- **Многочлены Шуберта**

$$\partial_i f := \frac{f - r_i f}{x_i - x_{i+1}}$$ ← оператор разделенной разности

$$Q := (i_1, \dots, i_\ell) \rightsquigarrow \pi_{s_1 \dots s_\ell}$$

слово в S_∞ ↗ Q; транспозиции ↗ i_1

Для приведенного Q, $\ell = \mathrm{length}(Q)$: $\partial_\pi = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\ell}$ - зависит только от π, не от Q

· Многочлены Шуберта - однородные многочлены S_π, $\pi \in S_\infty$, удовлетворяющие

$$\partial_i S_\pi = \begin{cases} S_{\pi s_i} & : i \text{ спуск, } (\pi(i) > \pi(i+1)) \\ 0 & : i \text{ подъем} \end{cases}$$

$w_0^n = n\ n-1 \dots 1$: $S_{w_0^n} = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$

$$\boxed{S_\pi := \partial_{\pi^{-1} w_0^n} S_{w_0^n}}$$

- S_3

$\underline{321} = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rightsquigarrow x^2 y$

$\underline{231} = s_2 s_1$ $\partial_1(x^2 y) = xy$

$\underline{312} = s_1 s_2$ $\partial_2(x^2 y) = x^2$

$\underline{213} = s_1$ x

$\underline{132} = s_2$ $x+y$

$\underline{123}$ 1

Лемма π, ρ одинак. длины $\partial_\pi S_\rho = \begin{cases} 1, & \pi = \rho \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Д-во Индукция по длине:

пусть i = спуск π Q = (какое-то) приведенное слово для π

$$\partial_{\pi s_i} \underbrace{\partial_i S_\rho} = \partial_\pi S_\rho$$

- если у ρ подъем в i, $\partial_i S_\rho = 0$
- иначе, применим предположение индукции к πs_i и ρs_i

QED

Теорема Многочлены Шуберта линейно независимы

Д-во Пусть $\sum C_\pi S_\pi = 0$. Выберем ρ максимальной длины; $c_\rho \neq 0$

$$0 = \partial_\rho\left(\sum c_\pi S_\pi\right) = c_\rho \partial_\rho S_\rho = c_\rho \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

QED.

Факт $\mathfrak{S}_\pi$ образуют базис в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$

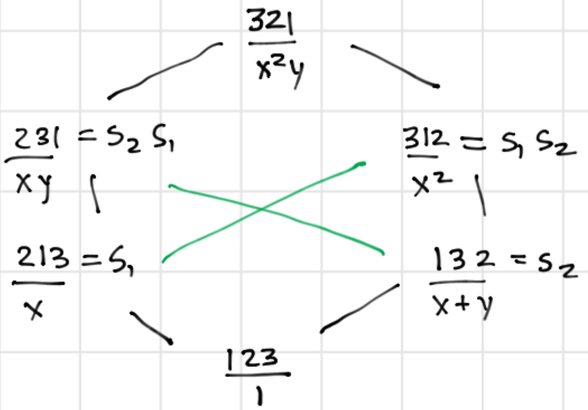
$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathfrak{S}_\pi \mid \pi \in S_n\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_{n-1}^{d_{n-1}} \mid d_i \leq n-i\}$$

- Порядок Брюа (Bruhat)

$t_{ab} = (ab)$ ⟵ транспозиция a и в

Опр. $\underbrace{\pi' \gtrdot \pi}_{\text{порядок Брюа (и между ними нет иного)}} \iff \pi' = \pi t_{ab}$ & $\ell(\pi') = \ell(\pi) + 1$ } (covering relation)

Пример



граф Брюа

$$\mathfrak{S}_{s_i} = x_1 + \dots + x_i$$

Теорема (формула Монка)

$$\mathfrak{S}_\pi \cdot \mathfrak{S}_{s_i} = \sum_{\substack{\pi' = \pi t_{ab} \\ \pi' \gtrdot \pi \\ a \leq i < b}} \mathfrak{S}_{\pi'}$$

Задача Доказать!

