Е. Смирнов: Симметрические многочлены

$x^2+px+q=0$ $\quad x_1, x_2$ – корни $\quad x_1+x_2=-p \quad x_1x_2=q$

$x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) = -p^3+3pq$

Опр. Многочлен $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ называется симметрическим если $f(\dots,x_i,x_{i+1},\dots)=f(\dots,x_{i+1},x_i,\dots)$ $\forall i<n$ (транспозиции порождают S_n)

Примеры:

0) $c\in\mathbb{Z}$

1) $x_1+\dots+x_n$

2) $x_1^k+\dots+x_n^k$ – многочлены Ньютона

3) $\sum\limits_{i<j} x_ix_j$ – элементарный симм. многочлен (степени 2)

4) $\sum\limits_{i\le j} x_ix_j$ – полный симметрический многочлен

$R=\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$

R^{S_n} = кольцо симм. многочленов $\triangleleft R$

R_k = лин. комб. многочленов степени k (градуировка)

$R=\bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} R_k \qquad R_kR_l\subset R_{k+l}$

R^{S_n} – градуированное подкольцо!

Предложение Однородные комп. симм. многочлена – однородные симм. многочлены

Д-во. Пусть $\deg f=k$, $f\in R^{S_n}$. Докажем что f_k снова симметр.

$\frac{1}{t^k}f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)\xrightarrow[t\to\infty]{} f_k(x_1,\dots,x_n)$ симметрический.

Потом вычтем и применим индукцию. QED

- $\dim R_k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ (добавить $k-1$ перегородку)

- Какой базис в симм. многочленах (в свободной Абелевой группе)?

Базис в $R^{S_n} \rightsquigarrow$ базис в $R_k^{S_n}$? Идея: брать и "усреднять" мономы.

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \underset{\sigma \in S_n}{\rightsquigarrow} \underbrace{x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}}_{\sum_{\sigma \in S_n}} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots)$$

Аккуратно: $x_1 x_2 \rightsquigarrow 2 x_1 x_2$ ← надо убрать!

Пусть $S_n(\lambda)$ = множество наборов получаемых из $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ упорядочиванием

$$m_\lambda = \sum_{\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in S_n(\lambda)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Утв. Пусть λ пробегает все наборы $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.
Тогда $\{m_\lambda\}$ образуют базис $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ (как свободной Абелевой группы)

$\{m_\lambda\}$ = мономиальный базис.

- Элементарные симметрические многочлены: $e_k := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k < n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$

Сколько их?

- $e_1 = x_1 + \cdots + x_n = m_1$
- $e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = m_{11}$
  $\vdots$
- $e_n = x_1 \cdots x_n$

Теорема $R^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ (любой симм. многочлен выражается через $e_1, \ldots, e_n$ ед. образом)

- Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $n \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 0$

$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}$ Иначе говоря, $\left\{ e_\lambda \,\middle|\, \begin{smallmatrix} \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ n \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \end{smallmatrix} \right\}$ базис $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ как свободной Абелевой группы.

$$E(t) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \dots + e_n t^n = (1+t x_1)(1+t x_2)\cdots(1+t x_n)$$

(Теорема Виета)

$$h_k = \sum_{1\le i_1\le \dots \le i_k \le n} x_{i_1}\dots x_{i_k} \quad k \geq 1$$ полные симметрические многочлены

$h_1 = e_1 = m_1$

$h_2 = \sum x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j = m_2 + m_{11} = e_1^2 - e_2$

$h_3 = \sum x_i^3 + \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j + \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = m_3 + m_{21} + m_{111} = e_1^3 - 2e_1 e_2 + e_3$

И наоборот:

- $e_2 = h_1^2 - h_2$
- $e_3 = h_3 - h_1^3 + 2h_1(h_1^2 - h_2) = h_1^3 - 2h_1 h_2 + h_3$

формулы одни и те же.

