• Многочлены Шура:

$$S_\lambda = \sum_{sh(T)=\lambda} x^T = \frac{a_{\delta+\lambda}}{a_\delta}$$ ⟵ образуют базис в $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$

Многочлены можно умножать: $$S_\lambda \cdot S_\mu = \sum_{|\lambda|+|\mu|=|\nu|} C^\nu_{\lambda\mu} S_\nu$$

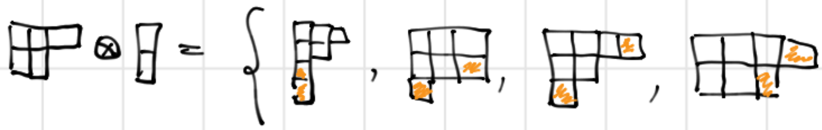
коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона $C^\nu_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}$

Теорема (~70е) $C^\nu_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}_+$

(Шютценберже - комб.
Клейман - алг. геом.)

Пример:

Условие: новые клетки не лежат в одном столбце



Правило Пьери: пусть $\mu=(k)$ $S_\mu=h_k$ или $\mu=(1^k)$ $S_\mu=e_k$

Тогда: $S_\lambda\cdot h_k = \sum_{\nu\in\lambda\otimes k} S_\nu$ $\qquad S_\lambda\cdot e_k=\sum_{\nu\in\lambda\otimes 1^k} S_\nu$

Задача: Доказать правило Пьери (многими способами)

- Операторы разделенных разностей и многочлены Шуберта

$R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$

$r_i : f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) \longmapsto f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)$

Многочлен f симметричен по индексам $i, i+1 \iff r_i f = f \iff (1-r_i)f = 0$

$x_1 x_2 x_3$ ← симм. относительно $r_1, r_2, r_4, \dots$

$$\partial_i f = \frac{(1-r_i)f}{x_i - x_{i+1}}$$ ← снова многочлен

∂_i ← i-я разд. разность

Упр. 1) $\deg \partial_i f = \deg f - 1$ если $\partial_i f \neq 0$

2) Если $\partial_i f = 0$, $\partial_i(fg) = f\,\partial_i g$

3) (Скрученное правило Лейбница) $\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + (r_i f)(\partial_i g)$

Примеры: $(x^2 y)$

$\partial_1(x^2y) = xy\,\partial_1(x) = xy$

$\partial_2(x^2y) = x^2\partial_2(y) = x^2$

$\frac{x^2y - x^2z}{y-z} = x^2$

$\partial_1(x+y) = 0$ $\quad \partial_2(x+y) = 1$

$\partial_1(x) = 0$ $\quad \partial_2(x) = 0$

$\partial_1(xy) = 0$

$\partial_2(xy) = x$

$\partial_2(x^2) = 0$

$\partial_1(x^2) = x + y = \frac{x^2-y^2}{x-y}$

Упр. (1) $\partial_i^2 f = 0$ $\quad \left(= \partial_i \frac{\text{кососимм.}}{\text{кососимм.}} = \partial_i\ \text{симм.} = 0\right)$

(2) $|i-j|>1 \implies \partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$

(3) $\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$ (соотношение в группе кос)

} соотношения на трансполиции (ij) в S_n

- $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ $\qquad \varinjlim S_n = S_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ $\qquad s_i = (i \leftrightarrow i+1)$

Теорема Существует единственное семейство однородных многочленов S_π, $\pi \in S_\infty$ такое что:
$$\partial_i S_\pi = \begin{cases} S_{\pi \circ s_i}, & \pi(i) > \pi(i+1) \\ 0, & \pi(i) < \pi(i+1) \end{cases} \qquad S_{id} = 1$$
$$\overset{\shortparallel}{(1)}$$

Опр. $\pi \in S_\infty$: π спуск в i если $\pi(i) > \pi(i+1)$ 35241
— " — подъем — " — $<$ — " —

$$\ell(\pi) = \{\#(i,j) \mid i<j,\ \pi(i) > \pi(j)\} \leftarrow \text{длина перестановки}$$

Упр. (1) $\ell(\pi) = \ell(\pi^{-1})$
(2) $\ell(\pi \circ s_i) = \ell(\pi) \pm 1$

$\ell((1)) = 0$
$\ell[(1\, n\, (n-1) \ldots)] = \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Примеры: $S_{(12)} = x_1$
$S_{(i,i+1)} = x_1 + \dots + x_i$

Доказательство (ед.) Пусть $\pi \neq (1)$ и пусть i - ее спуск. Тогда:
$\partial_i S_\pi = S_{\pi \circ s_i}$ $\quad \deg S_\pi = \deg S_{\pi \circ s_i} + 1$

Упр. Однородный многочлен однозначно восстанавливается $\partial_i f$

QED

Пример S_3: обозначение: $\binom{123}{213} = \underline{213}$ и т.д.

