 3.12. *Покажите, что X неприводимо тогда и только тогда когда $k[X]$ будет кольцом целостности.*

Теперь, если $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ два алгебраических многообразия, то регулярное отображение из X в Y это набор регулярных функций $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ на X так что образ $f(X)$ содержится в Y.

Пример 3.13. *Регулярное отображение из X в аффинное пространство $\mathbb{A}^m$ это в точности набор из m регулярных функций на X. В частности, регулярное отображение из X в аффинную прямую $\mathbb{A}^1$ это тоже самое что и регулярная функция на X.*

Как обычно, изоморфизм многообразий это регулярное отображение к которому есть обратное регулярное отображение.

Упражнение 3.14. *Если $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ регулярные отображения, то композиция $\psi \circ \phi : X \to Z$ будет регулярным отображением.*

Заметим, что если $\phi : X \to Y$ регулярное отображение, то оно определяет естественное отображение **в другую сторону**

$$\phi^* : k[Y] \to k[X],$$

заданное следующим образом. Если $f \in k[Y]$ регулярная функция на Y, то есть регулярное отображение $Y \to \mathbb{A}^1$ то её прекомпозиция с ϕ: $f \circ \phi$ будет регулярной функцией на X. Мы определяем

$$\phi^*(f) = f \circ \phi,$$

и легко видеть, что ϕ^* это гомоморфизм k-алгебр.

Таким образом аффинному алгебраическому многообразию соответствует конечно порождённая k-алгебра, а регулярному отображению аффинных многообразие соответствует гомоморфизм k-алгебр.

Одна из форм знаменитой теоремы Гильберта о нулях заключается в том что при переходе к алгебре регулярных функций это эквивалентность категорий:

Теорема 3.15. *Категория алгебраических многообразий двойственна к категории конечно порождённых k-алгебр без нильпотентных элементов.*

Упражнение 3.16. *Пусть $\phi : X \to Y$ регулярное отображение, а $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ соответствующее отображение k-алгебр. Покажите, то если ϕ сюръективно, то ϕ^* инъективно. Верно ли обратное утверждение?*

В алгебраической геометрии многообразия бывают особые и неособые: грубо говоря неособые многообразия просто устроены в окрестности любой точки. Это разделение примерно соответствует разделению на дифференцируемые и недифференцируемые функции в анализе. Мы не будем общее определение особых точек, поскольку оно опирается на довольно серьёзную коммутативную алгебру. Вместо этого мы дадим критерий как находить особые точки гиперповерхностей и порисуем картинки.

Определение 3.17. *Гиперповерхность $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ называется особой в точке $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ обращаются в ноль в точке $\underline{a}$. В противном случае точка a называется неособой.*

Упражнение 3.18. *Покажите, что объединение трёх плоскостей $V(xyz) \subset \mathbb{A}^3$ особо вдоль попарных пересечений.*

Упражнение 3.19. *Проверить, что в семействе плоских кубик*

$$X_\lambda = V(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2, \ (\lambda \in k)$$

особые точки имеются только у кривых X_0, X_1. Неособые плоские кубики называются эллиптическими кривыми.

Пусть $\underline{0} \in X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Запишем ряд Тейлора для f в окрестности точки $\underline{0}$ (заметим что $f(\underline{0}) = 0$):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots,$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ это однородный многочлен степени i. По нашему определению, $\underline{0}$ будет особой точкой у X тогда и только тогда когда $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Вообще говоря минимальное t такое что $f_t \neq 0$ называется кратностью точки $\underline{0} \in X$. Таким образом точка кратности 1 неособа, а уравнения точки кратности два начинаются со мономов степени два, и так далее.

В этом случае многообразие

$$C_{\underline{0}}X = V(f_t(x_1, \ldots, x_n))$$

называется касательным конусом к $\underline{0} \in X$. Например, в случае неособой точки касательный конус будет линейным пространством, которое называется касательным пространством к $\underline{0} \in X$.

3.2 Проективные многообразия

Более общие многообразия чем аффинные получаются склейкой аффинных многообразий. Важнеший пример не-аффинного многообразия это проективное пространство. Оно определяется следующим образом:

Пусть V/k векторное пространство размерности $n+1$. Тогда множество одномерных линейных подпространств

$$\mathbb{P}(V) = \{L \subset V : \dim(L) = 1\}$$

называется проективным n-мерным пространством. Заметим что любые два ненулевые вектора из одномерного пространства L пропорциональны, поэтому

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \underline{0})/\sim,$$

где отношение эквивалентность это $v \sim v' \iff v = \lambda v',\ \lambda \in k^*$.