(применить операторы симм. разности)

- **Следствие**

$$x_i \mathfrak{S}_\pi = \sum_{\substack{\pi' = \pi t_{ib} \\ \pi' \gtrdot \pi \\ i < b}} \mathfrak{S}_{\pi'} - \sum_{\substack{\pi' = \pi t_{ai} \\ \pi' \gtrdot \pi \\ a < i}} \mathfrak{S}_{\pi'}$$

(алгебраическое следствие формулы Монка)

мы такое не любим

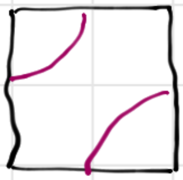
- Следствие (формула перехода Ласку (Lascoux)) Пусть $\pi \neq id$, i ее посл. спуск $j = \max\{i' \mid \pi(i') < \pi(i)\} \geq i+1$ $\pi' := \pi t_{ij}$. Тогда:

$$S_\pi = x_i S_{\pi'} + \sum_{\substack{a<i \\ \pi' t_{ai} > \pi}} S_{\pi' t_{ai}}$$

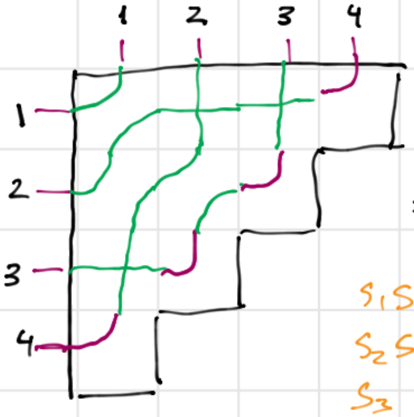
Такое мы любили

- Следствие $S_\pi \in \mathbb{Z}_+[x_1, x_2, \ldots]$ ← коэффициенты что-то считают

- Pipe dreams



elbow joints (колено)



pipe dream (rc. graph)

$s_1 s_2 s_3$
$s_2 s_3$
s_3

$= P \rightsquigarrow$ 1) $\pi_P = 1432$

2) $x^P = \prod x_i^{d_i}$ $\quad x^P = x_1^2 x_3$

$d_i = \#\{+\}$ в i-й строке

3) Слово $Q_P = (s_3, s_2, s_3)$

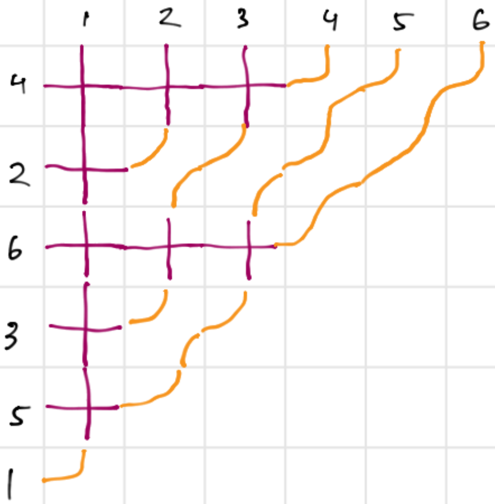
→ там где крестики

- Будем рассматривать приведенные pipe dreams: две трубки пересекаются ≤ 1 раз

Теорема (Stanley - Billey - Bergeron - Fomin - Kirillov)

$$S_\pi = \sum_{\substack{P = \text{приведенный pipe dream} \\ \pi_P = \pi}} x^P$$

313110:

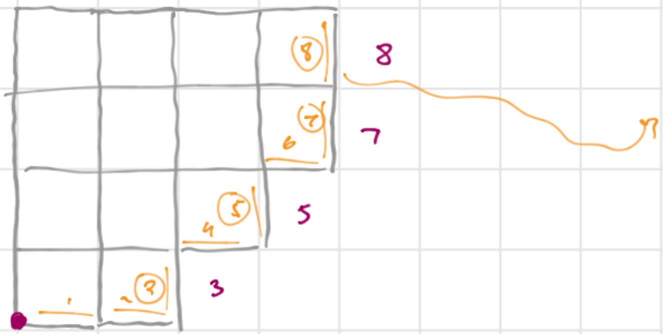


$\pi = \underline{426351}$

Теорема Многочлены Шуберта образуют базис в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$

- Некоторые многочлены Шуберта симметрические (и тогда - многочл. Шура!)
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

  $S_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ - многочлен Шура



$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

перестановка или Грассмана

$\pi(\lambda)$ - n-грассманова

Теорема $S_\lambda(x_1, \dots, x_n) = S_{\pi(\lambda)}(x_1 \dots x_n \dots)$

Задача Доказать, построив биекцию между
$T,\ sh(T) = \lambda$ и $P,\ \pi_P = \pi(\lambda)$