$$H(t) = 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots = (1 + x_1 t + x_1^2 t^2 + \dots)(1 + x_2 t + x_2^2 t^2 + \dots)\cdots(1 + x_n t + x_n^2 t^2 + \dots)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t}$$

$$\boxed{E(t)\,H(-t) = 1}$$

$$\left(\sum e_k t^k\right)\left(\sum h_k t^k (-1)^k\right) = 1$$

далее можно рекуррентно решить e через h и наоборот

$e_1 - h_1 = 0$

$e_2 - e_1 h_1 + h_2 = 0$

$\vdots$

$e_n - e_{n-1} h_1 + \dots + (-1)^n h_n = 0$

Упр. Выразить e_n через $h_1, \dots, h_n$

Следствие $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$

$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k}$: $\lambda_1 \le n$ $\quad h_\lambda$ = базис $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$

• Кососимметрические многочлены.

Опр. $f(x_1,\dots,x_n)$ кососимметрический если $f(\dots,x_i,x_{i+1},\dots)=-f(\dots,x_{i+1},x_i,\dots)$

Например: $\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)=\det\begin{bmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1\end{bmatrix}$ (определитель Вандермонда)

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}^{n-1}x_{\sigma(2)}^{n-2}\cdots x_{\sigma(n)}=a_\delta^n \qquad \delta=(n-1,n-2,\dots,1,0)$$

Утв. Любой кососимм. многочлен делится на a_δ^n; частное — симм. многочлен.

$$\mu=(\mu_1>\mu_2>\dots>\mu_n) \qquad a_\mu:=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}^{\mu_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\mu_n}$$

Утв. a_μ образуют базис в пространстве кососимм. многочленов

Техн. прием: строгое ↔ нестрогое $\qquad \mu_k=\lambda_k+n-k \quad \mu=\lambda+\delta$ где $\delta=(n-1,\dots,1,0)$

Пусть $\lambda_1\geq\dots\geq\lambda_n\geq 0 \qquad a_{\lambda+\delta}$ — базис в кососимм. функциях

Опр. $s_\lambda:=\dfrac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ многочлены Шура

Теорема s_λ образуют базис в пространстве симм. многочленов

Пример: $\mathbb{Z}[x,y]^{S_2}$ $\quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\delta=(1,0)$

$$a_\delta=\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1\end{vmatrix}=x-y$$

$$a_{\lambda+\delta}=\begin{vmatrix} x^{\lambda_1+1} & y^{\lambda_1+1} \\ x^{\lambda_2} & y^{\lambda_2}\end{vmatrix}=x^{\lambda_2}y^{\lambda_2}\left(x^{\lambda_1-\lambda_2+1}-y^{\lambda_1-\lambda_2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{s_\lambda=x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}+x^{\lambda_1-1}y^{\lambda_2+1}+\dots+x^{\lambda_2}y^{\lambda_1}}$$

Упр. Показать что при $\lambda=(k,0,\dots,0)$ $s_\lambda=h_k$; $\lambda=(\underbrace{1,\dots,1}_{k},0,\dots,0)$, $s_\lambda=e_k$

- $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ $\quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

$$a_{\lambda+\delta} = \mathrm{SkewSymm}\left(x_1^{\lambda_1+n-1}, x_2^{\lambda_2+n-2},\dots, x_n^{\lambda_n}\right) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_n+n-1} \\ x_1^{\lambda_1+n-2} & & \vdots \\ \vdots & & \\ x_1^{\lambda_1} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

$=$ определитель Вандермонда

$$a_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Многочлены Шура: $\quad s_\lambda := \dfrac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ $\quad \leftarrow$ базис в $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$

- Пример: $\lambda = (2,1,1)$ $\quad s_{(2,1,1)}(x,y,z) = \dfrac{\begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}}{(x-y)(x-z)(y-z)} = x^2yz + xy^2z + xyz^2$

- **Наблюдение:** $s_\lambda \in \mathbb{Z}_+[x_1,\dots,x_n]$

- Задача: $s_{(k)} = h_k$; $\quad s_{1^k} = e_k$.

