

Задачи по курсу в Дубне, 2017

Иван Лосев

23 июля 2017 г.

Это задачи к курсу "Теория представлений групп и теорема Бернсайда читающемуся в Дубне в 2017 году. Задачи, в основном, относительно сложные, но для понимания курса не обязательные.

1. Бесконечномерная лемма Шура.

Пусть A не более, чем счетномерная ассоциативная алгебра над \mathbb{C} , а V – её неприводимое представление. Тогда $\text{Hom}_A(V, V)$ состоит из постоянных отображений.

2. Неприводимые представления в характеристике > 0 .

Пусть \mathbb{F} алгебраически замкнутое поле положительной характеристики. Докажите, что количество неприводимых представлений конечной группы G над \mathbb{F} не превосходит количества классов сопряженности в G .

3. Группа $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Рассмотрим группу $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$, фактор $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ по центру. Докажите, что эта группа простая для $q > 3$, и что $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$ (группа четных подстановок).

4. Зануление характера.

Пусть V неприводимое представление конечной группы G размерности больше 1. Докажите, что найдется элемент $g \in G$ с $\text{ch}_V(g) = 0$.

5. Делимость Фробениуса

Пусть G конечная группа, и V её неприводимое представление. Тогда $\dim V$ делит $|G|$.