Потеря и спасение факториальности — К. Конрад

Дубна, 2017 г. — Листок 1

Тексты на диске O: `Zinotes.pdf` и `quadraticideals.pdf`.

1. В $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, где d — целое, не являющееся квадратом, докажите, что если π неприводимое и ε обратимое, то $\varepsilon\pi$ также является неприводимым.

2. Докажите, что в следующих разложениях все члены неприводимые, и умножением на обратимые числа невозможно превратить множители из первого разложения в множители во втором.

   а) в $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$: $4 = 2 \cdot 2 = (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$

   б) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$: $4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$

   в) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$: $6 = 2 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$

   г) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-6}]$: $6 = 2 \cdot 3 = (\sqrt{-6})(-\sqrt{-6})$

   д) в $\mathbf{Z}[\sqrt{-23}]$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-23})(2-\sqrt{-23})$ (число множителей в разложениях не равны!)

3. Покажите, что 3 и 5 неприводимы в $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

4. Число 2017 простое в $\mathbf{Z}$ (вы уже знали это, да?). В $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, у 2017 есть несколько разложений:

   $$(45+2\sqrt{2})(45-2\sqrt{2}) = (43\sqrt{2}+1)(43\sqrt{2}-1) = (335+239\sqrt{2})(335-239\sqrt{2}).$$

   Покажите явно, что все эти разложения совпадают с точностью до умножения на некоторые обратимые в $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

5. В $\mathbf{Z}[i]$ разложите $2+31i$ на неприводимые (загадка: как разлагается его норма на простые в $\mathbf{Z}$?).

6. Предположим, что $d \equiv 1 \bmod 4$ и d не квадрат. Докажите, что 2 неприводимо в $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ и $2 \mid (\sqrt{d}+1)(\sqrt{d}-1)$, но $2 \nmid (\sqrt{d}+1)$ и $2 \nmid (\sqrt{d}-1)$.

7. Докажите, что если p простое в $\mathbf{Z}$ и приводимое в $\mathbf{Z}[i]$, то $p = (a+bi)(a-bi)$, где $a^2+b^2 = p$ и $a \pm bi$ — неприводимые. (Примеры: $2 = (1+i)(1-i)$, $5 = (1+2i)(1-2i)$, и $13 = (2+3i)(2-3i)$.)