Автономные (QRT) и неавтономные (Painlevé) Дискретные Динамические Системы и их Геометрия

• Дискретная динамическая система: $\varphi: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ = конфигурационное пространство

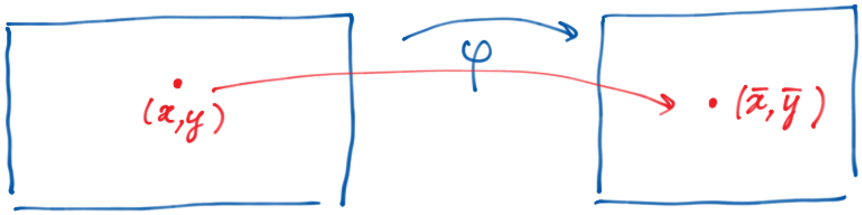
$\therefore$ последовательность точек $\ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots \in \mathcal{X}$ $\qquad x_n = \varphi^{\circ n}(x_0)$

(отображение φ может быть неавтономным, т.е. зависеть от n)

Принятые обозначения: $\quad x_n = x, \quad x_{n+1} = \bar{x}, \quad x_{n-1} = \underline{x}$

В нашем случае: $\mathcal{X}$ = (комплексная) плоскость $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ с координатами (x,y)

(предварительно)



Что мы хотим:
- интересная (нелинейная) динамика
- достаточно простая (задается рациональными функциями)
- обратимая по времени (би-рациональная)
- интегрируемая ("нет хаоса", есть структура, законы сохранения)

• Отображения из класса QRT (построены в работе G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts, C.J. Thompson)

Геометрический подход: Начнем с рассмотрения биквадратичной кривой Γ:

$$\Gamma := \underbrace{V}_{\text{множество нулей}}(p(x,y)) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : p(x,y) = 0\}, \text{ где } p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y],$$

(от vanishing) $\qquad \deg p := (\deg_x p, \deg_y p) = (2,2)$, то есть

$$\Gamma: \; p(x,y) = a_{00}x^2y^2 + a_{10}xy^2 + a_{20}y^2 + a_{01}x^2y + a_{11}xy + a_{21}y + a_{02}x^2 + a_{12}x + a_{22}$$

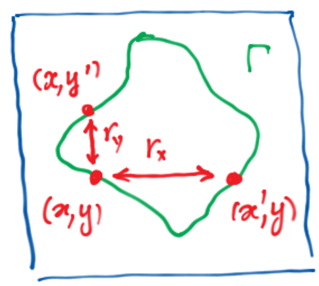
$$= a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x) = \vec{X}^T A \vec{Y} = 0 \quad \sim \text{ матричная форма}$$

$$\vec{X} = \langle x^2, x, 1\rangle = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \langle y^2, y, 1\rangle, \qquad \vec{X}^T A \vec{Y} = \underbrace{[x^2 \; x \; 1]\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}_{[a_0(x) \;\; a_1(x) \;\; a_2(x)]}\begin{bmatrix} y^2 \\ y \\ 1\end{bmatrix} = p(x,y)$$

(Пока предположим, что мы в общей ситуации, нет вырождений, и т.д.)

На Γ есть две инволюции r_x и r_y:

(инволюция i = отображение порядка 2, $i^2 = i \circ i = id$)



$r_x: (x,y) \longleftrightarrow (x',y)$

$r_y: (x,y) \longleftrightarrow (x,y')$

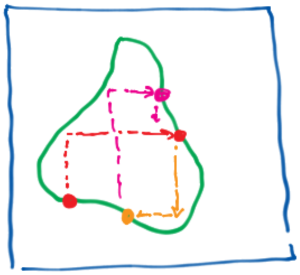
Здесь мы используем тот факт что Γ биквадратична, при фиксированном x, мы получаем квадратное уравнение на y:

$$p(x,y) = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x) = a_0(x)(y-y_1)(y-y_2) \quad \therefore \quad y_1 + y_2 = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

$$r_y: (x,y) \mapsto \left(x, -y - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)$$

Так как r_x и r_y инволюции, $r_x^2 = r_y^2 = id$, их динамика не очень интересна.

Интереснее рассмотреть их композицию $\eta := r_x \circ r_y : (x,y) \longmapsto (\bar{x}, \bar{y})$ — в общей ситуации не периодично

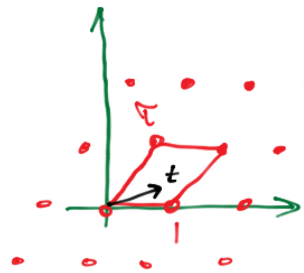


Замечание: В общем случае (2,2)-кривая над $\mathbb{C}$ является эллиптической, $\Gamma \simeq \; \simeq \mathbb{C}/\Lambda$:

∴ на Γ есть структура Абелевой группы

$\eta : \underset{\in \Gamma}{p} \longmapsto p + t$

(Tsuda '04)



$\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{1, \tau\}$

• Пока наше отображение задано на одной кривой Γ. Мы хотим расширить его на всю комплексную плоскость. Это можно сделать рассмотрев пучок таких (2,2)-кривых.

(пучок = однопараметрическое семейство кривых) :

• $A, B \in Mat_{3\times3}(\mathbb{C})$ $\qquad \lambda_0 \vec{X}^T A \vec{Y} + \lambda_1 \vec{X}^T B \vec{Y} = P_{[\lambda_0:\lambda_1]}(x, y; \underbrace{A, B}_{18 \text{ параметров}}) = 0$

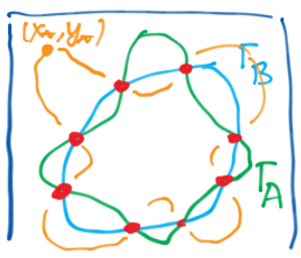
$\underbrace{[\lambda_0:\lambda_1]}_{\text{однородные координаты}} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ← комплексная проективная прямая (напомним что это такое чуть позже)

$$[\lambda_0 : \lambda] = \left[\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} : 1\right] = \left[1 : \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}\right],$$ тогда: $\lambda = 0: \ \vec{X}^T B \vec{Y} = 0 \quad (\Gamma_B)$
$\lambda = \infty: \ \vec{X}^T A \vec{Y} = 0 \quad (\Gamma_A)$

• Для $(x_*, y_*) \in \mathbb{C}^2$, в общей ситуации $\exists!$ кривая Γ_λ которая через нее проходит,
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = -\frac{\vec{X}_*^T B \vec{Y}}{\vec{X}_*^T A \vec{Y}},$$ и тогда можно определить r_x, r_y, η, и т.д.

Важное замечание: есть базовые точки через которые проходят все кривые из пучка:

$\vec{X}^T A \vec{Y} = \vec{X}^T B \vec{Y} = 0$ таких точек, посчитанных с кратностью, будет 8 (Упражнение: докажите это)



В этих точках наше отображение не определено

Упражнение: Покажите, что
$$r_y : (x,y) \longmapsto \left(x, \frac{f_1(x) y - f_0(x)}{f_2(x) y - f_1(x)}\right),$$
где
$$\langle f_0(x), f_1(x), f_2(x) \rangle := (\vec{X}^T A) \times (\vec{X}^T B)$$
векторное произведение

• Мы построим отображение $QRT = \eta := r_x \circ r_y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, которое не определено в 8 базовых точках, это надо исправить. И еще, надо расширить отображение на компактификацию $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, что мы сейчас и сделаем.

Замечание: Если A и B симметричны, $A=A^T$ и $B=B^T$, можно определить корень (или половину) отображения QRT: $\eta = \varphi\circ\varphi$, где $\varphi = \sigma\circ r_y$, и где $\sigma:(x,y)\mapsto(y,x)$.

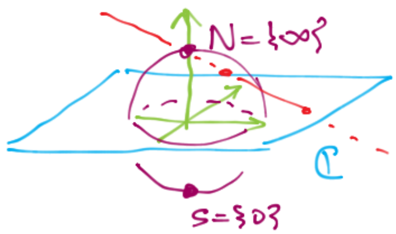
В несимметрическом случае (мы его не будем рассматривать), $\sigma:(x,y;A,B)\mapsto(y,x;A^T,B^T)$.

$$\varphi : \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{f_1(x)y - f_0(x)}{f_2(x)y - f_1(x)} \\ \bar{y} = x \end{cases} \qquad \langle f_0(x), f_1(x), f_2(x)\rangle = (\vec{x}^TA)\times(\vec{x}^TB)$$

Далее мы предполагаем что $A^T=A$, $B^T=B$, и сосредоточимся на отображении φ.

• Некоторые Технические Замечание

• $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ = комплексная проективная прямая = сфера Римана :

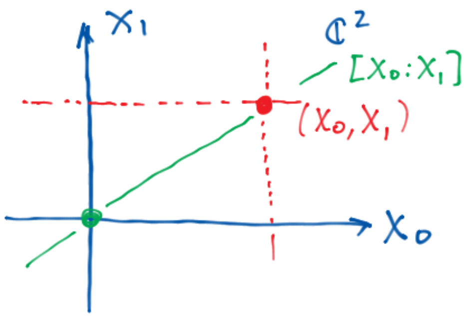


— одноточечная компактификация $\mathbb{C}$ (добавили $\{\infty\}$)

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2-\{(0,0)\}/\sim$$

$\mathbb{C}^2-\{(0,0)\} \ni (X_0,X_1)$ $\qquad (X_0,X_1)\sim(X_0',X_1') \iff X_0X_1' = X_0'X_1 \iff (X_0',X_1') = (\mu X_0, \mu X_1)$, $\mu\in\mathbb{C}-\{0\}$

Однородные координаты: $[X_0:X_1] = [\underbrace{x:1}_{X_1\neq 0}] = [\underbrace{1:X}_{X_0\neq 0}]$ $\qquad X = \frac{1}{x} \qquad X=0 \leftrightarrow x=\infty$



$x = \dfrac{X_0}{X_1} \qquad X = \dfrac{X_1}{X_0}$ } "угол наклона"

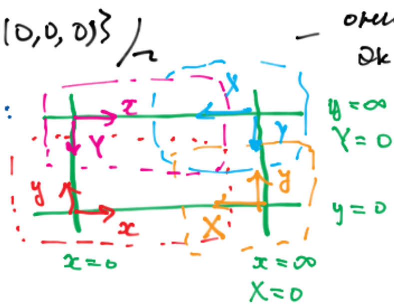
— параметризация всех прямых через $(0,0)$ на $\mathbb{C}^2$

• В отличие от $\mathbb{C}$, у $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ есть разные компактификации:

$\underbrace{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ <-------> $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3-\{(0,0,0)\}/\sim$ — они бирационально эквивалентны. (покажем позже)

нам удобнее работать с этой компактификацией :

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:



4 карты:

(X,y) $\quad (X,Y)$

(x,y) $\quad (X,y)$

• Дивизоры и их классы

– На $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$: $\mathrm{Div}(\mathbb{P}^1) := \left\{ D = \sum_{i,\,finite} a_i \{p_i\} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{Z} \\ p_i \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \{p_i\} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \}$

Например: $D = 3\{-2\} - 5\{i\} + \{1.37 - i\sqrt{5}\} + \{\infty\}$

Есть важное отображение: Рациональные (мероморфные) функции $\longrightarrow$ Дивизоры $\quad f \mapsto (f) =$ "нули" – "полюса"

Пример: $f(x) = 3\,\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-i)(x+4)(x-3)} \mapsto (f) = 2\{1\} + 1\{-2\} - 1\cdot\{i\} - 1\cdot\{-4\} - 1\cdot\{3\}$

Дивизоры рац. функций называются **главными** (principal), они образуют подгруппу $P(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \triangleleft \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$.