Если выбрать у V базис $e_0, \ldots, e_n \in V$, то одномерные подпространства $L \subset V$ имеют проективные координаты $X_0, \ldots, X_n$ которые определены с точностью до умножения на ненулевую константу:

$$\mathbb{P}^n = \{[X_0 : \cdots : X_n] : \text{ не все } X_i \text{ равны нулю}\}/\sim,$$

где $\sim$ определено умножением на ненулевую константу.

Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ покрывается $n+1$ копией аффинного пространства $\mathbb{A}^n$. А именно, рассмотрим

$$U_j = \{[X_0 : \cdots : X_n] \in \mathbb{P}^n : X_j \neq 0\}.$$

Поскольку в каждой точке $\mathbb{P}^n$ какая-то координата ненулевая, то U_j все вместе покрывают $\mathbb{P}^n$, и называются картами. Легко видеть, что U_j естественно отождествляется с аффинным n-мерным пространством.

Пример 3.20. *Пусть $n = 1$, тогда $\mathbb{P}^1$ склеено из двух копий $\mathbb{A}^1$: на карте U_1 (где $Y \neq 0$) координата это $z = X/Y$, а на другой карте U_0 (где $X \neq 0$) координата это $w = Y/X$. Таким образом имеем $w = z^{-1}$ на пересечении карт, то есть там где обе координаты ненулевые.*

По-другому можно сказать, что

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$$

где точки $z \in \mathbb{A}^1$ имееют проективные координаты $[z : 1]$, а точка ∞ имеет коодинаты $[1 : 0]$. В случае $k = \mathbb{C}$ получаем двумерную сферу, которая в данном контексте называется сферой Римана. С точки зрения комплесного анализа на $\mathbb{P}^1$ есть координата z которая может обращаться в бесконечность.

На сфере Римана естественно действует группа $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$. В проективных координатах действие задано так:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, [X : Y] \right) \mapsto [aX + bY : cX + dY].$$

Перейдя к координате $z = X/Y$ получаем преобразования Мёбиуса комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Упражнение 3.21. *Покажите, что группа $PSL_2(\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{P}^1$ 3-транзитивно, то есть любые три точки $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$ можно перевести в $0, 1, \infty$. Обобщите это утверждение на $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$ и её действие на $\mathbb{P}^n$.*

Пример 3.22. *Рассмотрим три карты проективного пространства $\mathbb{P}^2$ и формулы для пересчёта координат. Введём следующие координаты:*

$$\begin{aligned} U_0\colon & s = Y/X,\ t = Z/X \\ U_1\colon & u = X/Y,\ w = Z/Y \\ U_2\colon & x = X/Z,\ y = Y/Z \end{aligned}$$

Из формул

$$[X : Y : Z] = [1 : s : t] = [u : 1 : w] = [x : y : 1]$$

можно вывести все формулы перехода. Например, с карты U_0 на U_1 переходим по формулам

$$u = 1/s, w = t/s$$

и так далее.

Смысл рассмотрения проективного пространства в том, что оно, в отличие от аффинного пространства будет компактным многообразием, то есть все возможные точки на бесконечности уже в нём лежат. Например плоские проективные кривые, то есть кривые $X \subset \mathbb{P}^2$ также будут компактными и изучать их как правило проще, чем аффинные кривые.

Объясним как задавать алгебраические многообразия в проективном пространстве. Конечно, мы будем рассматривать полиномиальные уравнения в проективных координатах. Однако легко видеть что на проективном пространстве имеют смысл только однородные уравнения. Если $F = F_d(X_0 : \dots X_n)$ однородный многочлен степени d, то

$$X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$$

это множество точек где F равен нулю. В каждой аффинной карте $\mathbb{A}^n = U_j \subset \mathbb{P}^n$, $X \cap U_j \subset \mathbb{A}^n$ будет задано полином степени не выше d и вместе эти аффинные многообразия покрывают X и задают на X структуру алгебраического многообразия. Объясним что мы имеем в виду на примере плоских проективных кривых.