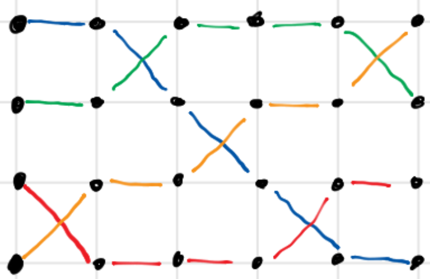
$x^2y = S_{321}$ $\quad xy = S_{231}$ $\quad x^2 = S_{312}$ $\quad x = S_{213}$ $\quad x+y = S_{s_2} = S_{132}$ $\quad 1 = S_{(1)}$

$$S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \qquad s_2 s_3 s_2 = \underline{14}32$$

Упр. Самое короткое слово для π состоит из $\ell(\pi)$ букв (приведенные слова)
$s_1 s_2 \leftarrow$ приведенное $\quad s_2 s_1 s_2 s_1$ - неприведенное
Слово не единственно: $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$

Упр. Показать что S_{12321}, S_{13231}, S_{31231} соотв. одной перестановке $\quad (S_{ij\ldots} = S_i S_j \cdots)$

3 1 2 3 1 : S_4

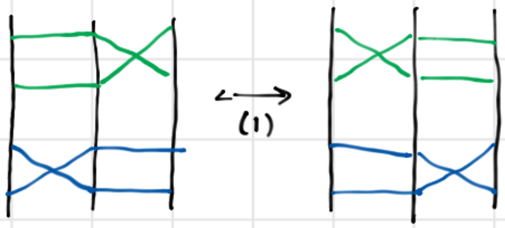


Заметим что:

число пересечений = длина перестановки

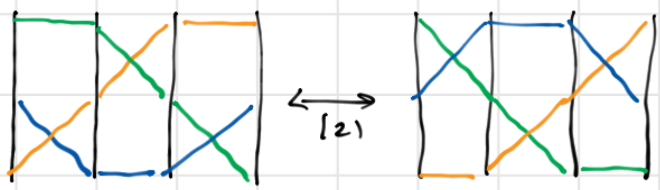
Упр. Слово приведенное: никакие две нити не пересекаются два раза

• Соотношения



$|i-j|>1$

Далекая коммутативность



Соотношение в группе кос

~ Ω_3 = 3-е движение Рейдемейстера

~ Соотношение Янга-Бакстера

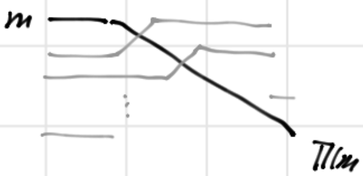
Теорема Любые два приведенных слова с одной и той же перестановкой получаются друг из друга ходами (1) и (2)

Док-во Приведение к каноническому виду.

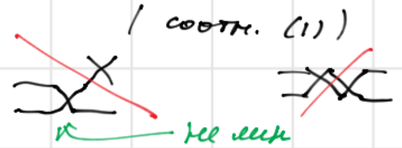
Пусть m = мин. число для которого $\pi(m)>m$. Образуем в конце диагр. фрагмент вида:

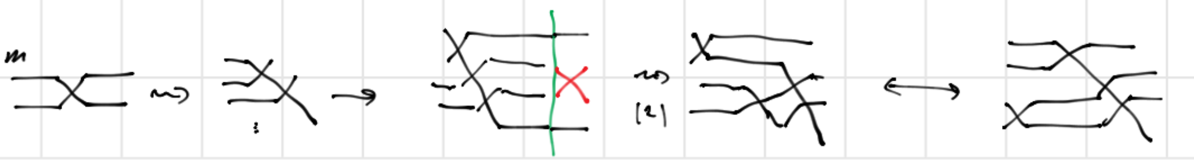
$s_m s_{m+1} \cdots s_{m+k-1}$

$\pi(m)=m+k$



Как? Двигаем ^{m}⟩⟨ вправо (соотн. (1))





и т.д. (индукция)

QED

Упр. Реализуйте этот алгоритм для $s_3 s_1 s_4 s_2 s_3 s_5 s_1$ и т.д.

- Следствие s_i и ∂_i удовлетворяют одним и тем же соотношениям, тогда для каждого приведенного слова $Q = (s_{i_1} \cdots s_{i_r})$ можно определить $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_r} = \partial_\pi$ который зависит только от $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$

Теорема Многочлены Шуберта существуют и вычисляются так:

(1) $w_0^n = \underline{n \; n-1 \; \cdots \; 2} \; 1$

$$S_{w_0^n} = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}^1$$

(2) Если $\pi \in S_n$, то положим $S_\pi = \partial_{\pi^{-1} w_0^n} S_{w_0^n}$

В частности, $\deg S_\pi = \ell(\pi)$

Проверить корректность по отношению к вложениям $S_n \subset S_{n+1} \subset S_{n+2} \subset \cdots$

Задача: (1) Проверить это.

(2) Посчитать для S_4

$\therefore$ Многочлены Шуберта построены