Важное замечание: обычно функции задаются в одной аффинной карте (то есть в переменной x), для вычисления дивизора надо эту функцию переписать во всех картах:

$$f(x) = x(x+1) \longleftrightarrow f\left(X = \tfrac{1}{x}\right) = \frac{1(1+X)}{X^2} \qquad \text{Тогда: } (f) = \{0\} + \{-1\} - 2\{\infty\}\,!$$

Степень дивизора: $\deg D := \sum_i a_i \qquad \deg(f) = 0$

Поэтому иногда удобно работать в однородных координатах: $f: \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ задается $f([x_0 : x_1]) = [\underbrace{P(x_0, x_1) : Q(x_0, x_1)}_{\text{взаимно простые формы одной степени}}]$

В нашем примере: $f(x) = x(x+1) \rightsquigarrow \dfrac{x_0}{x_1}\left(\dfrac{x_0}{x_1} + 1\right) = \dfrac{x_0(x_0 + x_1)}{x_1^2} \rightsquigarrow f([x_0 : x_1]) = [x_0(x_0+x_1) : x_1^2]$

Тогда: $(f) = \{[0:1]\} + \{[-1:1]\} - 2\{[1:0]\} = \{0\} + \{-1\} - 2\{\infty\}$

По (f) мы можем восстановить f с точностью до пропорциональности

$D = 2\{-1\} - \{3\} - \{i\} \quad \deg D = 0 \rightsquigarrow f = c\,\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)(x-i)}$

• Классы дивизоров: $Cl(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) := \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) / P(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) / \sim \;\simeq \mathbb{Z}\{\infty\}$

отношение линейной эквивалентности

$D_1 \sim D_2 \iff \exists$ рац. f: $D_1 - D_2 = (f) \qquad [D_i] = \mathcal{D}_i \;;\; D = \{5\} \notin P(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \qquad \{5\} \sim \{\infty\}$

• Общее определение: $X =$ алгебраическое многообразие (algebraic variety)

$\mathrm{Div}(X) := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{$ неприводимые алг. подмногообразия X коразмерности 1 $\}$ (т.е., в нашем двумерном случае - неприв. кривые)

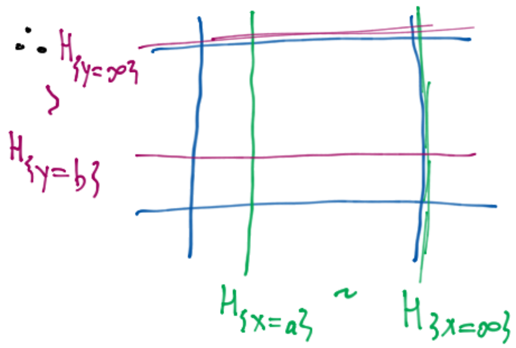
$P(X) =$ главные дивизоры $= \{(f) \mid f \in \mathbb{K}(X) = \mathbb{C}(X)$ - рац. функции$\}$

$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Div}(X)/P(X)$ Ref.: И.Р. Шафаревич "Основы Алгебраической Геометрии"

• Нас интересует случай $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. В этом случае, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ совпадает с так-называемой решеткой Пикара для $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, мы примем это за определение: $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) := \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})/P(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \simeq H^2(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z})$

Рац. функции на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$: $\sum_i f_i(x) g_i(y) = \sum_i \frac{P_i(X_0:X_1)}{Q_i(X_0:X_1)} \cdot \frac{R_i(Y_0:Y_1)}{S_i(Y_0:Y_1)}$ (в однородных координатах)

Примеры главных дивизоров: $f(x,y) = x - a = \frac{X_0 - aX_1}{X_1} \Rightarrow (f) = \{x=a\} - \{x=\infty\}$



Класс верт. прямых $= \mathcal{H}_x = [H_{\{x=a\}}]$

Класс гор. прямых $= \mathcal{H}_y = [H_{\{y=b\}}]$

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y\}$$

Пример: $D = \{V(y^2 - x)$ в карте (x,y) + замыкание$\}$ (не главный дивизор!)

$$f(x,y) = y^2 - x = \frac{Y_0^2}{Y_1^2} - \frac{X_0}{X_1} = \frac{X_1 Y_0^2 - X_0 Y_1^2}{X_1 Y_1^2} = \underset{\text{in } (x,y)}{y^2 - x} = \underset{\text{in } (X,y)}{\frac{Xy^2 - 1}{X}} = \underset{\text{in } (x,Y)}{\frac{1 - xY^2}{Y^2}} = \underset{\text{in } (X,Y)}{\frac{X - Y^2}{XY^2}}$$

$(f) = D - H_{\{x=\infty\}} - 2H_{\{y=\infty\}}$ ∴ $D \sim H_x + 2H_y$ $[D] = \mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y$, что соответствует bi-deg$(f) = (1,2)$ и т.д.

• Форма пересечения на $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$: определяется на базисных классах + линейность.

$\mathcal{H}_x \cdot \mathcal{H}_y = 1$

$\mathcal{H}_x \cdot \mathcal{H}_x = 0$

$\mathcal{H}_y \cdot \mathcal{H}_y = 0$

$(2\mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y) \cdot (2\mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y) = 8 = \#$ базисных точек!

• Пример отображения QRT: $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}1&\alpha&1\\ \alpha&0&-\alpha\\1&-\alpha&1\end{bmatrix}$ $\quad \alpha=a+a^{-1}$, $a\neq 0,\pm1$.

$\vec{X}^T A \vec{Y} = xy = X_0X_1Y_0Y_1$ в одн. коорд.

$$= [X_0^2\ \ X_0X_1\ \ X_1^2]\ A \begin{bmatrix}Y_0^2\\Y_0Y_1\\Y_1^2\end{bmatrix}$$

$$\vec{X}^T B \vec{Y} = x^2y^2+\alpha(x^2y+xy^2)+(x^2+y^2)-\alpha(x+y)+1$$
$$= \left(xy+a^{-1}(x+y)-1\right)\left(xy+a(x+y)-1\right)$$

Замечание: обе базисные кривые в этом случае вырождены

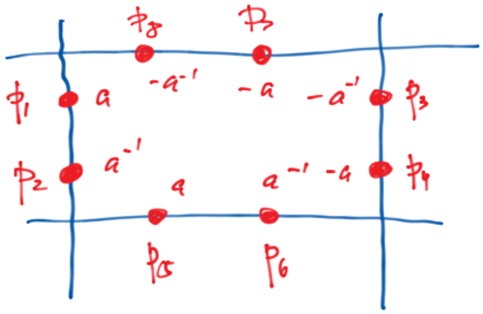
Базисные точки:

$$\begin{cases} X_0X_1Y_0Y_1=0 \\ (X_0Y_0+a^{-1}(X_0Y_1+X_1Y_0)-X_1Y_1)(X_0Y_0+a(X_0Y_1+X_1Y_0)-X_1Y_1)=0 \end{cases}$$

$X_0=0$ $(x=0)$ $\quad X_1(a^{-1}Y_0-Y_1)=0$ или $X_1(aY_0-Y_1)=0$

$(\therefore X_1\neq0)$

$(0,a)$ или $(0,1/a)$ и т.д.



(все симметрично по x и y)

• Динамика

$$\varphi: \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})} = \dfrac{Y(x-a)(x-a^{-1})}{(x+a)(x+a^{-1})} \\ \bar{y} = x \end{cases}$$

Базисные точки: $(a,0)$ $(a^{-1},0)$ $(-a,\infty)$ $(-a^{-1},\infty)$ $\quad \frac{0}{0}$

Где ещё четыре точки? — обратная динамика.

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} \underline{x} = y \\ \underline{y} = \dfrac{(y-a)(y-a^{-1})}{x(y+a)(y+a^{-1})} \end{cases} \quad \sim r_y\circ\sigma = \sigma\circ r_x$$

Базисные точки: $(0,a)$ $(0,a^{-1})$ $(\infty,-a)$ $(\infty,-a^{-1})$ $\quad \frac{0}{0}$

Q: Как исправить неопределенность отображения в базовых точках?

A: Поменять область определений/значений с помощью процедуры раздутия (blow-up или σ-процесс)

$\mathcal{X} \ni \Gamma_\lambda$ - элл. кривая
$\downarrow$
$\mathbb{P}^1 \ni [\lambda_0:\lambda_1]$

Результат: QRT - поверхность $\mathcal{X}$ = рациональная эллиптическая поверхность где φ - автоморфизм сохр. слои

• Процедура раздутия (стандартная процедура разрешения особенностей)

Нам понадобится простейший вариант процедуры раздутия — точки на поверхности. Мы опишем локальную конструкцию, для нас ее достаточно

• Координатное описание : С координатной точки зрения, раздутие в точке (x_0,y_0) есть просто замена координат:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= u + x_0 = UV + x_0 \\ y &= uv + y_0 = V + y_0 \end{aligned}}$$

$u = x - x_0,\ v = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, $x \neq x_0$

$V = y - y_0,\ U = \dfrac{x-x_0}{y-y_0}$, $y \neq y_0$

карта (x,y) ⤳ две карты (u,v) (U,V)

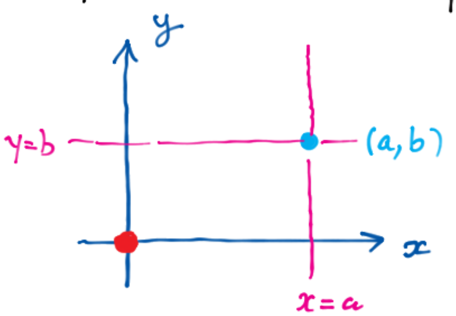
Такая замена "помогает" избавиться от неопределенностей вида $0/0$, как в нашем примере: $\bar{x}$ в точке $(a,0)$:

неопределенность

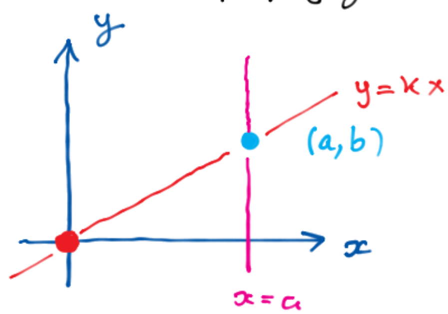
$$\bar{x} = \frac{(x-a)}{y}\,\frac{(x-a^{-1})}{(x+a)(x+a^{-1})} = \frac{\cancel{u}}{\cancel{u}v}\,\frac{(u+a-a^{-1})}{(u+2a)(u+a+a^{-1})} = U\,\frac{(UV+a-a^{-1})}{(UV+2a)(UV+a+a^{-1})}$$

• Для нас будет важно описание этой процедуры с геометрической точки зрения

Предположим для простоты что центр раздутия $(x_0,y_0) = (0,0)$.