Пример 3.23. *Пусть $F(X_0 : X_1 : X_2)$ однородный многочлен степени d. Рассмотрим (неоднородные) многочлены*

$$f_0(s,t) = F(1,s,t),\ f_1(u,w) = F(u,1,w)\ f_2(x,y) = F(x,y,1).$$

И три аффинные кривые

$$X_i = V(f_i) \subset U_i = \mathbb{A}^2$$

склеены между собой по формулам из предыдущего примера. Заметим, что дополнение к любой из карт это проективная прямая $\mathbb{P}^1$ "на бесконечности", откуда следует, что дополнение к каждому аффинному куску $X_i \subset X$ это конечное множество точек, за исключением случая, когда прямая $\mathbb{P}^1$ содержится в X целиком!

Упражнение 3.24. *Найти особые кривые в пучке проективных плоских кривых Гессе*

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ = 0,\ \lambda \in k.$$

Существует и естественная обратная опрерация - если $X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ это плоская аффинная кривая степени d, можно определить её проективное замыкание $\overline{X} = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, где $F(X : Y : Z) = Z^d f(X/Z, Y/Z)$. Легко видеть что F это однородный многочлен степени d и что X это аффинный кусок в $\overline{X}$.

Всё тоже самое работает для любого аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$.

Упражнение 3.25. *Показать что у кубической кривой $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ только одна точка на бесконечности, и эта точка всегда неособа.*

Есть и другая конструкция связывающая аффинные и проективные многообразия. А именно, если F однородный многочлен от n переменных, то можно рассмотреть его множество нулей $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в аффинном или проективном пространстве. Введём обозначение $X = V(F) \subset \mathbb{P}^{n-1}$, $CX = V(F) \subset \mathbb{A}^n$. Тогда CX это так называемый аффинный конус над X, а X это проективизация CX.

Пример 3.26. *Пусть $f(x, y) = \prod_{i=1}^{d}(\alpha_i y - \beta_i y)$ это однородный многочлен степени d без кратных корней (то есть все точки $[\alpha_i : \beta_i]$ различны). Тогда $X \subset \mathbb{P}^1$ это множество из d точек, а CX это объединение d прямых в $\mathbb{A}^2$ проходящих через начало координат.*

3.3 Фактор многообразия по действию группы

Пусть X аффинное алгебраическое многообразие. Пусть G конечная группа которая действует на X регулярными автоморфизмами, то есть задан гомоморфизм групп
$$\rho : G \to Aut(X).$$

Заметим, то по соответствию между аффинными многообразиями и их алгебрами регулярных функций, G естественно будет дейстовать на $k[X]$. А именно, действие задаётся

$$(g \in G, f \in k[X]) \mapsto \rho_g^*(f) = f \circ \rho_g \in k[X],$$

то есть если f функция на X, то её образ под действием элемента g это прекомпозиция f с ρ_g. Таким образом G действует автоморфизмами на k-алгебре $k[X]$.

Замечание 3.27. *Поскольку категория аффинных многообразий двойственна категории конечно-порождённых k-алгебр, а не эквивалентна ей, то левое действие G на X задаёт правое действие G на $k[X]$. Это можно исправить определяя*

$$(g \in G, f \in k[X]) \mapsto f \circ \rho_g^{-1} \in k[X].$$

Нас это беспокоить не будет.

Пример 3.28. *Пусть $k = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^n$, $G = \mathbb{Z}/m$. Тогда можно рассмотреть диагональное действие: образующая $1 \in \mathbb{Z}/m$ действует по формуле*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto (\zeta^{r_1} a_1, \ldots, \zeta^{r_n} a_n)$$

где $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{m})$ это первообразный корень из единицы степени m, а $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ это так называемые веса действия.

Соответствующее действие на кольце регулярных функций задаётся как

$$f(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]\mapsto f(\zeta^{r_1}x_1,\dots,\zeta^{r_n}x_n).$$

В соответствии Маккея центральную роль играет случай $n=2$, $r_1=1$, $r_2=-1$, то есть $\mathbb{Z}/n$ действует на $\mathbb{C}^2$ степенями матрицы

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}).$$

Естественно рассмотреть фактор по действию, то есть пространство орбит X/G. Предположим, что пространство орбит X/G имеет естественную структуру аффинного алгебраического многообразия (это неочевидно и вообще говоря даже неверно в случае когда G бесконечно).