- Как считать s_λ на практике? — **Формула Якоби - Труди** (1841) (1869)

Теорема $\quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$

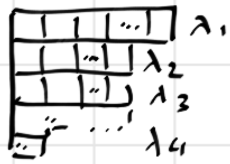
$$s_\lambda = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & h_{\lambda_{n-1}} & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

где $h_0 = 1$
$h_k = 0 \quad k<0$

- Следствие: $\quad s_{(k)} = \begin{vmatrix} h_k & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = h_k$ $\quad$ (детерминантная форма)

Разбиения ⟷ диаграммы Юнга

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$



$\lambda = (5,4,4,1)$ $\lambda^* = (4,3,3,3,1)$

Задача (JT*) $\det\left(e_{\lambda_i+j-i}\right)_{i,j=1}^{n} = s_{\lambda^*}$

Следствие $\omega: e_k \leftrightarrow h_k \Leftrightarrow s_\lambda \leftrightarrow s_{\lambda^*}$

Цель: Придать комбинаторный смысл коэффициентам многочлена Шура (из чего будет следовать их положительность)

Таблица Юнга диаграммы Юнга:
расстановка чисел $1,\dots,n$ в клетках λ:
$t_{ij} \leq t_{i,j+1}$
$t_{ij} < t_{i+1,j}$ (числа могут повторяться)

Пример:

1	2	2	4
3	4	4	
4	5	6	

$(4,3,3)$

$sh\, T = \Lambda$ ← форма (shape)

$x^T = x_1 x_2^2 x_3 x_4^4 x_5 x_6$

Таблица Юнга ⟶ моном

$s_{(2,1,1)} = s_{\boxplus} = x^2yz + xy^2z + xyz^2$

Теорема $s_\lambda = \sum_{sh\, T = \lambda} x^T$

1	1
2	
3	

x^2yz

1	2
2	
3	

xy^2z

1	3
2	
3	

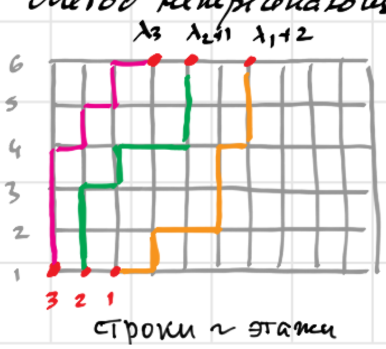
xyz^2

- Частные случаи: $\boxed{1 \cdots 1}$ $s_\lambda = h_i$ (столбец) $s_\lambda = e_k$

Переформулировка:

$$\sum_{sh\, T = \lambda} x^T = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)$$

Метод непересекающихся путей (Линдстрем – Гессель – Вьенно)



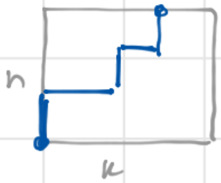
$\lambda_k + n - k$

этот пример

$wt\,\gamma_1 = x_1 x_2^2 x_4$
$wt\,\gamma_2 = x_3 x_4^2$
$wt\,\gamma_3 = x_4 x_5 x_6$

$x^T = (wt\,\gamma_1)(wt\,\gamma_2)(wt\,\gamma_3)$

$$\text{RHS} = \sum_{\substack{\gamma_i \\ \text{непер. путей}}} \prod wt\,\gamma_i$$

Один путь: 

$\mathrm{RHS} = h_k$

Непересекающиеся пути – тяжело...

Посчитаем алт. сумму по всем наборам путей по всем перестановкам:

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma} (\mathrm{wt}\,\gamma_1)(\mathrm{wt}\,\gamma_2)\cdots(\mathrm{wt}\,\gamma_n)$$

Утверждение: Это сумма по непересекающимся путям (пер. пути входят дважды с разными знаками)

– одинаковый вес
– разная чётность.

$$\therefore\ \mathrm{RHS} = \sum (-1)^{\sigma} \prod h_{\lambda_i - i + \sigma(i)} = \det\left(h_{\lambda_i + j - 1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Якоби-Труди