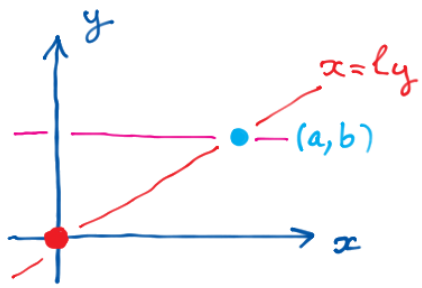


Точка (a,b) лежит на пересечении координатных линий $\{x=a\}$ и $\{y=b\}$



Точка (a,b) лежит на пересечении $\{x=a\}$ и прямой через $(0,0)$ и (a,b) с углом наклона $k=\frac{b}{a}$ к оси x; $y = kx$

При $(a,b) \neq (0,0)$ и $a \neq 0$ такая прямая единственна



Точка (a,b) лежит на пересечении $\{y=b\}$ и прямой $x = ly$ с углом наклона $l = \frac{a}{b}$, $(a,b) \neq (0,0)$, $b \neq 0$

Координаты: $(x,y;k)$

(x,y) (x,k) (y,l); $lk=1$

• Более аккуратно:

$S \subset (\mathbb{C}\times\mathbb{C})\times\mathbb{P}^1$

$(x,y;[\zeta_0:\zeta_1])$

$S = \{(x,y;[\zeta_0:\zeta_1]) \mid x\zeta_0 = y\zeta_1\}$

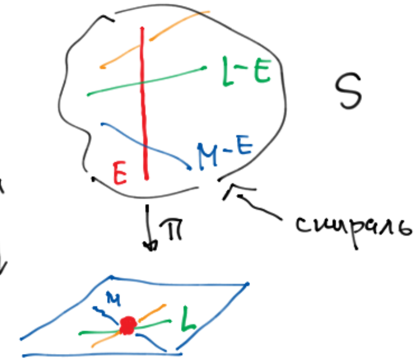
$y = \frac{\zeta_0}{\zeta_1}x = kx$ $\zeta_1 \neq 0$ $l = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$ $\zeta_0 \neq 0$

Две карты (от двух карт на $\mathbb{P}^1$)

Тогда:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 & \supset & S\\ \downarrow \pi & (x,y,[\xi_0:\xi_1]) \mapsto (x,y) & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}\times\mathbb{C} & & \mathbb{C}\times\mathbb{C}\end{array}$$

биекция вне $(0,0)$



$$\pi^{-1}(a,b) = \begin{cases} (a,b;[b:a]) & (a,b)\neq(0,0) \\ (0,0;[\xi_0:\xi_1]) = E & \text{– exceptional fiber (специальный дивизор)} \end{cases}$$

раздутие разделяет прямые через центр "поднимая" их на разную высоту в зависимости от угла наклона

Важное замечание: полный (теоретико-множественный) прообраз неприводимой кривой C проходящей через центр раздутия состоит из двух неприводимых компонент: специального дивизора E и собственного прообраза $\overline{\pi^{-1}(C-\{0,0\})}$. Собственный прообраз обозначается $C-E$ и, несмотря на знак $-$, является эффективным ("геометрическим") дивизором.

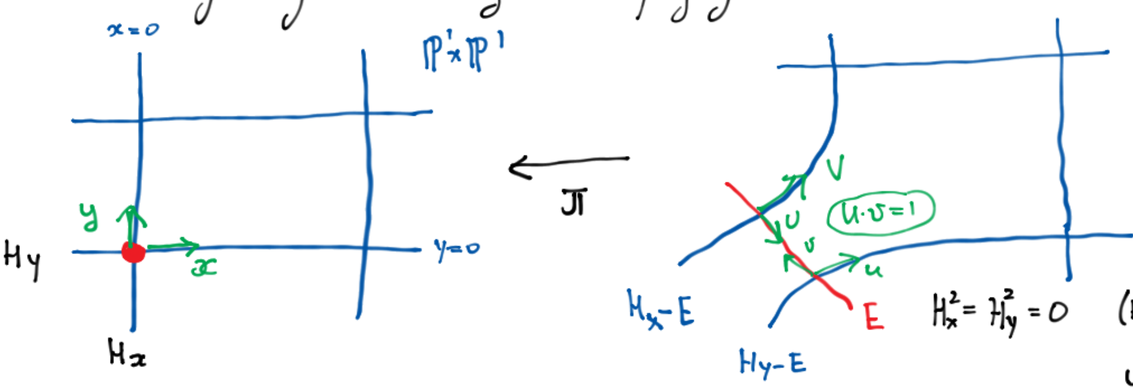
Заметим что, если прямые (или кривые) L и M пересекаются в центре раздутия, $L\bullet M=1$, то их собственные прообразы $(L-E)$ и $(M-E)$ на раздутой поверхности не пересекаются, $(L-E)\bullet(M-E)=0$. Накладывая требование линейности на индекс пересечения, $(L-E)\bullet(M-E) = \underbrace{L\bullet M}_{1} - \underbrace{E\bullet M}_{0} - \underbrace{L\bullet E}_{0} + E\bullet E = 0$, приходим к требованию $E\bullet E=-1$.

можно взять представителя в классе L и M не прох. через точку раздутия

Немного наивно, это означает что у специального дивизора "нет деформаций"; мы не можем его "пошевелить" и получить другой представитель класса E пересекающий специальный дивизор трансверсально. (У нормального расслоения нет сечений) (См. Шафаревич, ОАГ)

Если $M\bullet M=k$, то $(M-E)\bullet(M-E)=k-1$, и т.д.

- Нам будет удобно обозначать раздутие точки на плоскости такой картинкой:



$$\left(\begin{array}{l} x = u = UV \\ y = uv = V \end{array}\right)$$

$H_x^2 = H_y^2 = 0 \qquad (H_x-E)^2 = (H_y-E)^2 = -1$

$\mathcal{H}_x\cdot\mathcal{H}_y = 1 \qquad \mathcal{E}_i\cdot\mathcal{E}_i = -1$

Если $\mathcal{X} = Bl_{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$, $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_y,\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n\}$

$\mathcal{H}_x^2 = \mathcal{H}_y^2 = \mathcal{H}_x\cdot\mathcal{E}_i = \mathcal{H}_y\cdot\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i\cdot\mathcal{E}_j = 0, \; i\neq j$

• Раздувая базовые точки для отображения QRT мы получим $\mathcal{X}=Bl_{p_1,\dots,p_8}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ называющуюся <u>поверхностью QRT</u>. Эта поверхность "расслаивается" на эллиптические кривые (возможно вырожденные) из нашего пучка, которые уже не пересекаются:

$$\begin{array}{c}\mathcal{X}\\ \downarrow\\ \mathbb{P}^1_\lambda\end{array}$$ ← параметр пучка

· Такие поверхности называются рациональными эллиптическими поверхностями

· Отображение QRT сохраняет это слоение, т.е., параметр пучка λ является <u>законом сохранения</u> для QRT-динамики.

Отображение QRT индуцирует отображение на $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$.

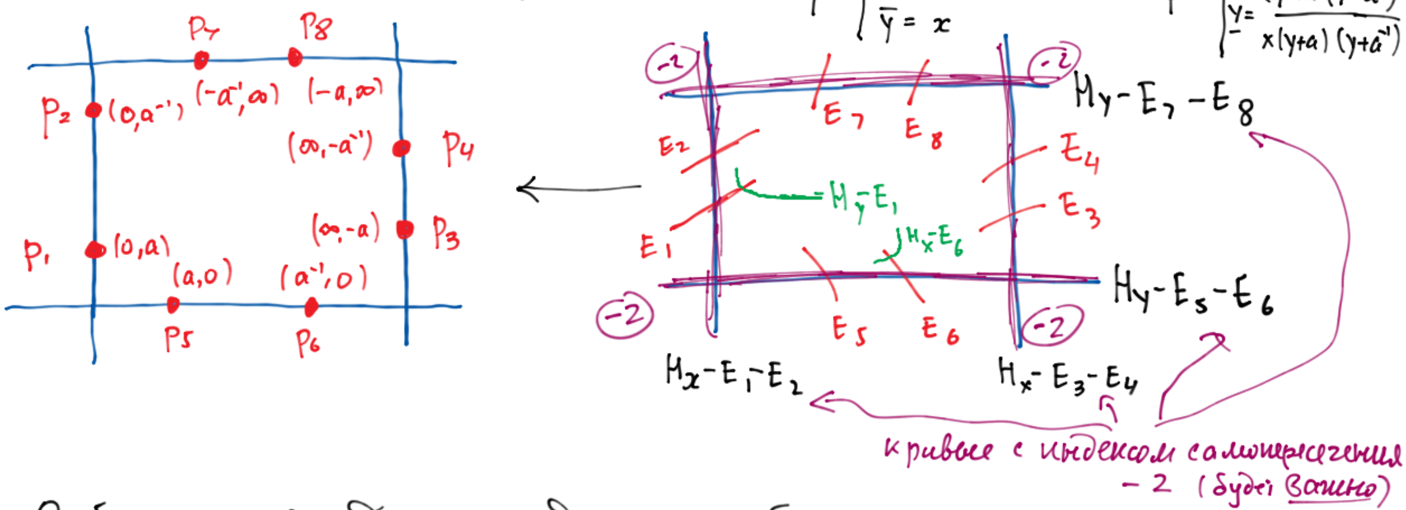
Пусть $QRT=\eta:\mathcal{X}\longrightarrow\bar{\mathcal{X}}=\mathcal{X}$ ← для удобства, означает область значений (range) отображения. Тогда:

$\eta_*:\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\longrightarrow\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{X}})$ — геометрическое отображение заданное на дивизорах Вейля (подмногообразия коразмерности 1)

$\eta^*:\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{X}})\longrightarrow\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ — функциональное отображение заданное на дивизорах Картье (подмногообразий заданных локально одним уравнением)

В гладком случае, как у нас, понятия дивизоров Вейля и Картье совпадают и $\eta^*=\eta_*^{-1}$

• В нашем примере, для отображения φ, $QRT=\eta=\varphi^2$, $\varphi:\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})}\\ \bar{y}=x\end{cases}$ $\varphi^{-1}:\begin{cases}\underline{x}=y\\ \underline{y}=\dfrac{(y-a)(y-a^{-1})}{x(y+a)(y+a^{-1})}\end{cases}$



Лемма Отображение φ индуцирует следующие отображения:

$$\varphi_*:\quad \mathcal{H}_x\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y\quad \mathcal{H}_y\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4\quad \mathcal{E}_1\mapsto\bar{\mathcal{E}}_6\quad \mathcal{E}_2\mapsto\bar{\mathcal{E}}_5\quad \mathcal{E}_3\mapsto\bar{\mathcal{E}}_8\quad \mathcal{E}_4\mapsto\bar{\mathcal{E}}_7$$
$$\mathcal{E}_5\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1\quad \mathcal{E}_6\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_2\quad \mathcal{E}_7\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_3\quad \mathcal{E}_8\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_4$$

$$\varphi^*:\quad \bar{\mathcal{H}}_x\longrightarrow2\mathcal{H}_x+\mathcal{H}_y-\mathcal{E}_5-\mathcal{E}_6-\mathcal{E}_7-\mathcal{E}_8\quad \bar{\mathcal{H}}_y\mapsto\mathcal{H}_x\quad \bar{\mathcal{E}}_1\mapsto\mathcal{H}_x-\mathcal{E}_5\quad \bar{\mathcal{E}}_2\mapsto\mathcal{H}_x-\mathcal{E}_6$$
$$\bar{\mathcal{E}}_3\mapsto\mathcal{H}_x-\mathcal{E}_7\quad \bar{\mathcal{E}}_4\mapsto\mathcal{H}_x-\mathcal{E}_8\quad \bar{\mathcal{E}}_5\mapsto\mathcal{E}_2\quad \bar{\mathcal{E}}_6\mapsto\mathcal{E}_1\quad \bar{\mathcal{E}}_7\mapsto\mathcal{E}_4\quad \bar{\mathcal{E}}_8\mapsto\mathcal{E}_3$$

<u>Упражнение:</u> Доказать это. Проверить, что $\varphi^*=(\varphi_*)^{-1}$ $\left(\mathrm{Pic}(\mathcal{X})=\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{X}})\right)$

Как такое считать:
$$\varphi:\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})}\\ \bar{y}=x\end{cases}$$