Поскольку $\pi : X \to X/G$ сюръективное отображение, то отображение k-алгебр $k[X/G] \to k[X]$ должно быть инъективным. Это означает, что $k[X/G]$ будет подкольцом в $k[X]$. Заметим, что если f регулярная функция на X/G то её подъём $\pi^*(f)$ на X будет G-инвариантной. Поэтому

$$k[X/G]\subset k[X]^G=\{f\in k[X] : \rho_g^*(f)=f \text{ для всех } g\in G\}.$$

На самом деле имеет место следующий факт, который мы доказывать не будем:

Теорема 3.29. *Для конечной группы G действующей на аффинном многообразии факторпространство X/G имеет естественную структуру аффинного многообразия. При этом*

$$k[X/G]=k[X]^G=\{f\in k[X] : \rho_g^*(f)=f \textit{ для всех } g\in G\}.$$

Пример 3.30. *Пусть $X=\mathbb{C}$ и $G=\mathbb{Z}/m$ действует умножением на примитивный корень из 1*

$$a\in\mathbb{C}\mapsto \zeta\cdot a,$$

как в предыдущем примере. Тогда

$$\mathbb{C}[\mathbb{A}^1/G]=\mathbb{C}[x]^{\mathbb{Z}/n}=\{f(x)\in\mathbb{C}[x] : f(\zeta x)=f(x)\}=\mathbb{C}[x^n].$$

Поскольку кольцо $\mathbb{C}[x^n]$ изоморфно кольцу полиномов от одной переменной, имеем изоморфизм многообразий

$$\mathbb{A}^1/G\simeq\mathbb{A}^1.$$

Предыдущий пример это в каком-то смысле исключение: обычно фактор-многообразия неособых многообразий будут особыми вдоль неподвижных точек действия. Например, если $G\subset SL_n(\mathbb{C})$, то фактор многообразие $\mathbb{C}^n/G$ всегда будет особым в начале в координат.

3.4 Циклическая группа

Пример 3.31. *Пусть* $X = \mathbb{C}^2$, *а* $G = \mathbb{Z}/2$ *действует умножением на* -1*:*

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

Тогда

$$k[\mathbb{C}^2/G] = k[x, y]^{\mathbb{Z}/2} = \{f \in k[x, y] : f(-x, -y) = f(x, y)\} = k[x^2, xy, y^2].$$

Заметим что данное кольцо не является кольцом многочленов от двух переменных - легко видеть, что оно не порождено двумя элементами. Между тремя образующими $u = x^2, v = y^2, w = xy$ *есть соотношение*

$$uv = w^2$$

и гомоморфизм k*-алгебр*

$$k[u, v, w]/(uv - w^2) \to k[x^2, xy, y^2]$$

будет изоморфизом. Это означает, что фактор $\mathbb{C}^2/G$ *изоморфен поверхности*

$$V(uv - w^2) \subset \mathbb{A}^3.$$

Это простейшая двумерная особенность, после замены координат её можно записать как

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

(это уже новые x, y, z*, не имеющие отношения к исходным* x, y*). Такая особенность называется особенностью* A_1*.*

Упражнение 3.32. *Обобщить предыдущий пример на следующую ситуацию:* $G = \mathbb{Z}/n$ *действует на* $\mathbb{C}^2$ *с весами* $(1, -1)$*. Показать что фактор* $\mathbb{C}^2/G$ *имеет уравнение*

$$uv - w^n = 0$$

или после замены координат

$$x^2 + y^2 + z^n = 0.$$

Такая двумерная особенность называется особенностью A_{n-1}*.*

3.5 Бинарная группа диэдра

Предложение 3.33. *Для* $G = BD_{4n}$ *фактор многообразие* $\mathbb{C}^2/G$ *имеет уравнение*

$$x^2 + y(z^2 + y^n) = 0.$$

Доказательство. Вспомним, что BD_{4n} имеет нормальную подгруппу $\mathbb{Z}/2n$ с фактором $\mathbb{Z}/2$ и посчитаем кольцо инвариантов в два шага:

$$\mathbb{C}[x,y]^{BD_{4n}} = \left(\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/2n}\right)^{\mathbb{Z}/2}.$$

