Простые особые точки и соответствие Маккея

Евгений Шиндер, Константин Шрамов

1 Задачи к первой лекции

Задача 1.1. *Пусть задан правильный многогранник в* $\Delta \subset \mathbb{R}^3$. *Пусть* $q \geq 3$ *число ребёр на грани, и пусть* $p \geq 3$ *число граней сходящихся в вершине. Пара* $\{p, q\}$ *называется символом Шлефли многогранника* Δ. *Показать, что* $2\pi > p\pi(1 - \frac{2}{q})$ *и вывести классификацию правильных многогранников.*

Задача 1.2. *Найти тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр и додэкаэдр в доказательстве теоремы о конечных подгруппах в* $PSL_2(\mathbb{C})$. *Проанализировать группы вращений тетраэдра, октаэдра (или куба), икосаэдра (или додэкаэдра) и попытаться показать что это* A_4, S_4, A_5 *соответственно. Ответить на вопрос, что же такое диэдр (у которого группа вращений* D_{2n}*)?*

Задача 1.3. *Покажите что* $BD_4 = \mathbb{Z}/4$, *а* BD_8 *изоморфна группе из восьми кватернионов:*

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Задача 1.4. *Покажите что* BT_{24} *изоморфна группе:*

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\} \subset \mathbb{H}_1.$$

Задача 1.5. *С бинарными группами иногда удобнее работать в другом базисе. Найдите замену переменных которая не меняет диагональные матрицы, а матрицу*

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

переводит в

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.6. *Найти образующие и соотношения конечных подгрупп* $G \subset SL_2(\mathbb{C})$.

Задача 1.7. *Покажите, что абелианизация бинарной группы группы диэдра имеет вид:*

$$(BD_{4n})^{ab} = \begin{cases} \mathbb{Z}/4, & n \text{ нечётно} \\ \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, & n \text{ чётно} \end{cases}$$

Задача 1.8. *Вычислить абелианизации исключительных подгрупп* $G \subset SL_2(\mathbb{C})$.

Задача 1.9. *Проверить, что размерности неприводимых представлений* $T_{12} = A_4$ *это* $1, 1, 1, 3$, *и что размерности неприводимых представлений* BT_{24} *это* $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$. *Используя* $\mathbb{Z}/3$*-симметрию, проверить, что расширенный граф Маккея для* BT_{24} *это* $\widetilde{E}_6$, *а значит граф Маккея для* BT_{24} *это* E_6.

Задача 1.10. *Проверить, что размерности неприводимых представлений* $O_{24} = S_4$ *это* $1, 1, 2, 3, 3$, *и что размерности неприводимых представлений* BO_{48} *это* $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$. *Используя* $\mathbb{Z}/2$*-симметрию, проверить, что расширенный граф Маккея для* BO_{48} *это* $\widetilde{E}_7$, *а значит граф Маккея для* BO_{48} *это* E_7.

2 Задачи ко второй лекции

Пусть $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ идеал. Тогда многообразие соответствующее идеалу I определено как

$$V(I) = \{a \in \mathbb{A}^n : f(a) = 0 \text{ для всех } f \in I\ \}.$$

Задача 2.1. *Проверьте следующие свойства операции* V*:*

(a) Для любых идеалов $I, J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, *имеем*

$$I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J),$$

$$V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J).$$

(b) Для любого набора идеалов $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *имеем*

$$V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda).$$

Покажите, что (a) неверно для бесконечных пересечений идеалов.

Задача 2.2. *Покажите что идеал* $I \subset R$ *радикальный тогда и только тогда когда фактор кольцо* R/I *не содержит нильпотентных элементов (то есть элементов* $f \neq 0$ *таких что* $f^s = 0$ *для некоторого* s*).*

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$. Тогда идеал, соответствующий множеству X определён как

$$I(X) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a) = 0 \text{ для всех } a \in X \ \}.$$

Задача 2.3. *Покажите, что* $I(\mathbb{A}^n) = 0$ *(в доказательстве используется, что поле* k *алгебраически замкнуто, а следовательно бесконечно.)*

Задача 2.4. *(a) Для множеств* $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n$*, имеем* $I(X) \supset I(Y)$*.*