$\bar{y}=x$!

$$\varphi_*(\mathcal{H}_y)=\left[\varphi_*\left(\substack{y-k=0\\ k\neq 0,\infty}\right)\right]=\Big[\{\underbrace{k(\bar{y}+a)(\bar{y}+a^{-1})\bar{x}-(\bar{y}-a)(\bar{y}-a^{-1})=0}\}\Big]=\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4$$

(1,2) - кривая проходящая через точки p_1,p_2,p_3,p_4 на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$

класс собств. пр.

$$\varphi^*(\bar{\mathcal{H}}_x)=\left[\varphi^*(\bar{x}=k,\ k\neq 0,\infty)\right]=\left[\{ky(x+a)(x+a^{-1})-(x-a)(x-a^{-1})=0\}\right]=2\mathcal{H}_x+\mathcal{H}_y-\mathcal{E}_5-\mathcal{E}_6-\mathcal{E}_7-\mathcal{E}_8$$

$$\varphi_*(\mathcal{E}_5)=\left[\varphi(u_5=0,v_5)\right]=\left[\left(\frac{\cancel{u_5}(u_5+a-a^{-1})}{\cancel{u_5}v_5(u_5+2a)(u_5+a+a^{-1})},\ u_5+a\right)\right]\Big|_{u_5=0}=\left[\left(\frac{1}{v_5}\frac{(a-a^{-1})}{2a(a+a^{-1})},\ a\right)\right]$$

$p_5(a,0)$: $x=u_5+a$ $y=u_5v_5$ вce x парамeтр. v_5 $\quad y=a$

$$=\left[\{y-a=0\}\right]=\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1$$

Упр. Проверить в: $x=U_5V_5+a$ $y=V_5$

Замечание: Индекс самопересечения при этом отображении сохраняется, что удобно для проверки формул задающих отображение

- Вернемся теперь к отображению $QRT=\varphi^2$:

в автономном случае $\bar{a}=a$, но нам удобно их различать

$$\varphi^2:\begin{cases}\bar{\bar{x}}=\dfrac{(\bar{x}-\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}^{-1})}{\bar{y}(\bar{x}+\bar{a})(\bar{x}+\bar{a}^{-1})}\\ \bar{\bar{y}}=\bar{x}=\dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})}\end{cases}$$

подставить $\bar{x}=\bar{y}$ $\Rightarrow \eta=\varphi^2$:
$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{(\bar{y}-\bar{a})(\bar{y}-\bar{a}^{-1})}{x(\bar{y}+\bar{a})(\bar{y}+\bar{a}^{-1})}\\ \bar{y}=\dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})}\end{cases}$$

переименуем заменив $\bar{\bar{y}}$ на $\bar{y}$, и т.д.

- Деавтономизация этого отображения QRT дает q-разностное уравнение q-P_{VI} (детали позже):
$$\psi:\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\bar{b}_7\bar{b}_8}{x}\dfrac{(\bar{y}-\bar{b}_1)(\bar{y}-\bar{b}_2)}{(\bar{y}-\bar{b}_3)(\bar{y}-\bar{b}_4)}\\ \bar{y}=\dfrac{b_3b_4}{y}\dfrac{(x-b_5)(x-b_6)}{(x-b_7)(x-b_8)}\end{cases},$$

с определенными законами эволюции параметров $b_i\mapsto\bar{b}_i$

Упр. Найти условие при которых через точки $p_1(0,b_1)$, $p_2(0,b_2)$, $p_3(\infty,b_3)$, $p_4(\infty,b_4)$, $p_5(b_5,0)$, $p_6(b_6,0)$, $p_7(b_7,\infty)$, $p_8(b_8,\infty)$ проходит пучок биквадратичных кривых.

Лемма Отображение $QRT=\eta=\varphi^2$ индуцирует следующее отображение на $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$

(Упр. Докажите это и найдите формулу для η^*)

$\eta_*:\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\to\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{X}})$
$$\mathcal{H}_x\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4$$
$$\mathcal{H}_y\mapsto 2\bar{\mathcal{H}}_x+5\bar{\mathcal{H}}_y-2\bar{\mathcal{E}}_1-2\bar{\mathcal{E}}_2-2\bar{\mathcal{E}}_3-2\bar{\mathcal{E}}_4-\bar{\mathcal{E}}_5-\bar{\mathcal{E}}_6-\bar{\mathcal{E}}_7-\bar{\mathcal{E}}_8$$

$\mathcal{E}_1\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_2$, $\mathcal{E}_2\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1$, $\mathcal{E}_3\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_4$, $\mathcal{E}_4\mapsto\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_3$, $\mathcal{E}_5\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4-\bar{\mathcal{E}}_6$,

$\mathcal{E}_6\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4-\bar{\mathcal{E}}_5$, $\mathcal{E}_7\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4-\bar{\mathcal{E}}_8$, $\mathcal{E}_8\mapsto\bar{\mathcal{H}}_x+2\bar{\mathcal{H}}_y-\bar{\mathcal{E}}_1-\bar{\mathcal{E}}_2-\bar{\mathcal{E}}_3-\bar{\mathcal{E}}_4-\bar{\mathcal{E}}_7$

• q-разностное уравнение $q\text{-}P_{VI} = q\text{-}P(A_3^{(1)}/D_5^{(1)})$ [M. Jimbo, H. Sakai '96]

$b_1, \dots, b_8$ – комплексные параметры (в общем положении) $\quad q := \dfrac{b_3 b_4 b_5 b_6}{b_1 b_2 b_7 b_8}$

(f,g) – координаты на аффинной карте $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ (потом объясним, почему)

– используем (x,y) в автономном и (f,g) в неавтономном случае

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \Big) \longmapsto \Big(\begin{matrix} \bar b_1 = q b_1 & \bar b_2 = q b_2 & \bar b_3 = b_3 & \bar b_4 = b_4 \\ \bar b_5 = q b_5 & \bar b_6 = q b_6 & \bar b_7 = b_7 & \bar b_8 = b_8 \end{matrix} ; \bar f, \bar g \Big),$$

где $\bar f, \bar g$ задаются уравнениями $\quad \psi: \begin{cases} \bar f = \dfrac{b_7 b_8}{f} \dfrac{(\bar g - \bar b_1)(\bar g - \bar b_2)}{(\bar g - \bar b_3)(\bar g - \bar b_4)} \\ \bar g = \dfrac{b_3 b_4}{g} \dfrac{(f - b_5)(f - b_6)}{(f - b_7)(f - b_8)} \end{cases}$

Упр. Покажите, что базовые точки отображения ψ, это

$p_1(0, b_1)$, $p_2(0, b_2)$, $p_3(\infty, b_3)$, $p_4(\infty, b_4)$, $p_5(b_5, 0)$, $p_6(b_6, 0)$, $p_7(b_7, \infty)$, $p_8(b_8, \infty)$

(Указание: разложите ψ в композицию $(f,g) \longmapsto (f, \bar g) \longmapsto (\bar f, \bar g)$)

• Продолжив ψ на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ и раздув базовые точки, мы получим семейство поверхностей $\mathcal{X}_{\mathbf{b}}$ ← здесь $\mathbf{b}$ – множество параметров описывающих конфигурацию точки раздутия, пока можно думать что $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_8\}$, но на самом деле надо будет профакторизовать по действию группы Мёбиуса $PGL(2)\times PGL(2)$ калибровочных преобразований на координатных осях

и отображение $\psi: \mathcal{X}_{b} \to \mathcal{X}_{\bar b}$

отображение ψ неавтономно $\quad \mathcal{X}_b \neq \mathcal{X}_{\bar b}$ но $\mathcal{X}_b \simeq \mathcal{X}_{\bar b}$

Лемма Отображение $\psi: \mathcal{X}_b \to \mathcal{X}_{\bar b}$ индуцирует отображение $\psi_*: \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_b) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\bar b})$:

$\mathcal{H}_f \mapsto \bar{\mathcal{H}}_f + 2\bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 - \bar{\mathcal{E}}_3 - \bar{\mathcal{E}}_4$, $\mathcal{H}_g \mapsto 2\bar{\mathcal{H}}_f + 5\bar{\mathcal{H}}_g - 2\bar{\mathcal{E}}_1 - 2\bar{\mathcal{E}}_2 - 2\bar{\mathcal{E}}_3 - 2\bar{\mathcal{E}}_4 - \bar{\mathcal{E}}_5 - \bar{\mathcal{E}}_6 - \bar{\mathcal{E}}_7 - \bar{\mathcal{E}}_8$

$\mathcal{E}_1 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_2$, $\mathcal{E}_2 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1$, $\mathcal{E}_3 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_4$, $\mathcal{E}_4 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_3$, $\mathcal{E}_5 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_f + 2\bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 - \bar{\mathcal{E}}_3 - \bar{\mathcal{E}}_4 - \bar{\mathcal{E}}_6$

$\mathcal{E}_6 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_f + 2\bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 - \bar{\mathcal{E}}_3 - \bar{\mathcal{E}}_4 - \bar{\mathcal{E}}_5$, $\mathcal{E}_7 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_f + 2\bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 - \bar{\mathcal{E}}_3 - \bar{\mathcal{E}}_4 - \bar{\mathcal{E}}_8$, $\mathcal{E}_8 \mapsto \bar{\mathcal{H}}_f + 2\bar{\mathcal{H}}_g - \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 - \bar{\mathcal{E}}_3 - \bar{\mathcal{E}}_4 - \bar{\mathcal{E}}_7$.

(Совпадает с отображением QRT на уровне решетки Пикара)

Упр. Докажите это прямым вычислением (можно использовать CAS, напр. Mathematica)

- Все точки раздутия в наших примерах лежали на единственной (2,2)-кривой (в случае Пенлеве) или пучке таких кривых (в случае QRT). Такая кривая принадлежит классу антиканонического дивизора $-K_X \in Pic(X)$. Это один из основных объектов геометрического подхода к теории дискретных уравнений Пенлеве, который мы сейчас определим.

- Класс канонического дивизора $K_X := [(\omega)]$, где $\omega \in \Omega^2(X)$ - дифференциальная форма старшей степени (в нашем случае - 2-форма) на X.

