Потеря и спасение факториальности К. Конрад

Дубна, 2017 г. Листок 4

Тексты на диске O: `quadraticideals.pdf` и `primeidealexample.pdf`.

1. Проверьте следующие разложения главных идеалов на произведения простых идеалов. В первом листке вы увидели, что из них возникают примеры неоднозначности разложения на неприводимые *элементы*.

   а) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$:

$$\begin{aligned}(2) &= (2, 1+\sqrt{-5})^2,\\ (3) &= (3, 1+\sqrt{-5})(3, 1-\sqrt{-5}),\\ (1+\sqrt{-5}) &= (2, 1+\sqrt{-5})(3, 1+\sqrt{-5}),\\ (1-\sqrt{-5}) &= (2, 1+\sqrt{-5})(3, 1-\sqrt{-5}).\end{aligned}$$

   б) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$: $(2) = (2, \sqrt{-6})^2$, $(3) = (3, \sqrt{-6})^2$, и $(\sqrt{-6}) = (2, \sqrt{-6})(3, \sqrt{-6})$.

   в) в $\mathbf{Z}[(1+\sqrt{-23})/2]$:

$$\begin{aligned}(3) &= \left(3, \frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right)\left(3, \frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right),\\ (2+\sqrt{-23}) &= \left(3, \frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right)^3,\\ (2-\sqrt{-23}) &= \left(3, \frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right)^3.\end{aligned}$$

   (Подсказка для второго разложения в пункте (в): покажите, что $2+\sqrt{-23}$ лежит в идеале $(3, (1-\sqrt{-23})/2)$ и не лежит в идеале $(3, (1+\sqrt{-23})/2)$. Потом рассмотрите нормы идеалов.)

2. В $\mathbf{Z}[\sqrt{6}]$, $2 \cdot 3 = \sqrt{6}^2$ является квадратом. Докажите, что у 2 и 3 нет общих делителей кроме обратимых и определите явно, являются ли 2 и 3 кратными квадратов с точностью до умножения на обратимые.

3. Предположим, что $D \equiv 1 \bmod 4$ и D свободно от квадратов. В первом листке вы доказали, что 2 неприводимо в $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$. В $\mathcal{O}_D = \mathbf{Z}[(1+\sqrt{D})/2]$ докажите, что имеют место следующие разложения главного идеала $(2) = 2\mathcal{O}_D$

на простые идеалы в зависимости от $D \bmod 8$:

$$D \equiv 1 \bmod 8 \Longrightarrow 2\mathcal{O}_D = \left(2, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\right) \left(2, \frac{1-\sqrt{D}}{2}\right)$$

где идеалы справа простые и различные, и

$$D \equiv 5 \bmod 8 \Longrightarrow 2\mathcal{O}_D \text{ простой.}$$

4. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Докажите явно, что A и транспонированная матрица $A^\top$ не сопряжены над $\mathbf{Z}$: не существует такой матрицы $U \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$, что $UAU^{-1} = A^\top$. (Подсказка: перепишите последнее уравнение как $UA = A^\top U$ и покажите, что нет такой матрицы U с компонентами в $\mathbf{Z}$.)