Мы уже знаем, что $\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/2n} = \mathbb{C}[x^{2n}, y^{2n}, xy]$. Остаточное действие $\mathbb{Z}/2$ на этом кольце индуцировано действием $x \mapsto -y, y \mapsto x$, то есть

$$x^{2n} \mapsto y^{2n}, y^{2n} \mapsto x^{2n}, xy \mapsto -xy.$$

Легко видеть, что $\mathbb{C}$-базис для $\mathbb{C}[x^{2n}, y^{2n}, xy]$ это:

$$x^{2ni}(xy)^k, y^{2ni}(xy)^k,\ i,k \geq 0.$$

причём действие $\mathbb{Z}/2$ на этом базисе задано как

$$x^{2ni}(xy)^k \mapsto (-1)^k y^{2ni}(xy)^k,\ y^{2ni}(xy)^k \mapsto (-1)^k x^{2ni}(xy)^k.$$

Это означает, что пространство инвариантов имеет базис

$$(x^{2ni} + (-1)^k y^{2ni})(xy)^k,\ i,k \geq 0.$$

Легко видеть, что три базисных элемента

$$u = (xy)^2, v = x^{2n} + y^{2n}, w = xy(x^{2n} - y^{2n})$$

порождают это кольцо. Между ними имеется одно соотношение

$$w^2 = uv^2 - 4u^{n+1},$$

которое переводится в требуемое соотношение заменой координат. □

3.6 Исключительные группы

Предложение 3.34. *Уравенения особенностей $\mathbb{C}^2/G$, где $G \subset SL_2(\mathbb{C})$ исключительная группа это:*

1. $G = BT_{24}$: $x^2 + y^3 + z^4 = 0$
2. $G = BO_{48}$: $x^2 + y^3 + yz^3 = 0$
3. $G = BI_{120}$: $x^2 + y^3 + z^5 = 0$

Доказательство. Стратегия доказательтва в том, чтобы сперва вычислить инварианты $\mathbb{C}[x,y]^{[G,G]}$ для коммутанта группы G, а потом взять инварианты абелианизации G^{ab}. Например, для $G = BT_{24}$ имеем $[G,G] = BD_8$, $G^{ab} = \mathbb{Z}/3$. Вообще говоря, доказательство требует нетривиальных вычислений, см. [D, 1.2,1.3].

□

4 Разрешение ADE особенностей и соответствие Маккея

4.1 Раздутие точки на многообразии

Кроме задания многообразий полиномиальными уравнениями в аффинном и проективном пространстве, существуют и другие способы построения алгебраических многообразий. Например, операция раздутия позволяет изменять локальную структуры точки на многообразии. Эта операция очень важна например при разрешении особенностей многообразия.

Мы сперва определим раздутие аффинного пространства в начале координат как подмногообразие в произведении аффинного и проективного пространства $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n, [Y_1 : \ldots Y_n])$

Определение 4.1. *Раздутие аффинного многообразия в начале координат это подмногообарзие $Bl_0(\mathbb{A}^n) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ заданное уравнениями*

$$x_i Y_j = x_j Y_i$$

для всех i, j.

Если $x_j, Y_j \neq 0$, то уравнение равносильно $x_i/x_j = Y_i/Y_j$, то есть мы требуем равенства проективных координат

$$[x_1 : \ldots x_n] = [Y_1 : \cdots : Y_n].$$

Конечно последнее равенство не имеет смысла если все x_i обращаются в ноль (заметим что все y_i не могут обращаться в ноль). В таком случае равенство понимается в том смысле, что если все $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, то разрешаются любые значения y_i.

Мы только что описали слои естественного регулярного отображения

$$\pi : Bl_0(\mathbb{A}^n) \to \mathbb{A}^n :$$

если $x \neq 0$ то слой $\pi^{-1}(x)$ состоит из одной точки, а $\pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}$. Такое поведение объясняет смысл термина "раздутие". Проективное пространство $\mathbb{P}^{n-1} = \pi^{-1}(0)$ называется исключительным дивизором раздутия.

Конечно, сделав замену координат можно описать раздутие любой точки в аффинном пространстве.