- Посчитаем класс K_X в нашем случае в локальных картах. Заметим, что если h = рац. функция на X а ω - старшая форма, $[h \cdot \omega] = [h] + [\omega]$
0 т.к. главный дивизор

Поэтому для вычисления возьмем $\omega = df \wedge dg$ и перепишем её в разных картах: $F = 1/f$, $G = 1/g$, $\begin{matrix} f = u + f_i \\ g = uv + g_i \end{matrix}$ где (f_i, g_i) - точка раздутия p_i :

$$\omega = df \wedge dg = -\frac{dF \wedge dg}{F^2} = -\frac{df \wedge dG}{G^2} = \frac{dF \wedge dG}{F^2 G^2} = u\, du \wedge dv = \ldots$$

Из этого вычисления видно что $(\omega) = -2H_{f=\infty} - 2H_{g=\infty} + E_1 + \cdots + E_8$

$\therefore\ -K_X = 2H_f + 2H_g - E_1 - \cdots - E_8$ Замечание: $-K_X^2 = 0$

Опр. Пусть D - эффективный дивизор на X и пусть $D = \sum m_i D_i$ $m_i > 0$ - разложение D на неприводимые компоненты. Тогда D называется дивизором канонического типа если $K_X \cdot D_i = K_X \cdot D = 0$ $\forall i$

- В случае QRT, $\dim |-K_X| > 0$ и $-K_X$ - дивизор канонического типа
линейная система или сечение анти-канонического расслоения, в случае QRT - пучок кривых

Поверхности QRT, то есть, рациональные эллиптические поверхности удовлетворяющие этим условиям, называются поверхностями Халфена (?) (Halphen surface)

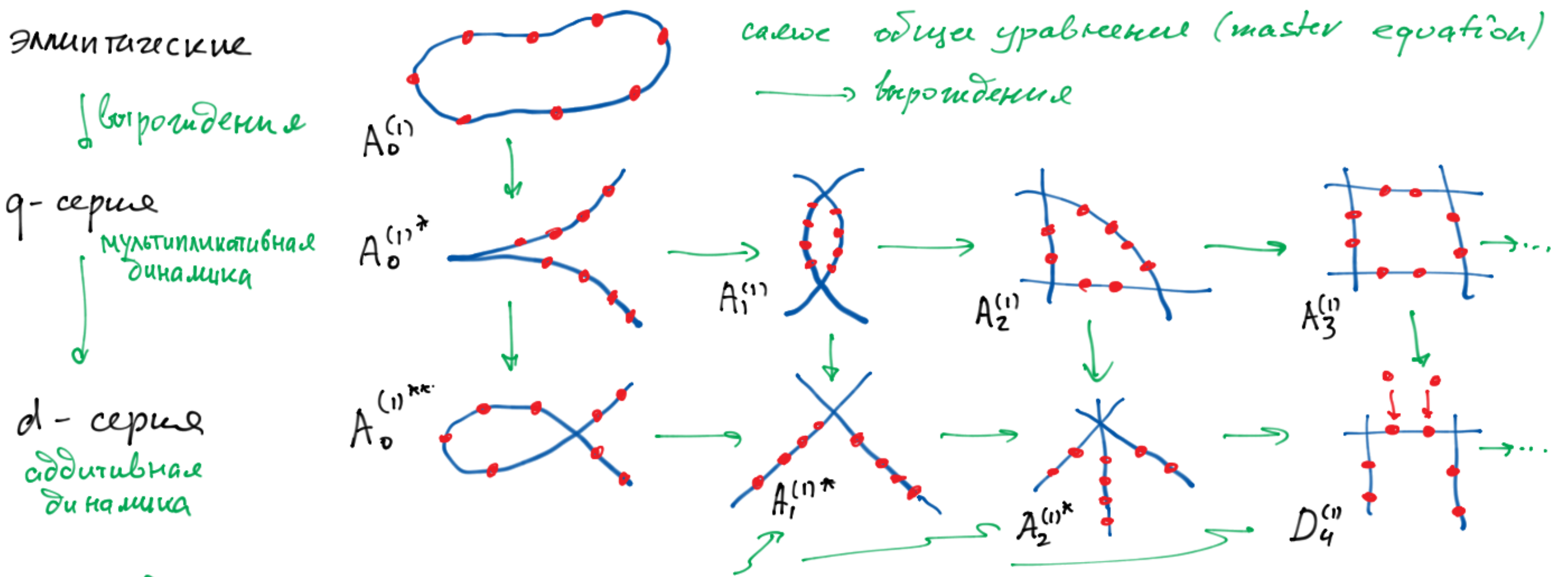
- Опр. Гладкая проективная рациональная поверхность X с анти-каноническим дивизором канонического типа называется обобщенной поверхностью Халфена

QRT: $\dim |-K_X| = 1$ (пучок)

Пенлеве: $\dim |-K_X| = 0$ ← единственная кривая $-K_X = \sum m_i D_i$

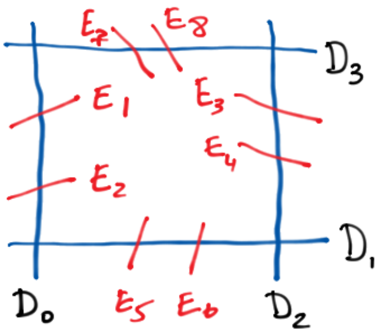
D_i = неприв. компоненты на которых лежат особые точки ← информация о типе поверхности (классификация)

• Общая схема Сакаи (H. Sakai) классификации дискретных уравнений Пенлеве по типу поверхности (всего $\underline{22}$ разных типа):

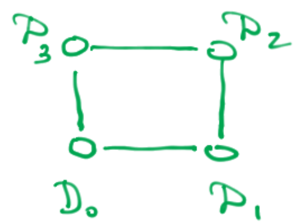


тип <u>диаграммы</u> <u>Дынкина</u> описывающий конфигурацию точек

• В нашем примере:

$\mathcal{X}_b =$ 

$$D_0 = H_f - E_1 - E_2$$
$$D_1 = H_g - E_5 - E_6$$
$$D_2 = H_f - E_3 - E_4$$
$$D_3 = H_g - E_7 - E_8$$



Такая диаграмма называется аффинной диаграммой Дынкина типа $A_3^{(1)}$,

○ обозначает что $D_i^2 = -2$

○—○ (D_i D_j) обозначает $D_i \cdot D_j = 1$

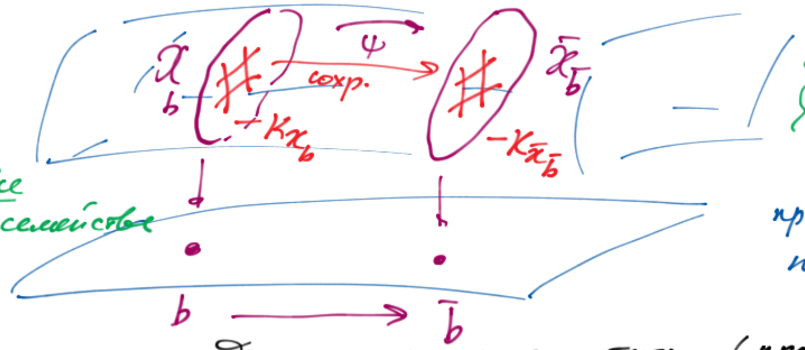
<u>Замечание.</u> При разложении $-K_{\mathcal{X}} = \sum_i m_i D_i$ (более одной компоненты), D_i — неприводимые гладкие рациональные кривые, и из формулы для виртуального рода D_i следует что $D_i^2 = -1$

<u>Замечание.</u> В нашем случае точки раздутия лежат на дивизоре полюсов 2-формы $\omega = \frac{df \wedge dg}{fg} = -\frac{dF \wedge dg}{Fg} = -\frac{df \wedge dG}{fG} = \frac{dF \wedge dG}{FG}$. Это связано с наличием комплексной симплектической структуры в которой динамика Пенлеве является каноническим преобразованием; этот дивизор <u>сохраняется</u> <u>динамикой</u>.

<u>Замечание.</u> Динамика Пенлеве является <u>преобразованием</u> <u>Кремоны</u> (автоморфизмом поля $K(\mathcal{X}) = K(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$). Индуцирует <u>изометрию Кремоны</u> на $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$

• Общая схема динамики Пенлеве:

$\mathcal{X}_b \simeq \bar{\mathcal{X}}_{\bar b}$ (неверно что все поверхности в семействе изоморфны)



семейство $\{\mathcal{X}_b\}$ обобщенных поверхностей Халфена индекса 1

пространство модулей параметров b

динамика на параметрах (практически определяет уравнение)
(неавтономность!)

$$\psi_* : \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_b) \longrightarrow \operatorname{Pic}(\bar{\mathcal{X}}_{\bar b}) \simeq \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_b) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_g, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_8\}$$ – изометрия Кремоны:

(1) Сохраняет форму пересечения на $\operatorname{Pic}(\mathcal{X})$
(2) Сохраняет (анти) канонический класс (дивизор) $-\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$
(3) Сохраняет полугруппу $\operatorname{Pic}^+(\mathcal{X})$ эффективных (геометрических) классов дивизоров.

• В отличие от динамики QRT сохраняющей пучок кривых (которые могут быть разных типов), в динамике Пенлеве естественным образом возникают две важные подрешетки в решетке $\operatorname{Pic}(\mathcal{X})$ – решетка поверхности (геометрическая информация о конфигурации точек раздутия) и решетка симметрий (эта решетка, как будет показано дальше, кодирует динамику). А именно:

$$-\mathcal{K}_{\mathcal{X}} \in \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_b) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_f, \mathcal{H}_g, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_8\}$$ – решетка ранга 10

$\triangledown$ ← подрешетка

$-\mathcal{K}_{\mathcal{X}}^2 = 0$ – изотропный вектор для формы пересечений

$$-\mathcal{K}_{\mathcal{X}} \in (-\mathcal{K}_{\mathcal{X}})^{\perp}$$ – подрешетка ранга 9, оказывается что она всегда типа $E_8^{(1)}$

$$\Pi(R) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{D_i\} \cap \Pi(R^{\perp}) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_j\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(-\mathcal{K}_{\mathcal{X}})$$

$$R = \{D_1, \dots, D_k\} \qquad R^{\perp} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{10-k}\}$$

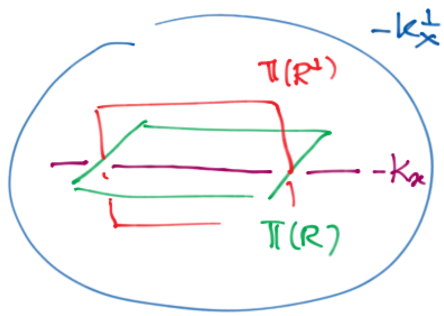
$$\boxed{\alpha_j \cdot D_i = 0 \quad \forall i, j}$$

решетка поверхности (конфигурации)

$D_i^2 = \alpha_j^2 = -2 \quad \therefore \quad D_i$ и α_j – корни (в терминологии групп отражений)

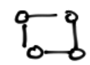
решетка симметрий (динамика)

Схематически:

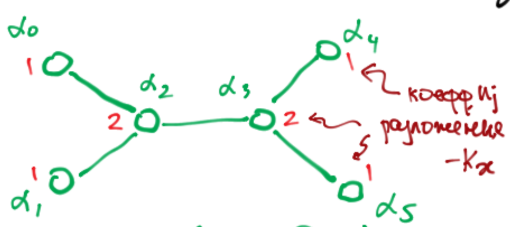


$$-\mathcal{K}_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{k} m_i D_i = \sum_{j=1}^{10-k} n_j \alpha_j$$

С системами корней R и $R^{\perp}$ связаны описывающие их диаграммы Дынкина и матрицы Картана $C=(c_{ij})$: для корней (в нашем случае корни это элементы решетки задающие некоторый специальный $\mathbb{Z}$-базис) r_i и r_j, условие $r_i^2=-2$ обозначается $\circ$, условие $r_i\cdot r_j=1$ обозначается $\underset{r_i}{\circ}\!\!-\!\!\underset{r_j}{\circ}$ (в нашем случае $r_i\cdot r_j=0$ или 1) и матрица Картана задается как $C_{ij}:=r_i\cdot r_j$, значит $C_{ii}=-2$ (часто под матрицей Картана понимают $-C$). Для детального описания этой терминологии и общего введения в теорию групп порожденных отражениями, групп Вейля и аффинных групп Вейля, см., например, лекции Е.Ю. Смирнова "Группы отражений и правильные многогранники" на ЛШСМ-2008 (МЦНМО 2009) или R. Kane "Reflection groups and and Invariant Theory" (Springer 2001).

- Для $R=\{D_0,D_1,D_2,D_3\}$ мы диаграмму Дынкина уже видели: , её матрица Картана $C_R=\begin{bmatrix}-2&1&0&1\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\1&0&1&-2\end{bmatrix}$. Из условия канонического типа, $-K_X\cdot D_i=0$, и $-K_X=\sum m_iD_i$, следует что $C\cdot\vec{m}=\vec{0}$, $\vec{m}=\langle 1,1,1,1\rangle$. То есть, $-K_X=D_0+D_1+D_2+D_3$, что легко проверить.