(b) Для любого набора $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *подмножеств* $\mathbb{A}^n$*, имеем*

$$I(\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} I(X_\lambda).$$

Задача 2.5. *Пусть* $f \in k[x_1, \dots, x_n]$*. Разложите* $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ *на неприводимые компоненты.*

Задача 2.6. *Покажите, что* X *неприводимо тогда и только тогда когда* $k[X]$ *будет кольцом целостности.*

Задача 2.7. *Если* $\phi : X \to Y$*,* $\psi : Y \to Z$ *регулярные отображения, то композиция* $\psi \circ \phi : X \to Z$ *будет регулярным отображением.*

Задача 2.8. *Пусть* $\phi : X \to Y$ *регулярное отображение, а* $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ *соответствующее отображение* k*-алгебр. Покажите, то если* ϕ *сюръективно, то* ϕ^* *инъективно. Верно ли обратное утверждение?*

Задача 2.9. *Покажите, что объединение трёх плоскостей* $V(xyz) \subset \mathbb{A}^3$ *особо вдоль попарных пересечений.*

Задача 2.10. *Проверить, что в семействе плоских кубик*

$$X_\lambda = V(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2, \ (\lambda \in k)$$

особые точки имеются только у кривых X_0*,* X_1*. Неособые плоские кубики называются эллиптическими кривыми.*

Задача 2.11. *Покажите, что группа* $PSL_2(\mathbb{C})$ *действует на* $\mathbb{P}^1$ 3*-транзитивно, то есть любые три точки* $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$ *можно перевести в* $0, 1, \infty$*. Обобщите это утверждение на* $PSL_{n+1}(\mathbb{C})$ *и её действие на* $\mathbb{P}^n$*.*

Задача 2.12. *Найти особые кривые в пучке проективных плоских кривых Гессе*

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ = 0, \ \lambda \in k.$$

Задача 2.13. *Показать что у кубической кривой* $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ *только одна точка на бесконечности, и эта точка всегда неособа.*

Задача 2.14. *Пусть* $G = \mathbb{Z}/n$ *действует на* $\mathbb{C}^2$ *с весами* $(1, -1)$. *Показать что фактор* $\mathbb{C}^2/G$ *имеет уравнение*

$$uv - w^n = 0$$

или после замены координат

$$x^2 + y^2 + z^n = 0.$$

Такая двумерная особенность называется особенностью A_{n-1}.

3 Задачи к третьей лекции

Задача 3.1. *Кольцо Милнора для полинома* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *это фактор кольцо*

$$R_f = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{i=1,\ldots,n}.$$

Показать, что R_f *конечномерная* $\mathbb{C}$*-алгебра тогда и только тогда когда у гиперповерхности* $f = 0$ *изолированные особые точки. В таком случае* $\dim_{\mathbb{C}} R_f$ *называется числом Милнора* $\mu(f)$ *особенности* $f = 0$.

Показать, что $R_{f+z^2} = R_f$ *и используя это доказать, что число Милнора особенностей* A_n, D_n, E_n *это соответствующий индекс* n.

Задача 3.2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. *Говорят, что гиперповерхность* $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ *имеет невырожденную особой точку в начале координат если* $f(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ *для всех* i, *и матрица вторых производных невырожденна (то есть имеет ненулевой определитель). Геометрически последнее условие означает, что касательный конус* $C_0(X)$ *будет квадрикой максимального ранга.*

Показать, что существует аналитеческая замена координат (то есть формальными степенными рядами) такая что уравненение $f = 0$ *переписывается в виде*

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 0.$$

Задача 3.3. *Сделать замену координат и показать, что особенность* $x^2 + y^2 + yz^k$ *это особенность* A_{2k-1}.

Задача 3.4. *Проанализировать особенности* D_2 *и* D_3.

Задача 3.5. *Сделать замену координат и показать, что особенность* $x^2 + y^3 + z^3$ *это особенность* D_4.

Задача 3.6. *Проверить, что раздутие особенности E_6 даёт особенность A_5. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности E_6 это диаграмма E_6.*

Задача 3.7. *Проверить, что раздутие особенности E_7 даёт особенность D_6. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности E_7 это диаграмма E_7.*

Задача 3.8. *Проверить, что раздутие особенности E_8 даёт особенность E_7. Показать, что граф исключительных кривых разрешения особенности E_8 это диаграмма E_8.*