Если $X \subset \mathbb{A}^n$ аффинное многообразие и $x \in X$, то раздутие $Bl_x(X)$ можно определить как собственный прообраз X при морфизме раздутия. Объясним что такое собственный прообраз. Поскольку исключительный дивизор всегда лежит на прообразе $\pi^{-1}(X)$, то он будет его компонентой. Собственный прообраз получится если выбросить исключительный дивизор.

Структура алгебраического многообразия на $Bl_x(X)$ задаётся через склейку аффинных карт, как обычно.

Пример 4.2. *Покажем как раздутие работает для плоских аффинных кривых. Если $f(x, y) = 0$ уравнение кривой, то раздутие её в точке $(0, 0)$ задаётся как*

$$\{(x, y), [U : V] : f(x, y) = 0, [X : Y] = [U : V]\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1,$$

то есть покрывается двумя аффинными картами с координатами $u = U/V$, $v = V/U$ и функциями перехода $u = v^{-1}$. Значит в первой карте имеем

$$\{(x, y, u) \in \mathbb{A}^3 : f(x, y) = 0, x = uy\} \simeq \{(y, u) \in \mathbb{A}^2 : f(uy, y) = 0\}$$

где исключительный дивизор имеет уравнение $y = 0$ (значит уравнение нужно разделить на степень y), а во второй карте

$$\{(x, y, v) \in \mathbb{A}^3 : f(x, y) = 0, y = vx\} \simeq \{(x, v) \in \mathbb{A}^2 : f(x, vx) = 0\}$$

где исключительный дивизор имеет уравнение $x = 0$ (значит уравнение нужно разделить на степень x).

Покажем операция раздутия помогает разрешать особенности плоских кривых. Например, рассмотрим аффинную кривую $y^2 = x^n$. При $n \geq 2$ эта кривая особа в начале координат. В картах раздутия имеем

$$y^2 = u^n y^n,$$

то есть выкинув исключительный дивизор получаем

$$1 = u^n y^{n-2},$$

это неособая кривая, а во второй карте имеем

$$v^2 x^2 = x^n,$$

то есть выкинув исключительный дивизор получаем

$$v^2 = x^{n-2},$$

эта кривая всё ещё особа, но уже с меньшим значением n, значит после серии раздутий получаем регулярное отображение

$$\widetilde{X} \to X,$$

которое является изоморфизмом вне $0 \in X$, а $\widetilde{X}$ неособая кривая. Такое регулярное отображение называется разрешением особенностей.

Ограничение отображения раздутия π на X будем обозначать π_X.

Предложение 4.3. *Пусть $x \in X$. Отображение раздутия $\pi_X : Bl_x(X) \to X$ имеет слои состоящие из одной точки за исключением слоя точки x слой над которой это проективизация касательного конуса к x:*

$$\pi_X^{-1}(x) = \mathbb{P}(C_{x,X}).$$

4.2 Соответствие Маккея

Определение 4.4. *ADE особенность это двумерная особенность вида $\mathbb{C}^2/G$, где $G \subset SL_2(\mathbb{C})$.*

ADE особенности также называются дюваленскими, или простыми особыми точками.

Замечание 4.5. *Существует множество характеризаций ADE особенностей. Например, класс ADE особенностей совпадает с классом двумерных канонических особенностей (каноничность это условие на дифференциальные формы на особых многообразиях, и их поведении при разрешении особенности).*

Теорема 4.6 (Соответствие Маккея)**.** *Граф исключительных кривых ADE особенности $\mathbb{C}^2/G$ изоморфен графу Маккея для G, то есть соответствующей диаграмме Дынкина ADE.*

Доказательство будет проводиться в каждом случае отдельно. Для удобства запишем всю информацию об ADE особенностях в таблицу:

Диаграмма	Группа	Уравнение
A_n	$\mathbb{Z}/(n+1)$	$x^2+y^2+z^{n+1}$
D_n	$BD_{4(n-2)}$	$x^2+y(z^2+y^{n-2})$
E_6	BT_{24}	$x^2+y^3+z^4$
E_7	BO_{48}	$x^2+y^3+yz^3$
E_8	BI_{120}	$x^2+y^3+z^5$

Заметим, что уравнения особенностей не единственны, а определены с точностью до аналитической замены координат. Также заметим, что все уравнения входит по крайней мере один квадрат, то есть ADE особенности - это двойные особые точки.

Упражнение 4.7. *Кольцо Милнора для полинома $f(x_1,\ldots,x_n)$ это фактор кольцо*

$$R_f = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i=1,\ldots,n}.$$

Показать, что R_f конечномерная $\mathbb{C}$-алгебра тогда и только тогда когда у гиперповерхности $f=0$ изолированные особые точки. В таком случае $\dim_{\mathbb{C}} R_f$ называется числом Милнора $\mu(f)$ особенности $f=0$.

Показать, что $R_{f+z^2} = R_f$ и используя это доказать, что число Милнора особенностей A_n, D_n, E_n это соответствующий индекс n.

Упражнение 4.8. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Говорят, что гиперповерхность $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ имеет невырожденную особой точку в начале координат если $f(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ для всех i, и матрица* *вторых производных невырожденна (то есть имеет ненулевой определитель). Геометрически последнее условие означает, что касательный конус $C_0(X)$ будет квадрикой максимального ранга.*

Показать, что существует аналитическая замена координат (то есть формальными степенными рядами) такая что уравненение $f = 0$ переписывается в виде

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 0.$$

Невырожденные особые точки также называются особенностями A_1. Заметим, что невырожденность - это открытое условие на коэффициенты, то есть общая особенность невырожденна.

4.3 Циклическая группа

Упражнение 4.9. *Сделать замену координат и показать, что особенность $x^2 + y^2 + yz^k$ это особенность A_{2k-1}.*

Предложение 4.10. *Граф исключительных кривых для особенности A_n это диаграмма A_n.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/(n+1))$, а $\pi : \widetilde{X} \to X$ это раздутие начала координат. Для удобства заменим координаты и будем работать с уравнением A_n

$$xy + z^{n+1} = 0.$$

Согласно Предложению 4.3, исключительный дивизор отображения π это проективизация нормального конуса X.

Будем доказывать утверждение индукцией по n. При $n = 0$, получаем неособую точку (пустой граф A_0), а при $n = 1$, $\widetilde{X}$ будет неособой, и исключительный дивизор будет неприводимой коникой $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ в $\mathbb{P}^2$ (которая изоморфна $\mathbb{P}^1$), то есть получаем граф A_1.

Пусть $n \geq 2$. Исключительнй дивизор имеет уравнение $XY = 0$, это объединение двух прямых $E_1 = \{[0 : * : *]\}$ и $E_2 = \{[* : 0 : *]\}$ в $\mathbb{P}^2$. Покажем, что раздутие особенности A_n даёт особенность A_{n-2}, лежащую на пересечении этих двух компонент исключительного дивизора.

Действительно, единственная карта в которой появляется особая точка это карта $[x_1 : y_1 : 1]$ в которой $x = x_1 z, y = y_1 z$ и $\widetilde{X}$ имеет уравнение

$$x_1 y_1 + z^{n-1} = 0,$$

то есть особая точка (при $n \geq 3$) будет $[0 : 0 : 1]$, а это пересечение исключительных дивизоров E_1 и E_2, которые в этой карте заданы как $x_1 = z = 0$ и $y_1 = z = 0$. □

4.4 Бинарная циклическая группа

Упражнение 4.11. *Проанализировать особенности* D_2 *и* D_3*.*

Упражнение 4.12. *Сделать замену координат и показать, что особенность* $x^2 + y^3 + z^3$ *это особенность* D_4*.*

Предложение 4.13. *Граф исключительных кривых для особенности* D_n *это диаграмма* D_n*.*

Доказательство. Для начала заметим, что раздутие особенности D_n даёт особенности A_1, D_{n-2}, лежащие на исключительном дивизоре. □

4.5 Исключительные группы

Упражнение 4.14. *Проверить, что раздутие особенности* E_6 *даёт особенность* A_5*. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности* E_6 *это диаграмма* E_6*.*

Упражнение 4.15. *Проверить, что раздутие особенности* E_7 *даёт особенность* D_6*. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности* E_7 *это диаграмма* E_7*.*

Упражнение 4.16. *Проверить, что раздутие особенности* E_8 *даёт особенность* E_7*. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности* E_8 *это диаграмма* E_8*.*

Список литературы

[B] I. Burban: *Du Val Singularities.*

[D] I. Dolgachev: *McKay correspondence*, 2006/07.

[LW] G. Leuschke, R. Wiegand: *Cohen-Macaulay Representations*, 2011.