- Посчитаем теперь решетку симметрий $\Pi(R^{\perp})$. Из условия $\alpha_j\cdot D_i=0$ легко видеть, что корневой базис в этой решетке можно выбрать так: $R^{\perp}=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_5\}$, где $\alpha_0=\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_4$, $\alpha_1=\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2$, $\alpha_2=\mathcal{H}_g-\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3$, $\alpha_3=\mathcal{H}_f-\mathcal{E}_5-\mathcal{E}_7$, $\alpha_4=\mathcal{E}_5-\mathcal{E}_6$, $\alpha_5=\mathcal{E}_7-\mathcal{E}_8$.

Для $R^{\perp}$: 

(Эта диаграмма называется $D_5^{(1)}$)

$$C_{R^{\perp}}=\begin{bmatrix}-2&0&1&0&0&0\\0&-2&1&0&0&0\\1&1&-2&1&0&0\\0&0&1&-2&1&1\\0&0&0&1&-2&0\\0&0&0&1&0&-2\end{bmatrix}\qquad \vec{n}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\1\\1\end{bmatrix}\qquad C\vec{n}=\vec{0}$$

$\therefore\ -K_X=\sum_j n_j\alpha_j=\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ (что легко проверить)

• Мы поставили в соответствие нашему отображению $q\text{-}P_{VI}$ две подрешетки в решетке $E_8^{(1)} = -K_X^{\perp} \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$: решетку поверхности (типа $A_3^{(1)}$) и решетку симметрий $D_5^{(1)}$. Поэтому говорят тип уравнения $q\text{-}P_{VI}$ это $q\text{-}P(A_3^{(1)})$ или $q\text{-}P(A_3^{(1)}/D_5^{(1)})$.

Однако для полной характеристики уравнения этой информации не достаточно — нам надо посмотреть на действие индуцированного отображения $\eta_*: \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{X}})$ на этих решетках.

Упр. Покажите, что η_* действует на R и $R^{\perp}$ следующим образом:

$$\eta_*: \ \mathcal{D}_0 \leftrightarrow \mathcal{D}_2, \ \mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3 \ ; \quad \alpha_0 \mapsto \alpha_0, \ \alpha_1 \mapsto \alpha_1, \ \alpha_2 \mapsto \alpha_2 + \delta, \ \alpha_3 \mapsto \alpha_3 - \delta, \ \alpha_4 \mapsto \alpha_4, \ \alpha_5 \mapsto \alpha_5,$$

где $\delta = -K_X = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ - это класс анти-канонического дивизора.

Пусть $\vec{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle$ $\qquad \eta_*(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} + \underbrace{\langle 0,0,1,-1,0,0 \rangle}$ $(-K_X)$

(соответствует) $t \in T(\widetilde{W}(D_5^{(1)}))$ $\quad (C_{R^{\perp}} \cdot \vec{t} = \vec{0})$

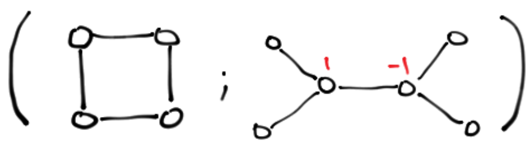
Здесь $T(\widetilde{W}(D_5^{(1)}))$ - это подгруппа переносов расширенной аффинной группы Вейля задаваемой диаграммой Дынкина $D_5^{(1)}$ (полное определение ниже).

Оказывается $t \in T$ полностью (вернее, с точностью до сопряжения/изоморфизма) характеризует нашу динамику! Подгруппа T бесконечна, соответственно существует бесконечно много неэквивалентных дискретных уравнений заданного типа.

Основное Определение: Дискретное уравнение Пенлеве — это неавтономное отображение на семействе обобщенных поверхностей Халфена (индекса 0) фиксированного типа которое задается (или соответствует) элементу группы переноса расширенной группы Вейля заданной диаграммой Дынкина решетки симметрий семейства.

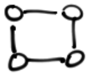
• Мы проиллюстрируем это определение показав, как восстановить отображение из $t \in T$.

• Рассмотрим теперь обратную задачу: восстановить q-P_{V_1} по следующим данным:



$\rightsquigarrow$ $\mathcal{X}_b = Bl_{(p_1,\dots,p_8)}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$, $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_f,\mathcal{H}_g,\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_8\}$; $-\mathcal{K}_{\mathcal{X}} = 2\mathcal{H}_f+2\mathcal{H}_g-\mathcal{E}_1-\dots-\mathcal{E}_8$.

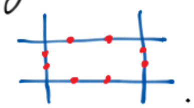
1. Восстановление конфигурации точек раздутия и семейства поверхностей

Тут можно выбирать разные (изоморфные) конфигурации, нас интересует простейший вариант. Диаграмма $A_3^{(1)}$, , означает что $-\mathcal{K}_{\mathcal{X}} = \mathcal{D}_0+\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_3$, где $[\mathcal{D}_i\bullet\mathcal{D}_j] = C_R = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$. В $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$, простейшие -2 кривые – это $\mathcal{H}-\mathcal{E}_i-\mathcal{E}_j$ и $\mathcal{E}_i-\mathcal{E}_j$.

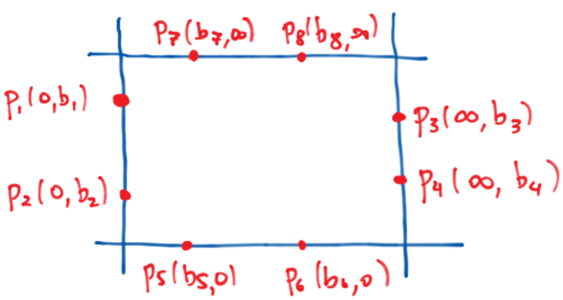
В нашем случае видно, что простейший выбор (согл. с пред. вычислениями, что не важно)

$$\mathcal{D}_0=\mathcal{H}_f-\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2,\ \mathcal{D}_1=\mathcal{H}_g-\mathcal{E}_5-\mathcal{E}_6,\ \mathcal{D}_2=\mathcal{H}_f-\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_4,\ \mathcal{D}_3=\mathcal{H}_g-\mathcal{E}_7-\mathcal{E}_8,$$ и $\mathcal{D}_i = [D_i$ – неприв. кривая$]$

Тогда: $D_0 = H_f - E_1 - E_2$ – собственный прообраз на $\mathcal{X}$ прямой ($f = const$) проходящий через точки раздутия p_1 и p_2 (что означает что f-координаты p_1 и p_2 должны совпадать)

Повторяя это рассуждение для остальных $\mathcal{D}_i$, мы восстанавливаем уже знакомую конфигурацию: .

• Важное замечание: На $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ действует группа координатных калибровочных преобразований $PGL_2(\mathbb{C})\times PGL_2(\mathbb{C})$, где $PGL_2(\mathbb{C})$ - группа дробно-линейных автоморфизмов сферы Римана $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (группа преобразований Мёбиуса $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$). Мы используем эту группу для нормализации координат. Например, мы можем добиться что $D_0=\{f=0\}$, $D_1=\{g=0\}$, $D_2=\{f=\infty\}$, $D_3=\{g=\infty\}$.



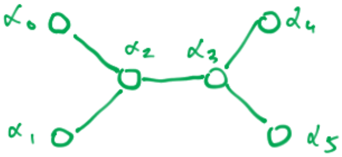
При этом остается действие растяжениями,

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8\end{pmatrix};\ f,g \sim \begin{pmatrix} \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 & \mu b_4\\ \lambda b_5 & \lambda b_6 & \lambda b_7 & \lambda b_8\end{pmatrix};\ \lambda f, \mu g$$

Можно его использовать и положить $b_3=b_7=1$, но удобнее пока оставить эту свободу.

• Заметим, что точки $p_1,\dots,p_8$ лежат на дивизоре полюсов формы $\omega=\frac{df\wedge dg}{fg}=-\frac{dF\wedge dG}{FG}=\dots$ $(\omega)=K_{\mathcal{X}}$. С помощью этой "симплектической" формы можно определить "правильные" параметры $a_0,\dots,a_5$, согласованные с группой симметрий. Они называются корневыми перем.

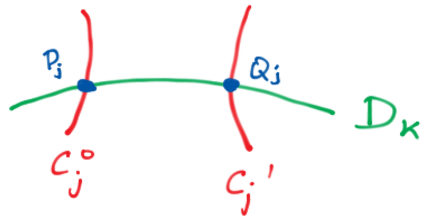
• То же вычисление что и в прошлый раз, $\alpha_j \bullet D_i = 0$, дает нам решетку симметрий:



$$\alpha_0 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 \qquad \alpha_2 = \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 \qquad \alpha_4 = \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6$$
$$\alpha_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \qquad \alpha_3 = \mathcal{H}_f - \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_7 \qquad \alpha_5 = \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8$$
$$\Pi(R^\perp) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_0, \dots, \alpha_5\}$$

• Отображение периодов — $\chi: \Pi(R^\perp) \to \mathbb{C} \mod 2\pi i \mathbb{Z}$, задается на корнях α_i и потом продолжается на $\Pi(R^\perp)$ по линейности. Для подсчета $\chi(\alpha_j)$, используем следующий факт: $\forall \alpha_j$, $\exists$ эффективные дивизоры C_j^1 и C_j^0 : $\alpha_j = [C_j^1] - [C_j^0]$ и $\exists!\, D_k : C_j^1 \bullet D_k = C_j^0 \bullet D_k = 1$. (Упр.: покажите это)

Тогда это можно изобразить так:



$P_j = C_j^0 \cap D_k$
$Q_j = C_j^1 \cap D_k$

Отображение периодов для α_j:

$$\chi(\alpha_j) := \int_{P_j}^{Q_j} \frac{1}{2\pi i} \oint_{D_k} \omega = \int_{P_j}^{Q_j} \operatorname{res}_{D_k} \omega, \text{ где } \operatorname*{res}_{f=0} \frac{df \wedge dg}{fg} = \frac{dg}{g} \quad \operatorname*{res}_{g=0} \frac{df \wedge dg}{fg} = -\frac{df}{f} \text{ и т.д.}$$

Например,
$$\chi(\alpha_0) = \chi([E_3] - [E_4]) = \int_{P_4}^{P_3} \operatorname*{res}_{F=0} -\frac{df \wedge dg}{Fg} = -\int_{b_4}^{b_3} \frac{dg}{g} = \log\left(\frac{b_4}{b_3}\right),$$
$$\chi(\alpha_2) = \chi([H_g - E_3] - [E_1]) = \int_{(0,b_1)}^{(0,b_3)} \operatorname*{res}_{f=0} \frac{df \wedge dg}{fg} = \log\left(\frac{b_3}{b_1}\right), \text{ и т.д.}$$

Корневые переменные a_i тогда задаются так: $\boxed{a_i := \exp(\chi(\alpha_i))}$.

Упр. Покажите, что $a_0 = \frac{b_4}{b_3}$, $a_1 = \frac{b_1}{b_2}$, $a_2 = \frac{b_3}{b_1}$, $a_3 = \frac{b_5}{b_7}$, $a_4 = \frac{b_6}{b_5}$, $a_5 = \frac{b_7}{b_8}$;

$$q = \exp(-\mathcal{K}_X) = a_0 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 = \frac{b_3 b_4 b_5 b_6}{b_1 b_2 b_7 b_8}; \quad \boxed{q = \exp(-\mathcal{K}_X)}.$$

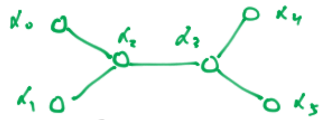
Нам удобно выбрать параметры b_3 и b_7 как свободные параметры отвечающие калибровочному растяжению на координатных осях; тогда остальные b_i выражаются через корневые переменные a_i и b_3, b_7:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \sim \begin{pmatrix} \frac{b_3}{a_2} & \frac{b_3}{a_1 a_2} & b_3 & b_3 a_0 \\ b_7 a_3 & b_7 a_3 a_4 & b_7 & \frac{b_7}{a_5} \end{pmatrix}; f, g$$

Для согласованности преобразований параметров можно или зафиксировать $b_3 = b_7 = 1$,

или просто потребовать, чтобы они не менялись, что мы и сделаем.

• Теперь мы можем перейти к описанию динамики. Динамика задается действием (расширенной) аффинной группы Вейля симметрий.

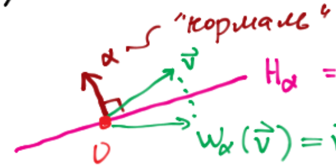
Точнее, диаграмма $D_5^{(1)}$ 

задает, с помощью образующих и соотношений, структуру некоторой группы, называемой аффинной группой Вейля $W(D_5^{(1)})$, по следующим правилам:

$$\alpha_i \longleftrightarrow w_i \qquad W(D_5^{(1)}) := \left\langle w_i \;\middle|\; \begin{array}{lll} w_i^2 = id & \circ\ \alpha_i & w_i w_j w_i = w_j w_i w_j \\ w_i w_j = w_j w_i & \overset{\circ}{\alpha_i}\quad \overset{\circ}{\alpha_j} & \alpha_i \circ\!\!-\!\!\circ \alpha_j \ \text{(соотношение в группе кос)} \end{array} \right\rangle$$

• Эта группа действует на решетке Пикара $Pic(X)$ как "отражение" в корнях α_i

Отступление: Отражение в Евклидовом пространстве E^n:



$$w_\alpha(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,\mathrm{proj}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \vec{v} - 2\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\,\vec{\alpha}$$

• В нашем случае, форма пересечения задает Лоренцеву структуру на решетке $Pic(X)$, но мы используем ту же формулу "отражения":

$$\alpha_i \mapsto w_i : Pic(X) \longrightarrow Pic(X), \quad w_i(C) := C - 2\,\frac{C\cdot\alpha_i}{\underbrace{\alpha_i\cdot\alpha_i}_{=-2}}\,\alpha_i = C + (C\cdot\alpha_i)\,\alpha_i.$$

(Упр. Проверьте соотношения)

• Это действие свободно на подрешетке симметрий и тривиально (так как $D_i \bullet \alpha_j = 0$) на подрешетке поверхности. Тогда, если мы для каждого α_i сможем построить бирациональное отображение $\varphi_i : \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ такое что:

- φ_i поднимается до изоморфизма поверхностей Халфена (после раздутия)
- $(\varphi_i)_* = w_i : Pic(X) \to Pic(X)$

то $(\varphi_i)_*$ будет сохранять подрешетку $\Pi(R)$ поверхности, то есть φ_i будет сохранять конфигурацию точек раздутия (т.е., будет настоящей симметрией нашего семейства).

• Набор отображений φ_i задает бирациональное представление группы $W(D_5^{(1)})$. Сейчас мы покажем, как их построить.

Лемма Бирациональное представление группы $W(D_5^{(1)})$ задается следующими отображениями (для структуры группы необходима правильная нормализация отображений, для этого мы фиксируем $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ калибровочное действие фиксацией b_3 и b_7).

$$w_0: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{b_1 b_3}{b_4} & \frac{b_2 b_3}{b_4} & b_3 & \frac{b_3 b_3}{b_4} \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, \frac{b_3}{b_4} g$$

$$w_1: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} b_2 & b_1 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g$$

$$w_2: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{b_3 b_3}{b_1} & \frac{b_2 b_3}{b_1} & b_3 & \frac{b_3 b_4}{b_1} \\ \frac{b_3 b_5}{b_1} & \frac{b_3 b_6}{b_1} & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f\frac{(g-b_3)}{(g-b_1)}, \frac{b_3}{b_1} g$$

$$w_3: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{b_1 b_7}{b_5} & \frac{b_2 b_7}{b_5} & b_3 & b_4 \\ \frac{b_7 b_7}{b_5} & \frac{b_6 b_7}{b_5} & b_7 & \frac{b_7 b_8}{b_5} \end{pmatrix}; \frac{b_7}{b_5} f, g\frac{(f-b_7)}{(f-b_5)}$$

$$w_4: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_6 & b_5 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g$$

$$w_5: \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \longmapsto \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \frac{b_5 b_7}{b_8} & \frac{b_6 b_7}{b_8} & b_7 & \frac{b_7 b_7}{b_8} \end{pmatrix}; \frac{b_7}{b_8} f, g$$

Доказательство: Мы рассмотрим несколько примеров:

- $\alpha_0 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 \Rightarrow w_0: \mathcal{E}_3 \leftrightarrow \mathcal{E}_4$, что соответствует перестановке порядка раздутий в точках p_3 и p_4, или перестановке параметров $b_3 \leftrightarrow b_4$:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \mapsto \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_4 & b_3 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, g \sim \begin{pmatrix} \frac{b_1 b_3}{b_4} & \frac{b_2 b_3}{b_4} & b_3 & \frac{b_3 b_3}{b_4} \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix}; f, \frac{b_3}{b_4} g$$

наше условие нормировки

$\alpha_2 = \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$. Тут удобнее рассмотреть $\varphi_2^* = w_2^{-1} = w_2$ w_2 – инволюция

$w_2: \mathcal{H}_f \longleftrightarrow \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$, $\mathcal{H}_g \longleftrightarrow \mathcal{H}_g$, $\mathcal{E}_1 \longleftrightarrow \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_3 \longleftrightarrow \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1$; остальные $\mathcal{E}_i \longleftrightarrow \mathcal{E}_i$

Тогда: $\varphi_2^*(\bar{\mathcal{H}}_f) = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$, то есть $\bar{f}$ = координата на пучке (линейной системе)

$|\mathcal{H}_f + \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3| = \left\{\begin{matrix}\text{(собств. прообраз) (1,1)-кривых} \\ \text{на } \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \text{ проходящих через } p_1 \text{ и } p_2\end{matrix}\right\} = \left\{ Afg + Bf + Cg + D = 0 \;\middle|\; \begin{matrix} p_1(0, b_1): Cb_1 + D = 0 \\ p_3(\infty, b_3): Ab_3 + B = 0 \end{matrix} \right\}$

$= \{ Af(g-b_3) + C(g-b_1) = 0 \}$; $\bar{f} = [-C : A] = [f(g-b_3) : (g-b_1)]$ с точностью до преобразований Мёбиуса.

Положим $\bar f = \dfrac{Af(g-b_3)+B(g-b_1)}{Cf(g-b_3)+D(g-b_1)}$ и, аналогично, $\bar g = \dfrac{Kg+L}{Mg+N}$, где A,B,C,D,K,L,M,N — некоторые константы которые нам надо подстроить.

Делается это так. Рассмотрим действие $(\varphi_2)_* = w_2$ на спец. дивизорах:

$w_2: \mathcal{E}_2 \mapsto \bar{\mathcal{E}}_2 \quad \therefore \quad (\varphi_2)_*(p_2) = \bar p_2 = (0,\bar b_2) \quad \therefore \quad \bar f(0,b_2) = \frac{B}{D} = 0 \quad \therefore \quad B=0$

$w_2: \mathcal{E}_4 \mapsto \bar{\mathcal{E}}_4 \quad \therefore \quad (\varphi_2)_*(p_4)=\bar p_4 = (\infty, \bar b_4) \quad \therefore \quad \bar f(\infty,b_4) = \frac{A}{C}=\infty \quad \therefore \quad C=0$

$\therefore \quad \bar f = Af\dfrac{(g-b_3)}{(g-b_1)}$. Аналогичным образом можно показать $L=M=0$, $\bar g = Kg$

$\varphi_2 = \left(\bar f = Af\dfrac{(g-b_3)}{(g-b_1)},\ \bar g = Kg\right)$. Теперь можно посмотреть отображение на параметрах:

$w_2: \mathcal{H}_g - \mathcal{E}_3 \mapsto \bar{\mathcal{E}}_1 \quad \therefore \quad (\bar f,\bar g)(g=b_3) = (0, Kb_3) = (0,\bar b_1)$ $\quad w_2: \mathcal{E}_2\mapsto\bar{\mathcal{E}}_2 \quad (\bar f,\bar g)(0,b_2) = (0,Kb_2) = (0,\bar b_2)$

$w_2: \mathcal{H}_g-\mathcal{E}_1 \mapsto \bar{\mathcal{E}}_3 \quad \therefore \quad (\bar f,\bar g)(g=b_1) = (\infty, Kb_1) = (0,\bar b_3) \Rightarrow Kb_1 = \bar b_3 = b_3 \quad \therefore \quad K = \frac{b_3}{b_1}$

$w_2: \mathcal{E}_4\mapsto\bar{\mathcal{E}}_4 \quad \therefore \quad (\bar f,\bar g)(\infty,b_4) = (\infty, Kb_4) = (\infty,\bar b_4)$ $\quad w_2: \mathcal{E}_5\mapsto \bar{\mathcal{E}}_5 \quad (\bar f,\bar g)(b_5,0) = \left(A\frac{b_3b_5}{b_1}, 0\right) = (\bar b_5, 0)$

$w_2: \mathcal{E}_6\mapsto\bar{\mathcal{E}}_6 \quad \therefore \quad \bar b_6 = A\frac{b_3b_6}{b_1}$ $\quad w_2: \mathcal{E}_7\mapsto\bar{\mathcal{E}}_7 \quad (\bar f,\bar g)(b_7,\infty) = (Ab_7,\infty) = (\bar b_7,\infty) \Rightarrow Ab_7 = \bar b_7 = b_7,\ A=1$

$w_2: \mathcal{E}_8\mapsto\bar{\mathcal{E}}_8 \quad \therefore \quad \bar b_8 = b_8$ и мы получили искомое отображение. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

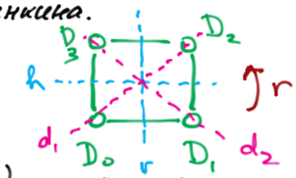
QED

Упр. Закончите доказательство.

• На самом деле нам понадобится расширенная аффинная группа Вейля $\widetilde W(D_5^{(1)})$,

$$\widetilde W(D_5^{(1)}) = \mathrm{Aut}(D_5^{(1)}) \ltimes W(D_5^{(1)}),$$

где $\mathrm{Aut}(D_5^{(1)}) \cong \mathrm{Aut}(A_3^{(1)}) \cong \mathbb{D}_4$ — группа симметрий диаграмм Дынкина.



Лемма: Используя описание $\mathbb{D}_4$ как группы симметрий квадрата:

$\mathrm{Aut}(A_3^{(1)}) = \{\sigma_0,\sigma_r,\sigma_{r^2},\sigma_{r^3},\sigma_v,\sigma_h,\sigma_1,\sigma_2\}$, действие $\mathrm{Aut}(A_3^{(1)}) = \mathrm{Aut}(D_5^{(1)})$ на $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ и корнях задается следующим образом (мы используем стандартную запись перестановок как циклов)

$\sigma_0 = e$; $\quad \sigma_r = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_3) = (\alpha_0\alpha_4\alpha_1\alpha_5)(\alpha_2\alpha_3) = (\mathcal{H}_f\mathcal{H}_g)(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_7\mathcal{E}_3\mathcal{E}_5)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_8\mathcal{E}_4\mathcal{E}_6)$;

$\sigma_{r^2} = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_3) = (\alpha_0\alpha_1)(\alpha_4\alpha_5) = (\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3)(\mathcal{E}_5\mathcal{E}_7)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_4)(\mathcal{E}_6\mathcal{E}_8)$;

$\sigma_{r^3} = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1) = (\alpha_0\alpha_5\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3) = (\mathcal{H}_f\mathcal{H}_g)(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_5\mathcal{E}_3\mathcal{E}_7)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_4\mathcal{E}_6\mathcal{E}_8)$;

$\sigma_v = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_1)(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_3) = (\alpha_0\alpha_4)(\alpha_1\alpha_5)(\alpha_2\alpha_3) = (\mathcal{H}_f\mathcal{H}_g)(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_7)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_8)(\mathcal{E}_3\mathcal{E}_5)(\mathcal{E}_4\mathcal{E}_6)$,

$\sigma_h = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_3)(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = (\alpha_0\alpha_5)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3) = (\mathcal{H}_f\mathcal{H}_g)(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_5)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_6)(\mathcal{E}_3\mathcal{E}_7)(\mathcal{E}_4\mathcal{E}_8)$,

$\sigma_1 = \sigma_{d_1} = (\mathcal{D}_1\mathcal{D}_3) = (\alpha_4\alpha_5) = (\mathcal{E}_5\mathcal{E}_7) = (\mathcal{E}_6\mathcal{E}_8)$, $\quad \sigma_2 = (\mathcal{D}_0\mathcal{D}_2) = (\alpha_0\alpha_1) = (\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3)(\mathcal{E}_2\mathcal{E}_4)$.

Упр. Докажите эту лемму.

Лемма Бирациональное представление группы $Aut(D_5^{(1)}) \simeq Aut(A_3^{(1)}) \simeq \mathbb{D}_4$ может быть задано следующими отображениями:

$$\sigma_r : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_7}{b_5} & \frac{b_3 b_7}{b_6} & b_3 & \frac{b_3 b_7}{b_8} \\ \frac{b_3 b_7}{b_1} & \frac{b_4 b_7}{b_1} & b_7 & \frac{b_2 b_7}{b_1} \end{matrix} ; \frac{b_7}{b_1} g, \frac{b_3 b_7}{f}\right)$$

$$\sigma_{r2} : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} b_1 & \frac{b_1 b_3}{b_4} & b_3 & \frac{b_1 b_3}{b_2} \\ b_5 & \frac{b_5 b_7}{b_8} & b_7 & \frac{b_5 b_7}{b_6} \end{matrix} ; \frac{b_5 b_7}{f}, \frac{b_1 b_3}{g}\right)$$

$$\sigma_{r3} : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_7}{b_5} & \frac{b_3 b_8}{b_5} & b_3 & \frac{b_3 b_6}{b_5} \\ \frac{b_3 b_7}{b_1} & \frac{b_3 b_7}{b_2} & b_7 & \frac{b_3 b_7}{b_4} \end{matrix} ; \frac{b_3 b_7}{g}, \frac{b_3}{b_5} f\right)$$

$$\sigma_v : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_5}{b_7} & \frac{b_3 b_5}{b_8} & b_3 & \frac{b_3 b_5}{b_6} \\ \frac{b_1 b_7}{b_3} & \frac{b_1 b_7}{b_4} & b_7 & \frac{b_1 b_7}{b_2} \end{matrix} ; \frac{b_1 b_7}{g}, \frac{b_3 b_5}{f}\right)$$

$$\sigma_h : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_5}{b_7} & \frac{b_3 b_6}{b_7} & b_3 & \frac{b_3 b_8}{b_7} \\ \frac{b_1 b_7}{b_3} & \frac{b_2 b_7}{b_3} & b_7 & \frac{b_4 b_7}{b_3} \end{matrix} ; \frac{b_7}{b_3} g, \frac{b_3}{b_7} f\right)$$

$$\sigma_1 : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_3}{b_1} & \frac{b_3 b_3}{b_2} & b_3 & \frac{b_3 b_3}{b_4} \\ \frac{b_7 b_7}{b_5} & \frac{b_7 b_8}{b_5} & b_5 & \frac{b_6 b_7}{b_5} \end{matrix} ; \frac{b_7}{b_5} f, \frac{b_3 b_3}{g}\right)$$

$$\sigma_2 : \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{matrix} ; f, g\right) \longmapsto \left(\begin{matrix} \frac{b_3 b_3}{b_1} & \frac{b_3 b_4}{b_1} & b_3 & \frac{b_2 b_3}{b_1} \\ \frac{b_7 b_7}{b_5} & \frac{b_7 b_7}{b_6} & b_7 & \frac{b_7 b_7}{b_8} \end{matrix} ; \frac{b_7 b_7}{f}, \frac{b_3}{b_1} g\right)$$

Упр. Докажите эту лемму.

- Структура полупрямого произведения, $\widetilde{W}(D_5^{(1)}) = Aut(D_5^{(1)}) \ltimes W(D_5^{(1)})$

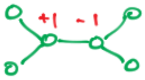
Нам надо задать действие $Aut(D_5^{(1)})$ на $W(D_5^{(1)})$. Это стандартное сопряжение:

Для $\sigma_t \in Aut(D_5^{(1)})$, $\sigma_t \cdot w_{\alpha_i} := w_{\sigma_t(\alpha_i)} = \sigma_t w_{\alpha_i} \sigma_t^{-1}$.

Например, $\sigma_1 = (\alpha_4 \alpha_5)$: $w_4 \longleftrightarrow w_5$; $\sigma_r = (\alpha_0 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_5)(\alpha_2 \alpha_3)$: $(w_0 w_4 w_1 w_5)(w_2 w_3)$

- **Важное Замечание** Для $w \in \widetilde{W}(D_5^{(1)})$, отображение периодов инвариантно, $\chi_X(\alpha_i) = \chi_{w(X)}(w(\alpha_i))$. Из этого мы сразу видим действие w на корневых параметрах $\bar{a}_i = w(a_i) = \exp(\chi_{w(X)}(\bar{\alpha}_i)) = \exp(\chi_X(w^{-1}(\bar{\alpha}_i)))$. Например, $w_0(a_0) = \frac{1}{a_0}$, $w_0(a_2) = a_0 a_2$, и т.д.

• Вернемся к нашей задаче: написать дискретное уравнение Пенлеве заданное



, то есть действующее на $\Pi(R^\perp)$ $\quad \varphi_*: \langle \alpha_0,\dots,\alpha_5\rangle \mapsto \langle \bar\alpha_0,\dots,\bar\alpha_5\rangle + \langle 0,0,1,-1,0,0\rangle(-K_X)$

удобно записывать корни $\alpha_i \in R^\perp$ в виде такого вектора

Пусть $\delta = -K_X = \alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$

Мы хотим представить φ_* как слово из образующих $\widetilde W(D_5^{(1)})$, тогда мы сможем просто взять композицию соответствующих отображений. Для этого нам потребуется следующая техническая лемма (V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras", 1990 Cambridge Univ. Press, Lemma 3.11)

Лемма. Пусть W — аффинная группа Вейля, $w = w_{i_1}\cdots w_{i_k} \in W$ приведенное слово из образующих группы; $k = \ell(w)$ — длина w. Пусть α_i — простой корень. Тогда $\ell(w\circ w_i) < \ell(w) \iff w(\alpha_i)<0$

• Посмотрим как эта Лемма работает в нашей ситуации:

$$\varphi_*: \underbrace{\langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle}_{\vec\alpha} \mapsto \langle \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\delta, \underbrace{\alpha_3-\delta = -\alpha_0-\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}_{\varphi_*(\alpha_3)<0}, \alpha_4,\alpha_5\rangle$$

Тогда:

$$(\varphi_*\circ w_3)(\vec\alpha) = \varphi_*(\langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_5\rangle) = \langle \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\delta-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4-\delta,\alpha_3+\alpha_5-\delta\rangle$$

Замечание: Так работать немного неудобно — приходится все время пересчитывать.

Однако заметим, что $(\varphi_*\circ w_3)(\vec\lambda)$ можно посчитать "применив" w_3 к компонентам вектора $\varphi_*(\vec\lambda)$:

$$w_3\circ\langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\delta,\delta-\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle = \langle\alpha_0,\alpha_1,(\alpha_2+\delta)+(\delta-\alpha_3),-(\delta-\alpha_3),(\delta-\alpha_3)+\alpha_4,(\delta-\alpha_3)+\alpha_5\rangle$$

Упр. Поймите почему это так.

Тогда:

$$\varphi_*(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\delta,\alpha_3-\delta,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

$$(\varphi_*\circ w_3)(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\delta-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4-\delta,\alpha_3+\alpha_5-\delta\rangle$$

w_4 и w_5 коммутируют, поэтому не важно, что делать на след. шагу

$$(\dots\circ w_4)(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4,\delta-\alpha_3-\alpha_4,\alpha_3+\alpha_5-\delta\rangle$$

$$(\dots\circ w_5)(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-\delta,\delta-\alpha_3-\alpha_4,\delta-\alpha_3-\alpha_5\rangle$$

$$(\dots\circ w_3)(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_5,\alpha_4\rangle$$

тут нам пригодится σ_1

$$(\dots\circ\sigma_1)(\vec\alpha) = \langle\alpha_0,\alpha_1,-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

$$(\dots\circ w_2)(\vec\alpha) = \langle-\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_0-\alpha_2,\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

$$(\dots\circ w_0)(\vec\alpha) = \langle\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_0-\alpha_2,\alpha_0,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

$$(\dots\circ w_1)(\vec\alpha) = \langle\alpha_1+\alpha_2,\alpha_0+\alpha_2,-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

$$(\dots\circ w_2)(\vec\alpha) = \langle\alpha_1,\alpha_0,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\rangle$$

тут нужен автоморфизм σ_2

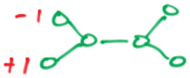
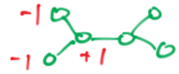
$$(\dots\circ\sigma_2)(\vec\alpha) = \vec\alpha\,!$$

Значит $\varphi_*\circ(w_3\circ w_4\circ w_5\circ w_3\circ\sigma_1\circ w_2\circ w_0\circ w_1\circ w_2\circ\sigma_2) = id$

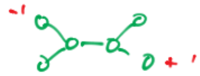
Тут все элементы инволюции

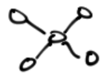
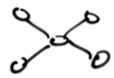
$$\boxed{\varphi_* = \sigma_2\circ w_2\circ w_1\circ w_0\circ w_2\circ\sigma_1\circ w_3\circ w_5\circ w_4\circ w_3}$$

Упр. Посчитайте φ как композицию элементарных бирациональных отображений и покажите что получится действительно q-P_{VI}.

Упр. Для векторов переноса  и , сделайте следующее:

- посчитайте действие на параметрах b_i
- посчитайте разложение в образующие и напишите уравнение
- покажите что получившееся слово сопряжено q-P_{VI}.
- проинтерпретируйте это как замену координат.

Упр. Покажите что уравнение для вектора  не сопряжено q-P_{VI}.

Упр. $d\text{-}P_V = d\text{-}P(D_4^{(1)}/D_4^{(1)})$: R:  R^{-1}:  

Попробуйте написать уравнение. (Тут в отображении периодов не нужно экспоненциировать)

Упр. Запишите в координатах следующие преобразования раздутия / сдутия: